

2009.9.30.

微分積分学・同演習 B (S1-20 クラス)

担当：原 隆 (数理学研究院)：伊都キャンパス数理教育研究棟 219 号室，

phone: 092-802-4441, e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp

Office hours: 講義終了後に質問を受け付けます。メールでの質問も歓迎。

概要： 春学期の「微分積分学 A」に引き続いて、微分と積分を究める。

春学期でキーとなる概念：偏微分，極限，(ϵ - δ 論法)，(コーシー列)，微分，テイラー展開，積分

秋学期でキーとなる概念：極限，級数，積分，偏微分，級数，微分方程式

特に講義を通して身につけて欲しいこと： この講義で学んでほしい「能力」は以下の 2 つである。

- 微分や積分のいろいろな概念を習得し，実際に 応用して使える ようになること
- その際，単にやり方を覚えるのではなく，自分の議論に自信が持てるようになる こと。

従来，高校までの数学では主に最初の面に力点が置かれていた。ところが，昨今の中学，高校でのカリキュラムの制約上，その最初の面ですら，練習不足と思われる学生さんが増えている。また，「この問題はどのように解けば良い」ことは知っているけども，「その方法がなぜ正しいのか」が説明できない人（「本当にその方法で良いのか，自信ある？」と問いかけると固まってしまう人）も多いようだ。そこで，この講義ではそのような練習不足を補いつつ，この方法はなぜ正しいのか，が説明できる人を養成することを目指す。

内容予定： (以下は大体の目安です。実のところ，「級数」と「偏微分」のどちらを先にやるか，まだ迷っています。)

II. 積分の続き

1. 広義積分 (教科書 3.5 節)
2. 積分の応用：面積と体積 (教科書 3.7 節)
3. 簡単な微分方程式 (教科書にはないけど，重要だからやります)

III. 級数について (時間の関係で，かなり簡単にせざるを得ない...)

1. 級数とは？その収束と発散 (教科書 4.1 節)
2. 整級数について (教科書 4.2 節)
3. 関数の列について (教科書 4.3 節)

IV. 多変数の微分

1. 偏微分とは？(教科書 5.1 節)
2. 高階の偏微分とは？(教科書 5.2 節)
3. 極大極小問題 (教科書 5.3 節)
4. 陰関数定理 (教科書 5.4 節)
5. 条件付き極値問題 — Lagrange の未定定数法 (教科書 5.5 節)

教科書： 斉藤正彦「微分積分学」(東京図書)。実はこの本の前身であった「微分積分教科書」というのを教科書にしたかったのだが，絶版になってしまった。ともかくしっかりした良い本です。

参考書： 上の教科書は今時の学生さんにも読みやすいものとして選んだ。ただ，ところどころ記述が簡潔すぎたりしてわかりにくい面もあるかもしれない。もっといろいろと調べたい場合には，以下の本をお薦めする。

- 高木貞治「解析概論」(岩波)。今の学生さんには難しすぎる，との意見もあるが，不朽の名著だ。超お奨め。
- 小平邦彦「解析入門 I, II」(岩波)。上の解析概論を少しとっつきやすくした感じ。激しくお奨め。
- 杉浦光夫「解析入門 1, 2」(東大出版会)。かなり分厚いけど，その分，記述は丁寧。お奨め。
- 田島一郎「解析入門」(岩波書店) 1 変数の場合に限って，特に ϵ - δ 論法など，かゆいところに手が届くように書いてある。自習に適しているだろう。お奨め。

- 溝畑茂「数学解析 上・下」(朝倉書店)。かなりユニークな本である。特に、微分と積分が渾然一体となつて展開される点は非常に面白い。読み応えは非常にあってお奨めだが、最初はかなり難しいと感じるだろう。

以上の教科書、参考書は「田島本」「小平本」などと引用する事がある。

評価方法：中間試験(＋レポート)と期末試験の成績を総合して評価する。そのルールは以下の通り：

- 最終成績は一旦、100点満点に換算してから、この大学の様式に従ってつける。
- その100点満点(最終素点)は、以下のように計算する。
 - － まず、「中間試験(＋レポート)の点」「期末試験の点」をそれぞれ100点満点で出す。
 - － 次にこの2つを以下の式で「平均」し、一応の総合点を出す：

$$(\text{総合点 } A) = 0.50 \times (\text{中間(＋レポート)の点}) + 0.50 \times (\text{期末の点})$$

$$(\text{総合点 } B) = 0.10 \times (\text{中間(＋レポート)の点}) + 0.90 \times (\text{期末の点})$$

- － ただし、上の重みを若干変更する可能性はある(総合点 A で、中間と期末の比を 4 : 6 にするなど)。
- － 最終素点は

$$(\text{最終素点}) = \max\{(\text{総合点 } A), (\text{総合点 } B)\}$$

とする。つまり、(総合点 A) と (総合点 B) を比べて、良い方をとるのだ。

- 上の「最終素点」に、必要ならば全体に少し修正を加えたものをつくり、最終成績を出す。
- レポートの点は原則として、総合点 A, B には加えない。ただし、上の計算では合格基準に少し足りない人(百点満点で10点不足が限度)を助けるかどうかにかんして使用する。また、レポートがずば抜けて良い場合、この事実は最終成績に反映される事もある。

(期末一発逆転の可能性について)

- この講義では(上位10%の人だけがわかるような)進んだ話題はあまり扱わない。そのため、「できる」人が退屈することも考えられる。退屈した人には自主的な学習を奨める意味で、講義などに出なくても「期末で一発逆転」も可能なようにした。
- ただし、「期末の一発勝負」がうまくいく人はほとんどいないだろう(期末試験は中間試験やレポートよりは難しい)から、あくまで自己責任でやってくれ。期末の一発勝負に出て成績が悪くても、苦情は一切受け付けない!(できる人が少ないにもかかわらずこの形式をとるのは、僕の美学にこだわっているからである。)

「学習到達度再調査」について：

この大学には「学習到達度再調査」とかいう、変な制度がある。この科目は必修科目でもあり、これに更に期待する人がいるかもしれないので、ここではっきり、宣言しておこう。

「再調査」は行わない可能性もある。再調査を行うか、誰を対象とするかは、こちらの一存で(もちろん公平に、しかし厳しく)決めさせていただく。

本音を言うと、再調査をする方が、こちらとしては厳しく点を付けやすい(厳しくつけておいて、誰を助けるかは再調査できちんと確かめれば良いから)。その分、皆さんには過酷なものになるでしょう。

だから、再調査には頼らず、期末試験まででちゃんと合格できるよう、しっかり学習して下さい。期末試験までなら皆さんの学習を助ける努力は惜しまないつもりで、質問などにも忍耐強く相手することを保証する。

合格(最低)基準：

合格のための条件(A, B がとれる条件ではない!)は、講義中に出題する例題、レポート問題と同レベルの問題が解けることである。(ただし「時間がなくてレポートは出せないけど試験には出すぞ」などの指示を講義中に与えることもあり得る。)具体的には大体、以下ようになる(進度の都合で内容に若干の変更があるので、完全なリストを現時点で呈示する事はできないが、講義を追っておれば明らかになるはず)。

- 多変数関数の微分とその応用について、計算ができること（具体的には、偏微分の計算、多変数関数の増減と極値問題、多変数のテイラー展開など）。
- 1変数関数の積分とその応用、特に広義積分についても、計算ができること。また、簡単な広義積分については、具体的に計算できない場合でも、その収束・発散を判定できること。
- 級数については、ベキ級数などの基本概念がわかり、その「収束半径」などが計算できること。

レポート、宿題について：

ほぼ毎回、簡単なレポートや「お奨めの宿題問題」を出す予定である。このレポートは次回の講義時に集めて、その次の週の講義時に返却の予定。これらの出題意図は「この程度できれば講義についていけるし、合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること、である。成績評価に占めるレポートの比重は低いですが、この講義をこなす上では重要な意味があるので、是非やること。

重要：レポートは友達と相談した結果を書いても良い。ただし、誰と相談したかは明記すること。（「俺は人に教えてやっただけで人からは全く教わってない」と思う人は書かなくても良いが。）相談した人の名前を書かせるのは、「お世話になった文献、人にはきちんと感謝する」という、学問上の最低ルールを守ってもらうためである。なお、お世話になった人の名前を書いてもレポートの成績が不利になることはない。

プリントの使いかた：

例年、僕は講義でプリントを配っていた。これらのプリントは板書にアップアップしなくても講義が聴けるように、また、教科書の足りないところを補うためだった。

しかし、プリントを配っても、プリントの残りが教室の後ろに散乱したり、プリントを受け取っても読まない人も案外いたりした。

このような理由のため、今年から講義の補助プリントはこの講義の web page に上げておいて、皆さんに自由にダウンロードしてもらう方法に変更し、講義では最低限のプリント（日々のレポート問題など）のみを配ることとする。この講義のアドレスは <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/09/biseki20b.html> である。

なお、急いで作っているためにプリントにはタイプミスなどがあると思うので、気づいたらできるだけ指摘してくれるとありがたい。

特に注意を要する題材：

1. 皆さんは春学期の鬼門である「極限」を通過した訳だから、秋学期のこの科目は何とか理解できるに違いない。しかしそれでも、「級数」のところは難しく感じるかもしれないから、注意して下さい。
2. 春学期に引き続き、この講義の大きな目的は「使える微積分を学ぶ」ことで、実際に手を動かす（計算する）ことが大事です。

この科目に関するルール：

世相の移り変わりは激しく、僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました。そのうちのいくつかは良いことですが、悪いこともあります。オヤジだとの反発は覚悟の上で、互いの利益のために、以下のルールを定めます。

- まず初めに、学生生活の最大の目的は勉強すること であると確認する。
- 講義中の私語、ケータイの使用はつつむ。途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）。これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケットです。
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける。
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕のホームページも使う —— アドレスは <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html>）。「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切、受け付けない。
- レポートを課した場合、その期限は厳密に取り扱う。

- E-mail による質問はいつでも受け付ける (hara@math.kyushu-u.ac.jp) . ただ、回答までには数日の余裕を見込んで下さい。なお、学生さんのメールが往々にして spam mail に分類されてしまう事があります (多分、html mail で送られてくると自動的にスパムにされてしまうのだろう) . 見分け易いように、題名には「工学部の〇〇です」などと書いて下さい。また僕にメールしたのに、2, 3日しても返事がない場合は返事を催促して下さい。たとえどんなに理不尽 (例: 人格攻撃) なメールであっても、僕は返事をするにしています。返事がないのはメールが届いていない可能性が高いです。

演習書の奨め:

教科書の例題や節末問題, 章末問題はできるだけやること。それでもわかった気がしなかったら, 演習書 (いわゆる問題集) をやることを勧めます。問題をやることによって, 自分が曖昧にしかわかっていなかった部分がはっきりしてくることが多い。ただし, その際, **解答を鵜呑みにはせず, 自分で納得するまで考えること。考えてもわからなかったら, 友達や教官 (僕を含む) に訊けばよい。** 同じ理由で 問題の解答を頭から覚える愚だけは避ける事。 演習書はどれでも良いが, 一応, 目についたものを列挙すると:

- 三村征雄編「大学演習 微分積分学」(裳華房) — 僕はこれを使った。ちょっとムズイかもね。
- 蟹江, 桑垣, 笠原「演習詳説 微分積分学」(培風館) — なかなか良いが, はじめは難しく感じるかも。
- 杉浦ほか「解析演習」(東大出版会) — これもまあ, 大変ではありますが, 良い本。
- 鶴丸ほか「微分積分 — 解説と演習」(内田老鶴圃) — 一番「普通」かも。
- 飯高茂監修「微積分と集合 そのまま使える答えの書き方」(講談社サイエンティフィック) — 題名は変だけど, 馬鹿にはできない, なかなかの本。流石は飯高さん監修だけあるな。案外, おすすめ。

これ以外にもいくらでも出版されてるから, 図書館や本屋さんで自分にあった (読みやすい, やる気になる) ものを選べば良い。ただしその際, 解答や解説の詳しいもの がよい。また, 無理をして難しすぎるものを選ぶ必要はない。自分が簡単だと思うことでも, (人間はアホやから) わかってないことが一杯あり, むしろ簡単どころが盲点になって先に進めないのだ。簡単な演習書でもやれば, 大きな効果があるはず。

本論に入る前に記号のお約束.

$a < b$ を 2 つの実数, n を非負 (負でない) 整数とする.

- 整数の全体は \mathbb{Z} , 自然数 (1 以上の整数) の全体を \mathbb{N} , 有理数の全体を \mathbb{Q} , 実数の全体は \mathbb{R} と書く。
- 集合 A の要素を大学では「元 (げん)」ともいう。(例) 2 は \mathbb{Z} の元である。 $\sqrt{2}$ は \mathbb{Q} の元ではない。
- 高校までと異なり, 「 $a < b$ または $a = b$ 」を $a \leq b$ と書く。同様に, 「 $a > b$ または $a = b$ 」を $a \geq b$ と書く。
- $a < x < b$ なるすべての実数の集合を (a, b) と書き, 开区間 という。教科書ではこの开区間に変な記号 (括弧のうえに \circ がついてる) を使ってるが, 打ち込むのが大変だし, 標準的ではないので使わない。
- $a \leq x \leq b$ なるすべての実数の集合を $[a, b]$ と書き, 閉区間 という。
- 高校と同じく, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ は n の階乗 である。ただし, $0! = 1$ と約束する。

(用語の注) あるものがたった一通りに決まる (存在する) とき, 業界用語では **$\circ\circ$ が一意に決まる (存在する)** という。この表現『一意』は頻出するから覚えよう (英語の unique, uniquely の訳)。

9月30日：今日は広義積分の話です.

第1回レポート問題：今回は広義積分の計算問題です. 小問の数が多いので, 採点はちょっと大雑把になってしまうかもしれません.

問1：以下の広義積分を計算せよ. 中には, 広義積分の値が存在しないものもあるかもしれない. α は実数の定数である.

$$(a) \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad (b) \int_0^1 x^{-1/3} dx \quad (c) \int_{-1}^1 x^{-1/3} dx \quad (1)$$

$$(d) \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx \quad (e) \int_{-\infty}^{\infty} x dx \quad (f) \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad (2)$$

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ, わかりにくかったところ, 講義への要望などがあれば自由に書いてください. また, 質問があれば, それもどうぞ. この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから, 次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります.

レポート提出について：レポートは,

**10月5日(月)の2:00 PMまでに,
全学教育教務課のボックス(42番)に**

入れて下さい. 整理の都合上, 用紙はA4(この用紙と同じ大きさ) を使ってください (B5だとなくなっても知らんぞ). また, 2枚以上にわたる場合は何らかの方法 (ただし, クリップは不可) で綴じてください.

10月7日：今日は広義積分の続きです。

10/7の講義時には理解していませんでしたが、10/14は全学教育がお休みらしいので、この講義も休講です。次回は10/21になります。(10/8に追記)

第2回レポート問題：今回は広義積分の収束・発散の判定問題です。

問2：以下の広義積分が収束するか否かを判定せよ。

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3 + 12x^2 + 1} dx \quad (b) \int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx \quad (c^*) \int_3^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (3)$$

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ、わかりにくかったところ、講義への要望などがあれば自由に書いてください。また、質問があれば、それもどうぞ。この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから、次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります。

レポート提出について：レポートは、

**10月19日(月)の2:00 PMまでに、
全学教育教務課のボックス(42番)に**

入れて下さい。 整理の都合上、用紙はA4(この用紙と同じ大きさ)を使ってください(B5だとなくなっても知らんぞ)。また、2枚以上にわたる場合は何らかの方法(ただし、クリップは不可)で綴じてください。

—————先週のレポートの略解—————

問1：ともかく定義通り計算するだけです。でも、特に(c)など、できた人の方が少なかった問題もありました。

(a) $x=0$ がヤバいことに注意して

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{L \rightarrow +0} \int_L^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{L \rightarrow +0} (2\sqrt{3} - 2\sqrt{L}) = 2\sqrt{3}.$$

(b) やはり $x=0$ がヤバいことに注意して

$$\int_0^1 x^{-1/3} dx = \lim_{L \rightarrow +0} \int_L^1 x^{-1/3} dx = \lim_{L \rightarrow +0} \frac{3}{2} (1^{2/3} - L^{2/3}) = \frac{3}{2}.$$

(c) 今度も $x=0$ がヤバいので、 $x=0$ で積分区間を2つに分けなければならない。

$$\int_{-1}^1 x^{-1/3} dx = \int_{-1}^0 x^{-1/3} dx + \int_0^1 x^{-1/3} dx$$

ここで右辺のそれぞれを広義積分として、(2)のように計算すると

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0.$$

(注意) 結果的には、「奇関数の積分はゼロ」となったように見えるが、これは $x=0$ でのヤバさ(特異性)が積分可能なほどに緩かったためであり、ある種、偶然の産物である。積分区間をちゃんと $x=0$ でわけること!

(d) 今度は積分区間が無限大なので,

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L x^2 e^{-x} dx$$

として計算する. 右辺の積分は部分積分 2 回で簡単に計算できて, 答えは 2.

(注意) かなりの人が答えを -2 としていた. 非積分関数が正, かつ積分の向きも普通の向き (下端が上端より小さい) だから, **この積分の値が負になることはあり得ない** ことには気づくべきである.

(e) 積分区間の両端が $\pm\infty$ に行くので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{L \rightarrow -\infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_L^M x dx = \lim_{L \rightarrow -\infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^2 - L^2}{2}$$

この極限では M と L が独立に $\pm\infty$ に行くので, 上の極限の値は存在しない. つまり, この広義積分は存在しない.

(f)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_1^L \frac{1}{x^2} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{L}\right) = 1$$

10月21日：今日は積分のまとめと微分方程式の初歩です。

今日はどこまで行けるか自信がないのと、面積などの典型的な問題は教科書 3.7 節にほとんど載っていることを鑑み、今回のレポートは出題しません。ただし、教科書 3.7 節のいろいろな面積、体積の問題には目を通しておくこと。

先週のレポートの略解

問 2： ともかく定義通り計算するだけです。

(a) 極限 $\lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \frac{1}{x^3 + 12x^2 + 1} dx$ が存在するかどうかを判定すれば良い。非積分関数は正だから、積分の値は L の単調増加関数である。したがって、これが上から有界であることが言えれば、この極限が存在することが言える。さて、 $L \geq 1$ では

$$\int_0^L \frac{1}{x^3 + 12x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^3 + 12x^2 + 1} dx + \int_1^L \frac{1}{x^3 + 12x^2 + 1} dx$$

であるが、第一項は有限な連続関数の有限な区間での積分ゆえ、有限である。また、第二項は

$$\int_1^L \frac{1}{x^3 + 12x^2 + 1} dx \leq \int_1^L \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2L^2} \leq \frac{1}{2}$$

でやはり有界である。よって、 $\int_0^L \frac{1}{x^3 + 12x^2 + 1} dx$ は有界であって、問題の極限は存在する。

(b) 極限 $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$ が存在するかどうかを判定すれば良く、積分 $\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$ が有界か否かが問題である。

さて

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 - 2\sqrt{\epsilon} \leq 2$$

であるので、これは有界。従って広義積分は存在する。

(c) 極限 $\lim_{L \uparrow \infty} \int_3^L \frac{\sin x}{x} dx$ が存在するかどうかを判定すれば良い。困ったことにこの積分の結果は L について単調ではない。そのため、単純に「 $\circ\circ$ が有界なので」などとは議論できない。そのため、以下のように工夫する。議論の粗筋は春学期にでてきた $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ の収束の判定と同じである。

証明の方針は以下の通り。(1) まず数列

$$a_n := \int_3^{2n\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

に注目する。これは n について単調増加なので、それが収束することはそれほど苦労せずに言える。(2) そのあとで一般の L に対する積分を上 a_n と比較し、その差がゼロに収束することを示して、問題の積分が収束することを言う。

(1) 数列 a_n について、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \int_{2n\pi}^{2n\pi+2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{2n\pi + y} dy = \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2n\pi + y} dy + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin y}{2n\pi + y} dy \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2n\pi + y} dy - \int_0^{\pi} \frac{\sin z}{2n\pi + \pi + z} dz = \int_0^{\pi} \sin y \left[\frac{1}{2n\pi + y} - \frac{1}{2n\pi + \pi + y} \right] dy \end{aligned}$$

と書いてみると、大括弧の中が正だから、 $a_{n+1} \geq a_n$ がわかる。つまり、数列 a_n は n について単調増加なのである。さらに、 $\sin y \leq 1$ より

$$a_{n+1} - a_n \leq \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2n\pi + y} - \frac{1}{2n\pi + \pi + y} \right] dy = \log \left[\frac{(2n\pi + \pi)^2}{(2n\pi)(2n\pi + 2\pi)} \right] = \log \left[\frac{(2n+1)^2}{4n(n+1)} \right] \quad (4)$$

であるが、 n の大きいところでは (log のテイラー展開！)

$$\log \left[\frac{(2n+1)^2}{4n(n+1)} \right] = \log \left[1 + \frac{1}{4n(n+1)} \right] \leq \frac{1}{4n(n+1)} \quad (5)$$

であることに注目すると、

$$a_{n+1} - a_n \leq \frac{1}{4n(n+1)} \quad (6)$$

であることがわかる。従って、

$$a_{n+1} = a_1 + \sum_{j=1}^n (a_{j+1} - a_j) \leq a_1 + \sum_{j=1}^n \frac{1}{4j(j+1)} = a_1 + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right] \leq a_1 + \frac{1}{4} \quad (7)$$

となつて a_n は上に有界、従つて a_n は収束する。

(2) a_n と積分 $\int_3^L \frac{\sin x}{x} dx$ の比較について、

どうせ $L \rightarrow \infty$ の極限を考えるので、おおきな L のみ考える。 L を一つ決めると

$$2n\pi \leq L < 2n\pi + 2\pi \quad (8)$$

となるような整数 n が一つ定まる。すると

$$\int_3^L \frac{\sin x}{x} dx - a_n = \int_3^L \frac{\sin x}{x} dx - \int_3^{2n\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \int_{2n\pi}^L \frac{\sin x}{x} dx \quad (9)$$

となるので、

$$\left| \int_3^L \frac{\sin x}{x} dx - a_n \right| \leq \int_{2n\pi}^L \frac{|\sin x|}{x} dx \leq \int_{2n\pi}^L \frac{1}{2n\pi} dx \leq \frac{1}{n} \quad (10)$$

が得られる (最後のところで積分区間の長さが 2π 以下であることを用いた)。 $L \rightarrow \infty$ とすると $n \rightarrow \infty$ となり、上の差はゼロに行く。つまり、 $\lim_{L \uparrow \infty} \int_3^L \frac{\sin x}{x} dx$ は存在して、その極限は $\lim_{n \uparrow \infty} a_n$ に等しいことがわかった。

(注) 実はこのような積分の問題は「部分積分」を用いると簡単になることもある。この問題なら部分積分により

$$\int_3^L \frac{\sin x}{x} dx = \left[\frac{-\cos x}{x} \right]_3^L - \int_3^L \frac{\cos x}{x^2} dx = \frac{\cos 3}{3} - \frac{\cos L}{L} - \int_3^L \frac{\cos x}{x^2} dx$$

と書き直せる。ここで第一項は定数、第二項は $L \rightarrow \infty$ でゼロに行くから、第三項の積分の極限が問題となる。

残念ながら、この積分は L について単調ではないので、結局は上で延々とやったような計算をやる必要が (現時点では) ある。しかし、「コーシー列」の考え方をを用いると、ここから簡単に収束が結論できる — 部分積分しない場合との差は今積分が「絶対収束」(後で学習する) するようになったことだ。この方法での解は、実は教科書の p.140 辺りに載っている。現時点ではもちろん、このような解法ができることは要求していない。

10月28日：今日は微分方程式の初歩です。

第3回レポート問題：今回は微分方程式の問題です。

問3：以下の微分方程式を解け。初期条件がついているものはその初期条件を満たすものを、初期条件なしのものは一般解を求めよ。

$$(1) \quad y' = 3y^2, \quad \text{初期条件は} \quad y(0) = 2$$

$$(2) \quad y' = -2xy, \quad \text{初期条件は} \quad y(1) = 2$$

$$(3) \quad y' = 2y(1 - y)$$

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ、わかりにくかったところ、講義への要望などがあれば自由に書いてください。また、質問があれば、それもどうぞ。この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから、次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります。

レポート提出について：レポートは、

11月2日（月）の 2:00 PM までに、

全学教育教務課のボックス（42番）に

入れて下さい。 整理の都合上、用紙はA4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5だとなくなっても知らんぞ）。また、2枚以上にわたる場合は何らかの方法（ただし、クリップは不可）で綴じてください。

11月4日：今日は偏微分に入ります。

第4回レポート問題：今回は偏微分の問題です。

問4：以下の偏微分を計算せよ。単なる計算ですが，試験では案外ミスが目立つので。

$$(1) \quad f(x, y) := x^2 + 3xy + 4xy^2 \quad \text{の時に} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{と} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(2) \quad g(x, y, z) := x^3 \times e^{y^2+z^3+xy} \quad \text{の時に} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{と} \quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください。また，質問があれば，それもどうぞ。この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります。

レポート提出について：レポートは，

**11月9日（月）の 2:00 PM までに，
全学教育教務課のボックス（42番）に**

入れて下さい。 整理の都合上，用紙はA4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5だとなくなっても知らんぞ）。また，2枚以上にわたる場合は何らかの方法（ただし，クリップは不可）で綴じてください。

—————先週のレポートの略解—————

問3：

(1) 変数分離形なので

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 3dx \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{y} = 3x + C$$

が一般解。初期条件にあうように C を決めると $C = -1/2$

$$-\frac{1}{y} = 3x - \frac{1}{2} \quad \text{つまり} \quad y(x) = \frac{2}{1-6x}$$

が答え。

（別解）変数分離型の公式そのもので

$$\int_2^y \frac{1}{s^2} ds = \int_0^x 3dt \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{y} + \frac{1}{2} = 3x$$

を満たす y が答え。

(2)

$$\int \frac{1}{y} dy = \int (-2x) dx \quad \Longrightarrow \quad \log y = -x^2 + C \quad \Longrightarrow \quad y = C' e^{-x^2}$$

が一般解。初期条件から定数を決めると $C' = 2e$ となるので，

$$y(x) = 2e^{-x^2+1}$$

が答え。

(3) 積分がちょっとだけ厄介だが，同じ方法でできる．

$$\int \frac{1}{y(1-y)} dy = \int 2dx \quad \Rightarrow \quad \log\left(\frac{y}{1-y}\right) = 2x + C \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{1-y} = C'e^{2x}$$

を満たす y が一般解 (C' は定数)．これを y について解いて

$$y(x) = \frac{C'e^{2x}}{1 + C'e^{2x}} \quad (C' \text{ は任意の定数}) \quad (*)$$

が答え．

この問題，定数 C の取り方などによって，いろいろな書き方がある．例えば， C' を $-C''$ と書けば

$$y(x) = \frac{-C''e^{2x}}{1 - C''e^{2x}} = \frac{C''e^{2x}}{C''e^{2x} - 1} \quad (**)$$

となる．また， e^{2x} で分母子を割れば，

$$y(x) = \frac{C'}{e^{-2x} + C'} = \frac{1}{1 + C''e^{-2x}} \quad (***)$$

などとも書ける．

なお，上に書きたいいろいろな表式は完全には同値でない．例えば，(*) において $C' = 0$ と取れば $y(x) \equiv 0$ という解が表現できるが，(***) において C'' を何にとっても， $y \equiv 0$ は表せない．従って，厳密には (***) は不正解で， $y \equiv 0$ の解もあることを別記すべきである．同様に， $y \equiv 1$ という解は (*) では表せないが，(***) では表せている．

しかし，これらの問題は $C'' = \pm\infty$ や $C' = \pm\infty$ を形式的に許せば解決する．本来，このように実用上は，微分方程式の一般解に出てくる定数は無限大まで含めて考えると良い場合が多い．

(注意) 上での定数 C は元々 $C' = e^C$ として出て来たものであり，これは正ではないのか？という疑問を持った人もいるかもしれない．当然の疑問ではあるのだが，実は C は実数でなくても，一般の複素数で良い．従って， $C' = e^C$ も一般の複素数になってしまうので，定数 C' についての制限を書いていないのである．ただし，このような議論を正当化するには，「複素数を引数に持つ指数関数」などをきちんと考える必要があり，この講義ではあまり立ち入らない．

上に書いたような事情から，この講義では積分定数の範囲や特殊な解についてはあまりこだわらないことにする．試験に微分方程式を出す場合には，初期条件付きで出題する予定だ．

11月11日：今日は偏微分の2回目，連鎖律です。

お知らせ：中間試験の日はまだ確定していませんが，いまのところ，12/9（水）に行く可能性が高いです。確定したら，またお知らせします。

第5回レポート問題：今回は偏微分の問題です。

問5：

$$f(x, y) := \sin(x^2 + xy), \quad x(u, v) = u^3 + v^2, \quad y(u, v) = uv$$

と定義して，合成関数 $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ を考える。このときに偏微分 $\frac{\partial g}{\partial u}$ と $\frac{\partial g}{\partial v}$ を計算せよ。闇雲にやってもできますが，できれば連鎖律の練習問題としてやってほしい。（その方が間違いも少ないはず。）

問6：2変数の関数 $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ を考える。また変数 x, y と変数 r, θ は平面の曲座標の関係，つまり $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を満たしているものとする。このとき，合成関数 $h(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$ の，変数 r と θ に関する一次偏導関数をそれぞれ計算せよ。結果にはもちろん， $\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}$ などの偏微分が登場するだろう。

なお，微分できない点があるかもしれないが，今はそれは無視して良い。つまり，微分できる点で偏導関数を求めればよい。

（ヒント）合成関数の微分法（連鎖率）を用いて計算することをまずはやってほしいが， h を r, θ の関数として具体的に書き下してから偏微分してもできる。余力のある人は，両方やってみることをお奨めしたい。

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください。また，質問があれば，それもどうぞ。この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります。

レポート提出について：レポートは，

11月16日（月）の2:00 PMまでに，

全学教育教務課のボックス（42番）に

入れて下さい。整理の都合上，用紙はA4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5だとなくなっても知らんぞ）。また，2枚以上にわたる場合は何らかの方法（ただし，クリップは不可）で綴じてください。

————— 先週のレポートの略解 —————

問4：単に微分するだけで，何のひねりもありませんが，数人の人が間違っていました。なお，問題の(2)では $g(x, y)$ を与えているので，求めてほしかったのは $\frac{\partial g}{\partial x}$ と $\frac{\partial g}{\partial y}$ です。厳密にいうと，(2)の問題は出題ミスでした。申し訳ありません。（指摘してくれた人，どうもありがとう。）

(1)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y + 4y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 8xy$$

(2)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 e^{y^2+z^3+xy} + x^3 e^{y^2+z^3+xy} y = (3x^2 + x^3 y) e^{y^2+z^3+xy}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x^3 e^{y^2+z^3+xy} (3z^2) = 3x^3 z^2 e^{y^2+z^3+xy}.$$

11月25日：今日は偏微分の3回目、連鎖律の続きです。

お知らせ：中間試験はほぼ間違いなく、12/9（水）に行うと思います。範囲は今学期にやったところ全部（積分の応用、微分方程式、偏微分の前半）です。（12/2訂正追記：広義積分も範囲に入ります。）

先週のレポートの略解

問5： 連鎖律を使いましょう。

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(u, v)}{\partial u} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \cos(x^2 + xy) \times (2x + y) \times 3u^2 + \cos(x^2 + xy) \times x \times v \\ &= \cos(x^2 + xy) \times \{(2x + y) 3u^2 + xv\} \quad \text{ここで } x = u^3 + v^2, \quad y = uv\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(u, v)}{\partial v} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \cos(x^2 + xy) \times (2x + y) \times 2v + \cos(x^2 + xy) \times x \times u \\ &= \cos(x^2 + xy) \times \{(2x + y) 2v + xu\} \quad \text{ここで } x = u^3 + v^2, \quad y = uv\end{aligned}$$

上の答え、本当は x, y の中に「ここで...」の中身を代入すべきなのですが、あまりに大変になるので、このままにしておきました。試験の結果も、このように止めておいても正解ですし、将来、このような式を実際にコンピューター上で使う場合など、 x, y などでもとめた形にしておいた方が間違いもなくて便利でもあります。

問6： すみません。またもや出題ミスがありました。本当に申し訳ないです。問題文中で $\frac{\partial x}{\partial u}$ や $\frac{\partial y}{\partial u}$ とあるのは、 $\frac{\partial x}{\partial r}$ や $\frac{\partial y}{\partial r}$ の間違いです。

ともかく連鎖律を使いましょう。そのために、 f の x, y による偏微分を計算しておくとして、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{2} xy(x^2 + y^2)^{-3/2} 2x = y^3(x^2 + y^2)^{-3/2} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= x^3(x^2 + y^2)^{-3/2}\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta\end{aligned}$$

である。従って、連鎖律から

$$\frac{\partial h(r, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = y^3(x^2 + y^2)^{-3/2} \cos \theta + x^3(x^2 + y^2)^{-3/2} \sin \theta = \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(r, \theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -y^3(x^2 + y^2)^{-3/2} r \sin \theta + x^3(x^2 + y^2)^{-3/2} r \cos \theta \\ &= r(\cos^4 \theta - \sin^4 \theta) = r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = r \cos(2\theta)\end{aligned}$$

(別解) $h(r, \theta)$ を具体的に書いてみると

$$h(r, \theta) = \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{r^2}} = \frac{r}{2} \sin(2\theta)$$

となって、まあ、簡単なのだった。という訳で、普通に偏微分して

$$\frac{\partial h(r, \theta)}{\partial r} = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

$$\frac{\partial h(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{r}{2} \cos(2\theta) \times 2 = r \cos(2\theta)$$

となる。

12月2日：今日はテイラー展開です。

お知らせ：中間試験は、12/9（水）に行います。思います。

範囲は今学期にやったところ全部（広義積分，積分の応用，微分方程式，偏微分の前半—テイラー展開まで）です。

先週配ったプリントには「広義積分」が抜けていました。申し訳ありません。**広義積分も立派な試験範囲です。**

12月16日：今日は2変数関数の極大・極小です。ノートがまだ未完成なのですが、明日の晩までには僕の web page にあげておきます。

中間試験の解答を打ち込む時間がありませんでした（徹夜で採点してやっと採点が終わったところ）。これも明日の夜までに打ち込んで僕の web page にあげておきますから、各自で復習して下さい。

第6回レポート問題：今回は極大・極小問題です。

問7：以下の関数 $f(x, y), g(x, y)$ の極大点・極小点と、そこでの f, g の値をそれぞれ求めよ。

$$f(x, y) := x^3 - 3xy + y^3, \quad g(x, y) := xy(x^2 + y^2 - 1)$$

もちろん典型的な解法は、(1)一階の偏微分から「極値をとる点の候補」を求め、(2)その候補の点で本当に極値になっているかどうかをヘシアンによって判定する、ということになる。

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ、わかりにくかったところ、講義への要望などがあれば自由に書いてください。また、質問があれば、それもどうぞ。この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから、次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります。

レポート提出について：レポートは、

**2010年1月12日（火）の2:00 PMまでに、
全学教育教務課のボックス（42番）に**

入れて下さい。 整理の都合上、用紙はA4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5だとなくなっても知らんぞ）。また、2枚以上にわたる場合は何らかの方法（ただし、クリップは不可）で綴じてくだされ。

2010年1月13日：今日は多変数関数の極大・極小の続きと陰関数定理です。

注意：極大，極小問題を扱う場合には， x, y などの引数はすべて実数と思ってよろしい。

重要な相談：来週 (1/20) の3限に補講を入れます。場所は 2207 です。

第7回レポート問題：今回は3変数の極大・極小問題です。計算がちよつと大変でしょうが，線型代数の問題だと思ってやってみましょう。

問8：関数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - zx - z$ の極大点・極小点と，そこでの f の値を求めよ。

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください。また，質問があれば，それもどうぞ。この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります。

レポート提出について：レポートは，

**2010年1月18日(月)の2:00 PMまでに，
全学教育教務課のボックス(42番)に**

入れて下さい。 整理の都合上，用紙はA4(この用紙と同じ大きさ)を使ってください(B5だとなくなっても知らんぞ)。また，2枚以上にわたる場合は何らかの方法(ただし，クリップは不可)で綴じてください。

—————先週のレポートの略解—————

問7：ともかく手順通りに計算して行きます。 $f(x, y)$ から始めます。

(1) 極値の候補点を求める。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 3(x^2 - y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 - x)$$

なので，この2つの偏微分がゼロになるところは

$$x^2 = y \quad \text{かつ} \quad y^2 = x$$

の解である。これは例えば y を消去して解いてみると， x が $x = x^4$ ，つまり $x(x-1)(x^2+x+1) = 0$ の実数解(つまり $x = 0, 1$) として求まる。この結果から y を求めて整理すると，極値点の候補は

$$(0, 0) \quad (1, 1)$$

の2つあることがわかる。

(2) 極値点の候補のそれぞれが本当に極値かどうかを判定する。

この関数の x, y におけるヘシアンは $36xy - 9$ である。そこで，

- 候補 $(0, 0)$ ではヘシアンの値は $-9 < 0$ 。よってここは鞍点であり，極大でも極小でもない。
- 候補 $(1, 1)$ ではヘシアンの値は $+27 > 0$ 。よってここは必ず極大または極小になっている。ここが極大か極小かを判定するために $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$ の値を見ると，これは $6 > 0$ 。よって， $(1, 1)$ では極小である。またここでの f の値は $f(1, 1) = -1$ である。

以上まとめると f の極値点は $(1, 1)$ ひとつだけで，そこでの f の値は -1 である。

次に g に進もう。

(1) 極値の候補点を求める.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2y + y^3 - y, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x^3 + 3xy^2 - x$$

なので, この2つの偏微分がゼロになるところは

$$y(3x^2 + y^2 - 1) = 0 \quad \text{かつ} \quad x(x^2 + 3y^2 - 1) = 0$$

の解である. これを解くのはちょっと厄介だが, 例えば, $x = 0$ の場合と $x \neq 0$ の場合でまず場合分けをし, 次にそれぞれを $y = 0$ と $y \neq 0$ で場合分けして落ち着いてやれば必ず解ける. 極値の候補は

$$(0, 0), \quad (\pm 1, 0), \quad (0, \pm 1), \quad \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right)$$

とわかる (上では複合は任意).

(2) 極値点の候補のそれぞれが本当に極値かどうかを判定する.

この函数の x, y におけるヘシアンは

$$(6xy)^2 - (3x^2 + 3y^2 - 1)^2 = -\{1 - 3(x+y)^2\}\{1 - 3(x-y)^2\}$$

である. (1) で求めた全ての候補点で上のヘシアンを計算する. たくさんあって大変だが, まあ, 仕方ない.

- 候補 $(0, 0)$ ではヘシアンの値は $-1 < 0$. よってここは鞍点であり, 極大でも極小でもない.
- 候補 $(0, \pm 1)$ と $(\pm 1, 0)$ ではヘシアンの値は $-4 < 0$. よってここは鞍点であり, 極大でも極小でもない.
- 候補 $\left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\right)$ でのヘシアンの値は $2 > 0$. よってここは必ず極大または極小になっている. ここが極大か極小かを判定するために $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy$ の値を見ると,

– 候補 $\pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ での値は $3/2 > 0$. よって, ここでは極小であり, そのときの g の値は $-\frac{1}{8}$ である.

– 候補 $\pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ での値は $-3/2 < 0$. よって, ここでは極大であり, そのときの g の値は $\frac{1}{8}$ である.

以上まとめると g の極大点は $\pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ で, そこでの g の値は $\frac{1}{8}$ である. また, g の極小点は $\pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ で, そこでの g の値は $-\frac{1}{8}$ である.

(注意) この問題では f, g ともに x, y について対称である (x と y を取り替えても同じ値になる). このような場合, (x_0, y_0) が極小点なら, (y_0, x_0) も極小点である (理由は各自で考えること).

このような対称性は実際に以下の (少なくとも) 2つの面で役に立つ:

- 極値点を (人力でなく計算機で) 探す場合, 対称性があれば, 探索領域を半分にすることができる. 例えば, $x \geq y$ のところだけを探して, 出て来た答えで x, y を入れ替えれば $x < y$ の場合の解もわかる.
- 逆に x, y の取り替えについて不変な答えが出ることを検算に利用することもできる.

2010年1月20日：今日は陰関数定理の続きと条件付き極値問題、および級数の初歩です。

第8回レポート問題：今回は条件付き極大・極小問題です。

問9： 点 (x, y) が曲線 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 上を動くとき (x, y は可能なすべての実数の値をとる), 積 xy の極値を求めよ。

(注意) この問題は、今日説明する「ラグランジュの未定乗数法」を用いて解いてみるのが望ましい。その場合、極値を取る点の候補は簡単に求められる訳だが、その候補で実際に極値になっているかどうかの判定は、そこそこ工夫を要するかもしれない。ともかく、極値を取る点の候補だけでも求めてみて下さい。

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ、わかりにくかったところ、講義への要望などがあれば自由に書いてください。また、質問があれば、それもどうぞ。この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから、次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります。

レポート提出について：レポートは、

**2010年1月25日(月)の2:00 PMまでに、
全学教育教務課のボックス(42番)に**

入れて下さい。 整理の都合上、用紙はA4(この用紙と同じ大きさ)を使ってください(B5だとなくなっても知らんぞ)。また、2枚以上にわたる場合は何らかの方法(ただし、クリップは不可)で綴じてください。

—————先週のレポートの略解—————

実のところ、 f が二次式なので、「平方完成」をくり返して判定できます。ですが、ここでは二次式でない場合でも使える、教科書的な方法でやっておきます。

まず、極値点の候補は f の x, y, z による偏微分をそれぞれゼロとおいた

$$2x - y - z = 0, \quad 2y - x = 0 \quad 2z - x - 1 = 0$$

の解である。これを解くと、極値点の候補の座標が

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

と求まる。次に

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} =$$

からヘッセ行列が

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

と求められる。この行列の固有値を求めよう。

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2)$$

なので、固有値は $\lambda = 2, 2 \pm \sqrt{2}$ とわかる。これらは全て正だから、極値点の候補 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ においては、関数 f は極小である。また、そこでの f の値は $-\frac{3}{8}$ である。

(注) 関数 f は x, y, z の二次式であるから、関数 f はその極値点で最小になっている。

2010年1月27日：最終回です。ベキ級数の基礎をやります。
 期末試験は教務課の発表通りの日時、場所で行います。

- 範囲は「今学期にやったところ全部」，より具体的には「広義積分」「積分の応用」「簡単な微分方程式」「偏微分」「級数」です。
- 「偏微分」では特に「偏微分の計算」「連鎖律」「極大極小問題」「テイラーの定理」などが重要でしょう。
- ただし，3変数以上の関数の極大極小や条件付き極値問題は出題しません。
- 「級数」に関しては「以下の級数が収束するか否かを判定せよ」「以下のベキ級数の収束半径を求めよ」などの簡単な問題を出す可能性があります。

以上がおおまかな出題範囲ですが，この講義は春学期からの続きですから，春にやった重要なことは前提にします。例えば，(出題するかどうか全く決めてはいませんが) 1変数関数のテイラー展開なども出る可能性はゼロではありません(級数もやったところですからね)。また逆に，上に挙げた項目でも，問題数の観点から出題できないものもあると思います。

最終回なので，レポート問題はありません。ただし，級数に関しては，

- 級数が収束するか発散するかの判定について，教科書の例 4.1.14, 例 4.1.17 および p.149 の問題 1 と問題 2
- 級数の収束半径について，教科書の例 4.2.6, 例 4.2.8, p.162 の問題 1

などに目を通して置いて下さい。

先週のレポートの略解

ともかくやりましょう。ラグランジュの未定乗数法を使うため，

$$h = xy - \lambda(x^3 + y^3 - 3xy)$$

として， x, y, λ に関する偏微分をゼロとおいてみると，

$$y - 3\lambda(x^2 - y) = 0, \quad x - 3\lambda(y^2 - x) = 0, \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

となる。これを解く。最初に第一式と第二式を引くと

$$\{1 + 3\lambda + 3\lambda(x + y)\}(x - y) = 0$$

を得る。 $x \neq y$ なら上の中括弧の中がゼロだが，この場合には解が存在しない。結局，極値点の候補には $x = y$ の時の

$$x = y = \frac{3}{2} \quad \text{または} \quad x = y = 0$$

の2つの場合があるとわかる。

このそれぞれが本当に極値かどうかを調べよう。実のところ，極値かどうかは後の(注)で説明するように簡単に判定できるのであるが，まずはそのような「飛び道具」を使わなくてもよい，万能の方法を説明する。

$x = y = 0$ では？

$x = y = 0$ では $xy = 0$ であるから， $x = y = 0$ の近傍で xy の符号が一定か否かを調べれば，極値かどうか分かる。

さて， $x = y = 0$ の近傍で $x^3 + y^3 = 3xy$ をみたすような x, y を考えたいのだが， x, y を同じくらいのオーダーにとることは不可能である(なぜなら，左辺は x, y の3乗，右辺は2乗)。可能なのは， $y \approx cx^2$ または $x \approx cy^2$ のようなものである。

前者の場合、 $x^3 \approx 3xy = 3cx^3$ となることから、 $c = 1/3$. つまり、 $y \approx x^2/3$ となる. 後者の場合は $x \approx y^2/3$ となる.

これらの場合、前者なら $xy \approx x^3/3$, 後者なら $xy \approx y^3/3$ であって、いずれの場合も定符号にはならない. つまり、 $x = y = 0$ は極値点ではない.

$x = y = 3/2$ では?

$x = y = 3/2$ の近傍での xy を調べたいので、 $x = s + 3/2$, $y = t + 3/2$ とおいてみよう.

$$xy = \frac{9}{4} + \frac{3}{2}(s+t) + st \quad (*)$$

である.

一方、 xy の満たす式 $x^3 + y^3 = 3xy$ は s, t で表すと

$$\frac{9}{4}(s+t) + \frac{9}{2}(s^2+t^2) - st + s^3 + t^3 = 0 \quad (**)$$

となる. これはなかなか扱いにくいから、まず、大雑把な様子をつかむために、 s, t の一次だけを見てみると、

$$s + t \approx 0$$

となる. つまり、 $x = y = 3/2$ の近傍では、 x, y は傾き -1 の直線に接する形で動いている訳だ. これは特に、 s, t が大体同じ大きさであることを意味する.

従って、もう少し精度を上げるには、(**) で s, t の 2 次まで見れば良い¹

$$\frac{9}{4}(s+t) + \frac{9}{2}(s^2+t^2) - st \approx 0 \quad \implies \quad s+t \approx -2(s^2+t^2) + \frac{4}{9}st$$

これを (*) に代入して、 s, t の 2 次まで正しい式として (急いでやったので、以下の係数はちよつと間違ってるかも)

$$xy \approx \frac{9}{4} - 3(s^2+t^2) + \frac{5}{3}st = \frac{9}{4} - 3(s+t)^2 + \frac{23}{3}st = \frac{9}{4} + O(s^4) - \frac{23}{3}s^2 + O(s^3, t^3)$$

となる (最後のところでは、(**) を参照して $s+t$ が s, t の 2 次であることを用いた). この表式は $-\frac{23}{3}s^2$ のために、 $s = t = 0$ の近傍では $\frac{9}{4}$ よりも小さい (もちろん、 $s = t = 0$ の場合を除く). つまり、 $s = t = 0$ は極大になっており、もとの x, y に戻ると、 $x = y = \frac{3}{2}$ は極大点であるとわかる. なお、この点での値は $xy = \frac{9}{4}$ である.

(注) 陰関数定理により、考えている条件 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ は x, y 平面での滑らかな曲線を表すはずである. 従って、 xy はこの曲線上で最大、最小を持つ (ただし、最大、最小には $\pm\infty$ も含めて考える).

そこで、 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ がどのような曲線を表すかがわかれば、極値の候補点が本当の極値であるかどうか、かなり簡単に判定できる. 答えを言ってしまうと、これはデカルトの葉形と言われる図形で、教科書 p.197 に図が載っている.

これを見ると、この曲線は $x = y = 0$ の近傍で第一、第二、第四象限に存在している. xy は第二、第四象限では負、第一象限では正なので、 $x = y = 0$ では極大でも極小でもない.

一方、 $x = y = 3/2$ はこの曲線が第一象限に一番飛び出した部分である. 第一象限では xy は正で、かつ x, y の範囲は限られているから、 xy は第一象限で最大値を持つはずである. 極値点の候補が一つしかないから、この最大値は極値点の候補 $x = y = 3/2$ で実現されるしかない. つまり、 $x = y = 3/2$ では xy は極大、かつ最大である.

¹(**) では 1 次まで、つまり $s+t=0$ まで見て、(*) では 2 次まで見るのは不十分である. (**) での 2 次の補正が (*) に入ってくるかもしれないから. 実際、以下で見るように、 s^2 の係数が補正によって変わってくる