

期末テスト (2/10) の解答編 (微積 B, 2010.02.15)

ネットでの公開を考え、得点分布はここには載せません。僕の部屋の前に貼ってあります。

全体的な講評：思ったより点が伸びませんでした。(まあ、少し辛めに採点したことも影響してるでしょうが。) 特に、問4の出来が予想よりもかなり低かったですね。問6もあまりよくありませんでしたが、級数は一番最後にやったから、まあ仕方ないとも思います。

総じて、新しい材料は(級数以外) そこそこ吸収しているのが見て取れて、それは良かったと思います。ただ、いろいろなところで計算力不足に祟られたようですね(例：問1の積分、問6で極限が求められない、など)。この講義で身につけるべきことはかなりの人が身につけたと思いますが、もう少し、**計算力を向上させるように努力して下さい** — 計算力不足で世紀の大発見を逃したくないでしょ。

問1：a)

$$\int_{-2}^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow -0} \int_{-2}^a \frac{1}{x} dx + \lim_{b \rightarrow +0} \int_b^2 \frac{1}{x} dx$$

であるが、右辺の極限は2つとも存在しない。

b) $x = \sin \theta$ と置換すると

$$\text{積分} = \lim_{a \rightarrow 1-0} \int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{a \rightarrow 1-0} \int_0^{\arcsin a} (\sin \theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^2 d\theta = \frac{\pi}{4}$$

c) 部分分数に分解して

$$\begin{aligned} \text{積分} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right\} dx \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \log \left(\frac{L+1}{L+2} \right) + \log \left(\frac{3}{2} \right) \right\} = \log \left(\frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

(その2) この積分は $\lim_{a \rightarrow +0} \int_a^{\pi/2} \log(\sin \theta) d\theta$ と解釈すべきである。積分範囲では $0 < \sin \theta \leq 1$ なので、非積分関数は負。従って、 a を 0 に近づけると積分の値は小さくなる。よって、この積分が下に有界であることを言えば良い。

そのためには、

$$\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta \quad \implies \quad \log(\sin \theta) \geq \log\left(\frac{2}{\pi} \theta\right) = \log\left(\frac{2}{\pi}\right) + \log \theta$$

を用いて

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_a^{\pi/2} \log(\sin \theta) d\theta \geq \lim_{a \rightarrow +0} \int_a^{\pi/2} \left\{ \log\left(\frac{2}{\pi}\right) + \log \theta \right\} d\theta = \frac{\pi}{2} \log\left(\frac{2}{\pi}\right) + \lim_{a \rightarrow +0} \left\{ \frac{\pi}{2} \log\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} - a \log a + a \right\} = -\frac{\pi}{2}$$

とすればよろしい。

問2：定石通り解くと、

$$\int y^2 dy = \int e^x dx \quad \implies \quad \frac{y^3}{3} = e^x + C$$

初期条件から C を決めて、答えは

$$y(x) = \left\{ 1 + 3(e^x - e^2) \right\}^{1/3}$$

問3：ともかく計算すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \left(\frac{x^2}{t^{5/2}} - \frac{1}{2t^{3/2}} \right) \exp\left(-\frac{x^2}{t}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{2x^2}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{t}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{4x^2}{t^{5/2}} - \frac{2}{t^{3/2}} \right) \exp\left(-\frac{x^2}{t}\right)\end{aligned}$$

となり、

$$4\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

問4：かなり出来が悪かったです...

ともかく、虚心坦懐に x, y, z で微分します。ただし、そのときに、 r は x, y, z の関数であることに十分注意します。

まず一回、 x で微分すると連鎖律から

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = g'(r) \frac{x}{r}$$

となる。これをもう一回やると (r が x の関数であることを忘れない！)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g''(r) \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{x}{r} + g'(r) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right)$$

となるが、この後ろの微分は普通にやって

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}$$

となるから、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g''(r) \frac{x^2}{r^2} + g'(r) \frac{1}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right)$$

を得る。同様に y, z の微分も求められ、これらは上の x を y, z で置き換えたものになる。従って、これらを足し合わせると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = g''(r) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + g'(r) \frac{1}{r} \left(3 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \right) = g''(r) + \frac{2}{r} g'(r)$$

となる。

(注) この間では3次元空間での話をしましたが、同様の問題を n 次元空間で考えると、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r)$$

となります。

問5：定石通りやります。

f について

極値点の候補は

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = 4(x^3 - y), \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = -4(x - y)$$

を解いて、 $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$ の3つである。ヘシアンは

$$\det \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = 48x^2 - 16$$

である。

$(0, 0)$ ではヘシアンが負なので、鞍点である。

一方、 $(1, 1)$ と $(-1, -1)$ ではヘシアンが正なので、極値をとる。更に、 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 > 0$ なので、極小であるとわかる。

(注意) x, y の符号を同時に変えても、 f の値は同じである。つまり、この場合、 (a, b) が極値点なら、その符号を変えた $(-a, -b)$ も極値点になる。

g について

上と同様に解いて行くと、極値点の候補は $(0, 0)$ と $(2, 6)$ とわかる。ヘシアンを見ると、 $(0, 0)$ は鞍点とわかり、一方、 $(2, 6)$ では極小になることがわかる。

問6：意外に出来が悪かったですねえ... 何を計算すべきかはわかってても、その極限が求められなかった人が多数。

(a) Root test を行う。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} - 1$$

の値を知りたい。これは以下のように $\sqrt[n]{n}$ だけ取り出すのが良いだろう。

$$\log(\sqrt[n]{n}) = \frac{1}{n} \log n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

つまり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ なのである。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 1 - 1 = 0$$

なのだ。この絶対値が1よりも小さいから、この級数は収束する。

(もちろん、上のように \log をとらなくても $\sqrt[n]{n}$ を押さえ込むことはできる。例えば、 $n < (1.9)^n$ であることを示せば、 $\sqrt[n]{n} < 1.9$ が言える。これでも root test には十分だ。)

(b) Ratio test で考える。 x^n の係数を a_n として

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 2$$

よって、収束半径は $1/2$ 。

(c) またもや ratio test. x^n の係数を a_n として

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{3(n+1)} = \infty$$

よって収束半径は $1/\infty = 0$ 。

(注) $n!$ というのは非常に早く大きくなるから、これが何らかの形で残る場合、答えは一方的なものになることが多い。この問題の逆方向の例としては、指数関数のテイラー展開 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ がある。この場合、分母に $n!$ があるので、どんな x に対してもこの級数は収束する。