1 極限と連続性

1.1 数列の極限：ϵ-N 論法[1]

（理学・工学系（特に理論系）の人が将来，必要とする程度の，最低限の微積分の基礎，特に極限の概念についてまとめました．このくらいは一度は勉強しておいても悪くはないはず.）

まずは数列の極限を考える．数列の方が関数より簡単なはずだから，まずここで数列の極限（ϵ-N 論法）に慣れようという狙いである．

皆さんは高校で $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ という式の意味を習ったはずだ．多分，

n が限りなく大きくなるとき，a_n が限りなく α に近づく

などという「定義」を聞いたのではないか？この定義は特に間違ってはいないし，これで十分な場合はこれでやれば良い．しかし，この言い方は以下の理由で困ったものである．

- まず,「限りなく近づく」「限りなく大きく」には「限りなく」という感覚的な言葉が入っていて，あやふやだ.
- 次に,「近づく」「大きくなる」などの「動き」が何となく入っており，考えにくい.
- もっと困ったことに，この言い方には「どのくらい速く極限に収束するのか」の**収束の速さ**に関する言及が全くない．そのため，少しややこしい極限 —— 特に２つ以上の変数が混ざった極限[2]—— を考えだすと，お手上げになる．２つ以上の変数が現れていないけど困ってしまう例としては，

  （問） $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ のとき，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ の極限を求めよ

  がある．この答えは直感的には 0 だろうという気はするだろうが，証明できますか？(この答えは後の命題 1.1.7 である）.

これらの欠点を克服すべく，極限への収束の速さまで含めた，定量的な定義が考えられた．これが ϵ-N 論法で，以下のように書かれる．

定義 1.1.1 数列 a_n と実数 α に対して，<u>数列 a_n が $n\to\infty$ で α に収束する</u>，つまり $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ というのは，以下の（ア）が成り立つことと定義する：

（ア）任意の（どんなに小さい）正の数 ϵ に対しても，適当な（大きい）実数 $N(\epsilon)$ を見つけて，

$$\text{すべての } n > N(\epsilon) \text{ で，} \quad \bigl|a_n - \alpha\bigr| < \epsilon \quad \text{とできる．} \tag{1.1.1}$$

（ア）は以下のように言っても良い．

（アの言い換え）任意の（どんなに小さい）正の数 ϵ に対しても，

$$\text{すべての } n > N(\epsilon) \text{ で，} \quad \bigl|a_n - \alpha\bigr| < \epsilon \quad \text{が満たされる} \tag{1.1.2}$$

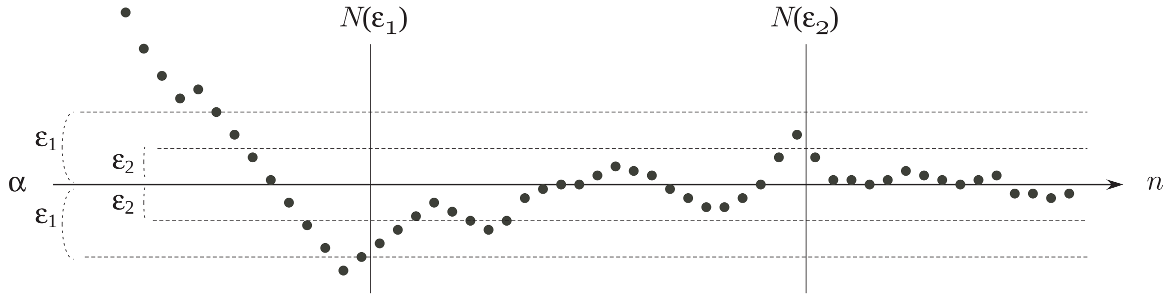
ような（十分に大きい）実数 $N(\epsilon)$ が存在する．

（ア）は数式では以下のように書く（これは数学科の講義ではないので，この書き方は以下では使わない)：

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \qquad \Bigl(n > N(\epsilon) \implies \bigl|a_n - \alpha\bigr| < \epsilon \Bigr) \tag{1.1.3}$$

[1]教科書の 2.1 節前半

[2]俺はそんなもん考えたくないわ，と思った人は考えを改めよう．皆さんが高校でやってきたはずの「定積分」の存在を証明するだけでも，このような極限の問題が生じるので，この講義のメインテーマに直結してるのです．



少し補足説明：

- 上の定義の中で，括弧の中の（大きな）（小さな）はココロを述べたものである．これらは通常は省略されるが，慣れないうちは心の中で補うべきだ．
- $N(\epsilon)$ と書いたのは，「この N は ϵ によって決まる数なんだよ」と ϵ-依存性を強調するためである．
- (1.1.3) には２つの不等式 $n > N(\epsilon)$，$\left|a_n - \alpha\right| < \epsilon$ が現れている．ここはどちらも（または片方を）$n \geq N(\epsilon)$ や $\left|a_n - \alpha\right| \leq \epsilon$（等号入り）に変えても，定義の意味する事は同じである（なぜ同じなのかは重要だから，各自で十分に納得せよ）．この講義では主に等号なしのバージョンを用いるが，証明の流れによっては等号入りのものを断りなく使うこともあるので，注意されたい．
- 通常は $N(\epsilon)$ を整数にとる事が多い．しかし，これは整数でなくても困らない上に，整数だとすると具体例の計算がややこしくなる．そこでこの講義では整数でない $N(\epsilon)$ を許すことにした．(気になる人は，後で充分に慣れてから，整数の $N(\epsilon)$ を使えば良い.)

この定義の最大の眼目は，極限という無限（ゼロ）の世界を扱っているのに，**ゼロでも無限でもない，有限の ϵ や N しか登場しない**点にある．有限のものなら（落ち着けば）我々は扱えるから，これは大きな利点だ．ただし，有限の ϵ や N を一つだけ考えても，これでは「極限」にならないのは明らかだ．そこで，上の定義では**その ϵ をいくらでも小さく選ぶ**ようにして，「どんどん大きくなる」「どんどん近づく」を表現している（以下で詳しく説明）．

細かい話に入る前に，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ なども厳密に定義しておく：

定義 1.1.2 数列 a_n に対して，<u>数列 a_n の $n \to \infty$ の極限がプラス無限大である</u>，つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ というのは，以下の（ア′）が成り立つことと定義する：

（ア′）任意の（どんなに大きい）正の数 M に対しても，適当な（大きい）実数 $N(M)$ を見つけて，

$$\text{すべての } n > N(M) \text{ で，} \quad a_n > M \quad \text{とできる．} \tag{1.1.4}$$

（注）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ や $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ の場合は $\{a_n\}$ が <u>収束するとは言わない</u>．ただし，上のように「極限が無限大である」などとはいう．

1.1.1 少しでも理解を助けるために

上の定義 1.1.1 の意味するところは，<u>自分でいろいろな例を作って納得するしかない</u>．でも，理解を助けるために，少しだけ書いておこう．

1.「いくらでも大きくなる」（無限大になる）の表現. まず,「無限大」（一番大きい数）などは存在しない，ことを再確認しよう．なぜなら，一番大きい数があったとしても，それに 1 を足したらもっと大きくなるから．だから,「n が無限大」とは「n がどんどん大きくなる状態」ととらえるしかない．これを有限の量のみを用いて表した結果が，**「どんなに大きな N をとってきても，そのうちに n が N より大きくなる」**という表現だ．

この表現には有限の N しか出てこない．けども，この N は好きなように大きなものを持ってこれる．$N = 10^4$ ならどうだ？ $N = 10^{10}$ ならどうだ？ $N = 10^{100}$ なら？ ... <u>いくらでも大きな N を考える</u>ことで実質的に「n がいくらでも大きくなる」ことを表現していることを噛み締めよう．

2.「いくらでも近づく」の表現. 数列 $a_n = 1/n$ はいつでも正（ゼロではない）だが，極限はゼロになる．このように,「その極限に（$n \to \infty$ で）いくらでも近づく」けれども「その極限には（有限の n では）等しくなれない」ものの表現にも注意が必要だ．ここも「n が無限大」と同様に，有限の量のみを用いて表したい．それを実現するのが，**「どんなに小さな $\epsilon > 0$ をとってきても,（n が大きくなっていくと，そのうちには）$|a_n - \alpha|$ が ϵ より小さくなる」**という表現だ.

ここにも有限，かつ正の ϵ しか登場しないが，この ϵ はこちらでいくらでも小さくとって行くのだ．$\epsilon = 10^{-6}$ より小さいか？ $\epsilon = 10^{-14}$ よりも小さいか？ $\epsilon = 10^{-200}$ なら？ … 「N が無限大」と同じく，ここでも勝手にとってきた（どんなに小さくても良い）ϵ を考えることで，実質的に「$|a_n - \alpha|$ がいくらでも小さくなる」ことを表現していることを噛み締めてほしい.

3．N と ϵ のかけあい さて，上の２つが非常にうまくむすびついて，いわば「掛け合い漫才」のように[3] なっていることをよくよく理解しよう.

a_n が α に近づくかどうかは，その距離 $|a_n - \alpha|$ で測っている．この距離は n を十分に大きくしない限りゼロに近づかない（ことが多い —— 上の $a_n = 1/n$ の例を思い出せ）．そこで，本当にゼロに行くかどうか判定するために，

「$\epsilon = 0.0001$ になれるか？」「$n > 100$ なら大丈夫」 （つまり，$n > 100$ なら $|a_n - \alpha| < 0.0001$）
「$\epsilon = 10^{-6}$ になれるか？」「$n > 20000$ としたら大丈夫」 （$n > 20000$ なら $|a_n - \alpha| < 10^{-6}$）
「$\epsilon = 10^{-12}$ ならどや？」「$n > 10^{20}$ で大丈夫」
「そしたら $\epsilon = 10^{-100}$ なら？」「それでも，$n > 10^{300}$ で大丈夫やで」

…

などといくらでも細かくしていけるかどうかを問うている訳だ．これがいくらでも小さい（つまり「任意の」）$\epsilon > 0$ でいけるのなら，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と言いましょう，というわけ.

逆に，上の問答がどこかで切れてしまうなら，例えば,

「$\epsilon = 10^{-300}$ でどうや？」「ううん，N をいくら大きくしても今度はアカン！」

となってしまったら，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とは言わないのだ.

4．N と ϵ の順序の問題 ϵ-N 論法で皆さんが戸惑う一つの理由は，N と ϵ の出てくる順番によると思われる．高校までの言い方は「n がどんどん大きくなると，a_n が α に近づく」または「n を大きくすると，$a_n - \alpha$ がゼロに近づく」というものだ．ϵ が $a_n - \alpha$ を表していたつもりだから，これは「$N \approx n$ が始めに出てきて，それから $\epsilon \approx |a_n - \alpha|$ が出る」構図である．ところが，ϵ-N 論法では順序が逆だ：「どんなに小さな ϵ に対しても適当な $N(\epsilon)$ があって」となっていて，ϵ が先，N が後.

この順序の逆転の理由は，以下のような例を考えるとわかるかもしれない．３つの数列を定義する（$n = 1, 2, 3, \ldots$)：

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{1}{\log(2 + \log(2 + \log n))}, \qquad c_n = \frac{1}{\log(2 + \log(2 + \log n))} + 10^{-8} \tag{1.1.5}$$

いくつかの n の値に対する，これらの数列の値を表にしてみると：

n	1	10	100	10^3	10^4	10^5	10^6	10^8	10^{16}
a_n	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-16}
b_n	1.00938	0.80577	0.73645	0.69834	0.67321	0.65494	0.64084	0.62006	0.57692
c_n	1.00938	0.80577	0.73645	0.69834	0.67321	0.65494	0.64084	0.62006	0.57692

a_n の方は順調にゼロに行ってるが（アタリマエ！），b_n と c_n は動きが非常にノロい！また，b_n はゼロに行き，c_n はゼロに行かないはずだが，それもここまでの n では違いが全くわからない.

この例からわかるのは「同じ n の値で比べると，数列によってはなかなかその極限の振る舞いが見えない」ということだ：a_n の方は $1/n$ だからまあまあ速くゼロに行くが，b_n は log が重なっている為に非常にゆっくりである．つまり,（アタリマエのことだが）考える数列に応じて，極限が見えやすいような大きな n をとってくる必要がある

[3]学習院大学物理学教室の田崎晴明氏の用語

わけだ．数列 c_n に至っては，初めは減っていくがそのうちに 10^{-8} に漸近して止まってしまう訳で，n を大きくしたら収束が見えると思ってるとそのうちに裏切られる．

ここで困った理由は，n の大きさを同じにして（n を先にとって）3つの数列を比べようとしたことにある．これを避けるためには，順序を逆転させて，N ではなくて ϵ を優先すれば良い．つまり，$|a_n - \alpha|$ が（勝手にとってきた，非常に小さい）ϵ より小さくなるかどうかを知りたいわけだから，**「ϵ を先に決めて，これに応じて n がどのくらい大きければ良いのか」**を（またはいくら大きい n でも $|a_n - \alpha|$ が ϵ より小さくなれないのかを）考えるのが良い．これが ϵ-N 論法がこの順序で掛け合い漫才になっている理由である．

1.1.2 いろいろな例と定義の応用

この定式化の威力を知ってもらうには，下の命題 1.1.7 が良い例になってくれるだろう．しかしその前に，単純な例で具体計算をやって定式化に慣れる事が必要だ．以下の例をすべてやることを奨める．

問題 1.1.3 以下の数列が $n \to \infty$ で何に収束するのか（しないのか），よくよく納得すること．その場合，$N(\epsilon)$ がどのようにとれるのかを明示することが大切だ（いうまでもなく，$n = 1, 2, 3, \ldots$ である）．

$$a_n = 3, \qquad b_n = \frac{1}{n}, \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad d_n = \frac{1}{n^2+1} \tag{1.1.6}$$

$$e_n = \begin{cases} 1 & (n \text{ が } 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, \ldots \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{上以外のとき}) \end{cases} \tag{1.1.7}$$

(1.1.5) の3つの数列も同様に考えてみよう．もう少し複雑な例も挙げておくから，考えてみよう（$n \to \infty$）：

$$f_n = \frac{n+3}{n}, \qquad g_n = \frac{\sin n}{n}, \qquad h_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad p_n = \frac{2n+1}{n+1}, \qquad q_n = \frac{1}{\log(n+1)} \tag{1.1.8}$$

具体的計算に少し慣れたら，以下のほとんどアタリマエに見える性質を ϵ-N を用いて証明しよう．

問題 1.1.4 極限に関する以下の性質を ϵ-N 論法を用いて厳密に証明せよ．

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき，$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ （$\beta \neq 0$）のとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ ．この問題では分母の b_n がゼロになるかどうか，少し気になるところだ．実際，ある m では $b_m = 0$ となるような数列 $\{b_n\}$ もあるのだが，それでもこの性質が成り立つと言えるだろうか？

問題 1.1.5 （論理に弱い人にはキツいだろうから，できなくてもがっかりしないこと）数列 $a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ は<u>ゼロには収束しない</u>．このことを収束の定義に従って証明せよ．(「収束する」ことの定義は知っているから，その否定命題を考えればよい.）なお，以下の問題 1.1.6 を使って「この数列は1に収束するからゼロには収束しない」という証明も可能だが，これではなく，直接証明すること．

問題 1.1.6 （気がつけば簡単だが，これも慣れないと苦労するかも.）数列 a_n が $n \to \infty$ で収束することがわかっている．収束先はただ一つであることを証明せよ．(収束先が2つあるとすると，つまり，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = \beta$ であるとすると，結局は $\alpha = \beta$ であることを証明せよ.）証明すべき結論はアタリマエと思えるだろうが，そのアタリマエが証明できるかが問題だ．

少しは ϵ-N 論法に慣れたかな？ではこの辺りで，この論法の威力を示す命題を紹介しよう．この節の冒頭でも出したものである．

命題 1.1.7 数列 a_n から $b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を定義する．$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば，$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ である．

この命題の証明を，各自で高校までの定式化で試みると良い —— きちんと証明するのは大変だぞ（もし，高校までの定式化でもできたという人は僕のところまで来て下さい．不可能とは言い切れないからね...）．でも ϵ-N を用いると簡単にできてしまう.（まあ，簡単とは言ったけど，これが自力でできたら，それは大したものだ.）

問題 1.1.8 （数列に関するチャレンジ問題）命題 1.1.7 は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

と主張している．そこで，右辺の「a_1 から a_n の平均」をより一般の加重平均にして，同様の結果が成り立つかどうかを考えよう（より詳しくは以下に説明）．まず，$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ を非負の数列として，

$$b_n := \Bigl(\sum_{j=1}^{n} \rho_j\, a_j\Bigr) \Big/ \Bigl(\sum_{j=1}^{n} \rho_j\Bigr)$$

を考える.「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば必ず $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる」ためには，$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ がどのような条件を満たしていれば良いか？できるだけ必要十分に近いものを考えてみよう.（命題 1.1.7 は $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \ldots = 1$ に相当している.）

1.2 関数の極限：ϵ-δ 論法[4]（ここは簡単に）

前節では数列の極限，つまり，n が無限大になったときに a_n がどうなるか，を見た．今度は関数の極限，つまり，x が連続変数で「x が a に近づくとき $f(x)$ はどうなるか」を見たい．考え方の基本は数列の場合と同じだから，少し簡単に行く．

定義 1.2.1 関数 $f(x)$ と実数 a, b に対して,「$f(x)$ が $x \to a$ で b に収束する，つまり $\lim_{x\to a} f(x) = b$」というのは，以下の（イ）が成り立つことと定義する：

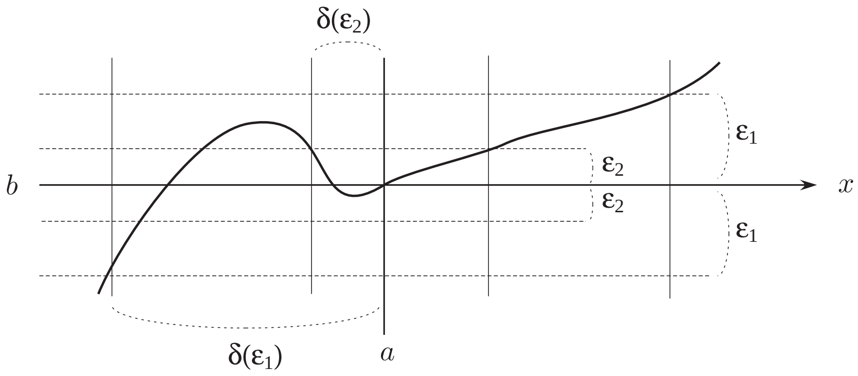
（イ）任意の（どんなに小さい）正の数 ϵ に対しても，適当な（小さな）実数 $\delta(\epsilon)$ を見つけて，

$$0 < |x-a| < \delta(\epsilon) \text{ なるすべての } x \text{ で，} \quad \bigl|f(x) - b\bigr| < \epsilon \quad \text{とできる．} \tag{1.2.1}$$

（イ）は数式では以下のように書かれる（以下では使わない．将来の参考までに)：

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists\delta(\epsilon) > 0 \qquad \Bigl(0 < |x-a| < \delta(\epsilon) \implies \bigl|f(x) - b\bigr| < \epsilon\Bigr) \tag{1.2.2}$$

（注）上の定義には $|x-a| > 0$ の条件がついている．つまり，$x = a$ で何がおこっていようと，たとえ関数 $f(x)$ そのものが a で定義されなくとも，また $f(a) \neq b$ であっても，我々は気にしないのだ.（もちろん，$f(a) = b$ でも文句はないが.）なぜ $x \neq a$ としているかの理由は,「関数の連続性」の定義を考えると理解できるのだが.



[4]教科書の 2.1 節なかほど

注意： ϵ-N の時と同じく，上の２つの不等式 $0 < |x-a| < \delta(\epsilon)$，$\bigl|f(x)-b\bigr| < \epsilon$ は，等号入りの $0 < |x-a| \le \delta(\epsilon)$，$\bigl|f(x)-b\bigr| \le \epsilon$ に変えても同じである（ただし，$0 < |x-a|$ の方は等号入りにしてはいけない，というのは上で注意した）．この講義では主に等号なしバージョンを用いるが，等号入りのものを断りなく使うこともあるので，また他の本では等号入りを用いていることもあるので，注意されたい．

この定義にも ϵ-N 論法の時と同じ注意が当てはまる．簡単に繰り返すと

- 極限を考えているのに，ともに 正で有限 の ϵ, δ しか定義に現れないところがミソである．
- ϵ, δ をどんなに小さくとっても良いという掛け合い漫才によって，「x が a に近づく」ときに「$f(x)$ が b にいくらでも近づく」ことを表現しているのは，ϵ-N 論法と同じである．
- ϵ が先，δ が後になってる理由も ϵ-N 論法と同じだ．考えている関数によっては α への収束が非常に遅いこともあるから，そのような場合も扱うには「$|f(x)-b| < \epsilon$ を実現するような $\delta(\epsilon)$ は何か（どのくらい小さい必要があるか)」を考える方が効率が良い．

ここも，いろいろな例をやることで感覚を身につけよう．

問題 1.2.2 以下の極限を，定義に従って求めよ（極限は存在しないかもしれないよ）．極限が存在する場合は，$\delta(\epsilon)$ をどのようにとれば良いのか，明記する事．

$$1)\ \lim_{x\to 0} x, \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\Bigl(x^2-2x+3\Bigr), \qquad 3)\ \lim_{x\to 1}\Bigl(x^2-2x+3\Bigr). \tag{1.2.3}$$

もうちょっとひねった例（$a > 0$ は定数)：

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}, \qquad 5)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}, \qquad 6)\ \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}, \tag{1.2.4}$$

$$7)\ \lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a} \qquad 8)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \qquad 9)\ \lim_{x\to 0}\sqrt{|x|} \tag{1.2.5}$$

問題 1.2.3 $f(x)$ を以下のように定めるとき，極限 $\lim_{x\to 0} f(x)$ は存在するか？存在するならその値と収束証明を，存在しないならその理由（収束しないことの証明）を ϵ-δ 論法の定義に基づいて述べよ．

$$f(x) := \begin{cases} 0.001 & (x = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, \dots) \\ x & (\text{上以外のとき}) \end{cases}$$

問題 1.2.4 $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ かつ $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ の時，$\lim_{x\to a}\bigl\{f(x)+g(x)\bigr\} = \alpha+\beta$ と $\lim_{x\to a}\bigl\{f(x)g(x)\bigr\} = \alpha\beta$ が成り立つ．これらを ϵ-δ 論法によって証明せよ．

（なお，教科書ではこの後に連続函数の定義が載っているが，これは少し後で「中間値の定理」とからめて取り扱う.）

1.3 実数の連続性の公理[5]

「実数の連続性」は，その意義をつかみにくいと思われるので，簡単にすませる．なお，これでもまだわからない，と言う人は，以下の 1.4 節に跳んでもまあ，良い．以下では断らない限り，「数列」とは実数列（実数でできた数列）の意味である．

実数と有理数との一番の違いは，以下の公理が満たされるか満たされないかにある．公理を述べるためにまず，補助概念を導入する．

定義 1.3.1 (部分列) 無限数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ が与えられた時，この数列から（順序を変えずに）一部分を取り出して作った無限数列を数列 $\{a_n\}$ の 部分列 という．

[5] 教科書の 2.2 節前半

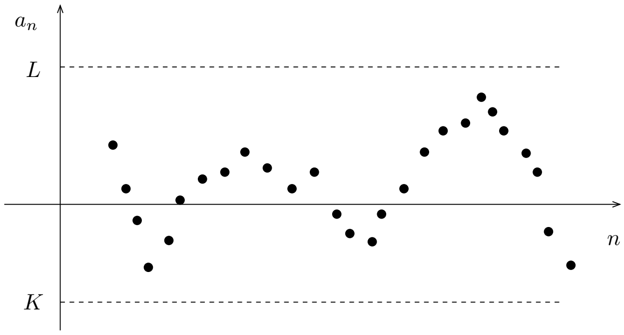
お約束として，$\{a_n\}$ は $\{a_n\}$ それ自身の部分列とみなす．

（例）数列 $1, 2, 3, 4, 5, 6, ...$ の部分列の例としては $1, 3, 5, 7, 9, ...$ とか，$1, 4, 9, 16, 25, ...$ とか $1, 2, 5, 10, 100, 10032, 2323445, ...$ とか...

次に「有界な数列」の概念を定義する．

定義 1.3.2 (有界列) 数列 $\{a_n\}$ に対してある数 L が存在して，すべての n について $a_n < L$ が成り立っているとき，この数列は 上に有界 な数列という．また，ある数 K が存在してすべての n について $a_n > K$ が成り立っているとき，この数列は 下に有界 な数列という．上にも下にも有界な数列は単に 有界 な数列という．

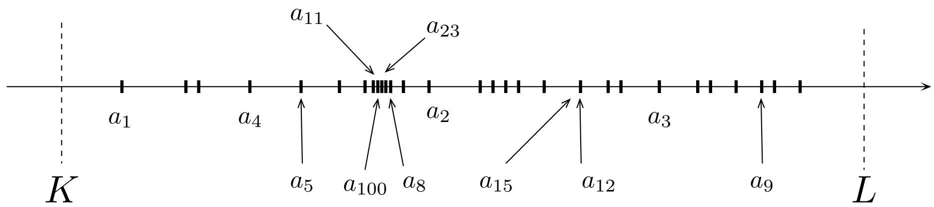
（注）K, L は一般に数列 $\{a_n\}$ に依存して決まるものであるが，もちろん，n には依存してはいけない．



以上の下で，実数の連続性（完備性）の公理を述べることができる．

公理 1.3.3 (実数の完備性) 有界な無限数列は必ず，収束する部分列を含む．つまり，有界な無限数列 $\{a_n\}$ が与えられれば，その部分列 $\{b_n\}$ をうまくとって，$\{b_n\}$ が収束するようにできる．

この公理が何を言っているのかは，数直線上に $a_1, a_2, a_3, \ldots$ の図を描いてみるのが良いだろう．図にすれば，かなりアタリマエに見えるものである．要するに，左を K，右を L で区切られた数直線の区間に無限個の数を放り込むと，どこかにグチャッと集まるしかない，という主張である．(この，グチャッと集まった点を**集積点**（accumulation point）という．)



ただし，有理数の範囲ではこの公理が成り立たないことは納得しておきたい．例えば，

$$a_n \quad \text{とは} \quad \sqrt{2}\ \text{の十進展開の小数点以下}\ n\ \text{桁までとったやつ} \tag{1.3.1}$$

と定義してみる（$a_1 = 1.4, a_2 = 1.41, a_3 = 1.414, \ldots$）．この数列の極限はもちろん，$\sqrt{2}$ であって上の公理を満たす数列の例になっている．(この場合，部分列をとるまでもなく収束している)．しかし，有理数の範囲でこの数列の極限を探しても極限は存在しない．つまり，「有理数に対しては上の公理は成り立っていない」例になっているのだ．

数学的には重要な注

- 上ではさりげなく「実数の公理」を書いたけども，この公理を満たすような数の体系が本当にあるのか（作れるのか）は大きな問題で検討すべきである．これは「上の実数の公理は無矛盾か」と言ってもよい．この講義ではこの問題には全く触れないが，結論だけ言うと，「上の公理を満たす実数の体系は存在する」となる．この辺りの詳しい話は昨年度の「数学 II」で講義したので，出た人は聞いたことがあるはず．
- 「実数の公理」には互いに同値ないくつかの表現があり，以下に述べる「有界単調列は必ず収束する」「コーシー列は必ず収束する」などを公理とすることもある．この講義では直感的に分かりやすいと僕が思ったものを上の公理に採用した．

1.4 単調な数列[6]

これまでに「行き先がわかっている極限」の定義はやった．$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とは，もちろん，数列 a_n の行き先が α だということであり，

$$\text{どんなに小さい } \epsilon > 0 \text{ に対しても } N(\epsilon) \text{ をうまくとると，} \Bigl(n > N(\epsilon) \text{ では } |a_n - \alpha| < \epsilon \Bigr) \text{ となる} \tag{1.4.1}$$

という「定義」を行った．また，実際に数列の収束発散はこの定義に従って判定してきた．ところが，この定義は行き先 α がわかっていなければ使い物にならない．でも実際には，行き先の値ははっきりわからなくても，その収束を判定したい数列はいくらでもある．

例えば，高校でも散々に出てきた非常に重要な数，e の定義を考えよう．この数の定義（のひとつ）は

$$e = \lim_{n\to\infty} \Bigl(1 + \frac{1}{n}\Bigr)^n \tag{1.4.2}$$

という極限だが，この極限が実数として存在することを，今までの知識で証明できるだろうか？この数の存在が証明できなければ，物理で（多分）最も重要な指数関数が定義できなくなるぞ...

これ以外にも,「行き先がきれいには書けないけども極限の存在を証明したい例」はいくらでもある．皆さんが知ってるはずの「定積分」も極限で定義されるから，その極限が存在することを示せなければ非常に困る．

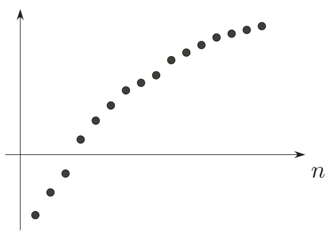
更に言えば，数学で扱う大抵の極限は「その値はきれいに書けないけど，その存在はわかっている」もので，実際にはその極限でその値を「定義」したりするのだ．

という訳で，**行き先の値がわからない数列でも，その数列が収束することだけは言える**ような定理が欲しい．これに応えようとして数学者が整備した概念が「単調増加（減少）列」「上極限と下極限」「コーシー列」などである．これらはそれほど簡単ではないものも含むので，この小節では一番簡単で直感的な単調列のみを考える．

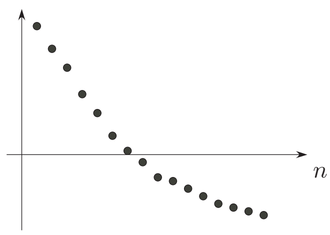
定義 1.4.1 (単調列) $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le \ldots$ となっている数列 a_n を**広義の単調増加**数列，または**単調非減少**数列という（不等号にイコールが入ってないものは単調増加数列という）．不等号が逆向きになったのは「広義の単調減少」または「単調非増加」数列という．

(言葉に関する注)

- 英語では　単調増加＝(monotone) increasing，単調減少＝(monotone) decreasing，単調非減少＝(monotone) non-decreasing，単調非増加＝(monotone) non-increasing.
- 上の定義中の「単調増加」を「狭義の単調増加」とか「真に単調増加」ということもある．同様の用語は関数の増加・減少についても用いるが，この講義では略.
- 「単調増加」を「広義の単調増加」の意味で使う事も時々あるので注意が必要である．実際，研究論文のレベルでは上の定義の意味での「広義の単調増加」を単に「単調増加」と言い，上の定義の意味での「単調増加」は「真に単調増加（strictly increasing)」という事が多い．はっきり言って，物理屋さんはこの辺りの用語はいい加減だから，どのいみで使ってるかは自分で確認すべし.



単調増加数列の例



単調減少数列の例

さて，有界かつ単調な数列には，以下の著しい性質がある．直感的にはあたりまえに見えるだろう.

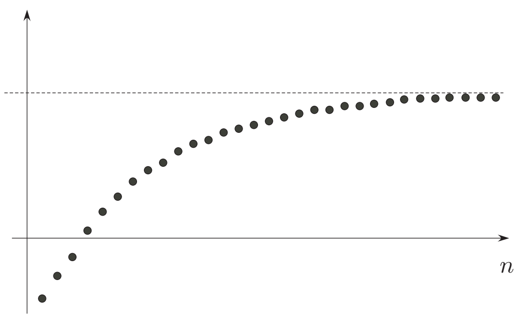
[6]教科書 p.55 付近

定理 1.4.2 (有界単調列の収束；教科書の定理 2.2.4) 数列 $\{a_n\}$ が上に有界で広義単調増加のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在する．また，$\{a_n\}$ が下に有界で広義単調減少のときも，$\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在する．

（注）$\{a_n\}$ が有界でない広義単調増加列の場合は $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ であるし，$\{a_n\}$ が有界でない広義単調減少列の場合は $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ である．このような場合には「極限が存在する」とは言わないのが数学のお約束だと前に注意したが，ここを敢えて「極限が $-\infty$」「極限が $+\infty$」という事にすれば，上の定理は以下のようにも言える．

極限の値として $\pm\infty$ も許す事にすると，単調な数列では $\lim_{n\to\infty} a_n$ は常に存在する．

定理 1.4.2 はあたりまえには見えるが，決してあたりまえではなく，実数の連続性に強く依存している．それを示す簡単な例として，数列 a_n を，「$\sqrt{2}$ を十進小数で書いたときの小数点以下 n 桁めまでの数」と定義してみる（この例はこれまでにもよく使っている）．a_n のそれぞれは有理数で，単調増加，更に有界でもある．しかしその極限は $\sqrt{2}$ という無理数であって有理数の中にはない．つまり，極限を有理数の集合の中で探すと，この数列は（収束先が有理数ではないので）収束しないことになってしまう．より広い実数全体の中で極限を探す事で，（かつその実数が連続性を持っているおかげで），極限の存在が保証され，上の定理が成り立つ訳だ．



（定理 1.4.2 の証明は教科書の p.55 にあるから，省略する.）

1.5 連続関数とその性質

連続関数については高校でも習ったと思うが，ϵ-δ での定式化を行っておこう．

定義 1.5.1 点 a を含む区間で定義された $f(x)$ が「a で連続」とは，$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ なることである．つまり，以下の（ウ）が成り立つことである：

（ウ）任意の（どんなに小さい）正の数 ϵ に対しても，適当な（小さな）実数 $\delta(\epsilon)$ を見つけて，

$$|x-a| < \delta(\epsilon) \text{ なるすべての } x \text{ で，} \quad \bigl|f(x)-f(a)\bigr| < \epsilon \quad \text{とできる．} \tag{1.5.1}$$

（ウ）は数式では

$$\forall\epsilon > 0, \quad \exists\delta(\epsilon) > 0, \qquad \Bigl(|x-a| < \delta(\epsilon) \implies \bigl|f(x)-f(a)\bigr| < \epsilon\Bigr) \tag{1.5.2}$$

となる．

関数の極限の定義と比べると，$0 < |x-a| < \delta(\epsilon)$ が $|x-a| < \delta(\epsilon)$ となっていて，$0 <$ がないのが不思議だ，と思った人もいるかもしれない．しかし，今の場合，$\lim_{x\to a} f(x)$ が $f(a)$ そのものに等しくなって欲しいのだから，わざわざ $x \neq a$ のみを考える必要はない．ので，$0 <$ は省いてある．

なお，片側連続 を問題にすることもある．

定義 1.5.2 関数 $f(x)$ が a で右連続とは，$f(x)$ が a を左端とするある区間で定義されていて，かつ $\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ なることである．同様に，a で左連続とは，$f(x)$ が a を右端とするある区間で定義されていて，かつ $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$ なることである．

- 「右連続」を「右へ連続」,「左連続」を「左へ連続」ということもある．英語ではそれぞれ right continuous, left continuous （または continuous to the right, continuous to the left）．
- $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続とは，

$$c \in (a,b) \text{ では } \lim_{x\to c} f(x) = f(c), \qquad \text{かつ} \qquad \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a), \quad \lim_{x\to b-0} f(x) = f(b) \tag{1.5.3}$$

となることである（区間の中では普通の連続，区間の端点では右（左）連続）．

- 普通の連続にしても，片側連続にしても，比べるべきは $f(a)$ そのものと（右や左からの）極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ だ．単に右側からと左側からの極限値が同じでも連続ではないから注意.（例を考えよ.）

問 1.5.3 関数 $f(x) = \sqrt{|x|}$ が，任意の x で連続であることを，定義に戻って示せ．

問 1.5.4 関数 $f(x)$ が
（あ）$x = a$ で連続である事と，
（い）$x = a$ で右連続かつ左連続でその値が等しい事
は同値であるか？

ϵ-δ を習ったので，以下の（一見，アタリマエの）定理群を証明できる．証明は教科書に載っているが，そんなに気にする必要はない．

定理 1.5.5 (教科書の p.49) 点 a を含むある区間で定義された関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続だとする．

- この時，a の近傍で f は有界である．特に，充分小さな $\delta > 0$ をとれば，$|x-a| < \delta$ なるすべての x で

$$|f(x)| < |f(a)| + 1 \tag{1.5.4}$$

がなりたつ．

- もし $f(a) > 0$ ならば，a の近傍では $f(x) > 0$ である．特に，充分小さな $\delta > 0$ をとると，$|x-a| < \delta$ なるすべての x で

$$f(x) > \frac{f(a)}{2} \tag{1.5.5}$$

がなりたつ．$f(a) < 0$ の時は不等号の向きをひっくり返せば同様の結論がなりたつ．

命題 1.5.6 (教科書の p.50) 関数 f が a で連続，関数 g が $b = f(a)$ で連続なら，合成関数 $h(x) = g(f(x))$ も a で連続である．

命題 1.5.7 (教科書の p.50) 関数 f, g が a で連続とする．
(1) $f(x) + g(x)$，$f(x) - g(x)$ は共に a で連続である．
(2) 積 $f(x)g(x)$ も a で連続である．
(3) $g(a) \neq 0$ なら，$f(x)/g(x)$ も a で連続である．

さて，実数の連続性を認めると，連続関数の重要な性質（２つ）を証明できる．その一つ目は，高校でも習ったはずの中間値の定理である．

定理 1.5.8 (中間値の定理；教科書の定理 2.2.6) 閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ を考える．$f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の数 F に対して，$f(c)=F$ なる $c\in[a,b]$ が少なくとも一つ存在する．つまり，x が a から b に動くとき，$f(x)$ は $f(a)$ と $f(b)$ の間のすべての値を（少なくとも一回は）とる．

これまでにも強調してきたが，この定理は実数の連続性があって初めて成り立つものだ．例えば関数 $f(x)=x^2-2$ が $f(x)=0$ をとるような x の値を考えてみる．無理数まで含めれば，もちろん，$x=\pm\sqrt{2}$ でゼロになる訳だが，有理数の範囲ではそのような x は存在しない．つまり，有理数（連続性のない数の集合の例）の範囲で考えておれば，この定理の結論はなりたたないのだ．

この例では問題になる x の値が具体的にわかっているから「$x=\sqrt{2}$ を数の集合に加える」ことで対症療法的に対処できるが，一般の関数で同じことをやるのはまず，不可能だ．その意味でも数の集合を「連続性」をもつ集合まで拡げておく事は不可欠だったのだ．

さて，連続関数の重要な性質その 2 は最大値，最小値に関するものである．これもグラフを描けば直感的には明らかであるが，それがきちんと証明できるようになったこと（そしてその背後には実数の連続性があること）が重要である．

定理 1.5.9 (連続関数の最大値・最小値は常に存在；教科書の定理 2.2.8) 閉区間で連続な関数は必ず，その区間内で最大値，最小値をとる．従って特にこのような関数は有界である．

- 「閉区間で連続である」ことは重要な条件である．例えば，関数 $f(x)=1/x$ を開区間 $(0,1)$ で考えると，こいつは最大値を持たず，有界でもない．また，$g(x)=x$ を同じく開区間 $(0,1)$ で考えると，こいつは有界だが最大値も最小値も持たない．
- 実数の連続性が重要である事の傍証は以下のような例からもわかる．有理数上だけで定義された関数 $g(x)=\sin x$ は，x が有理数に限定されている限り最大値を持たない．(ただし，$\sin x$ を有理数だけに対して定義することは不可能ではないが，少し不自然である．この意味でこの例はちょっと「人工的」なものである．)

1.6 連続関数の効用：指数関数と対数関数

ここまでの準備を経て，x^α（α は実数，$x>0$），指数関数，対数関数などを自然に定義する事ができる．例えば，x^α を定義するには，まず α に収束するような有理数の列 a_n を考え，

$$x^\alpha=\lim_{n\to\infty}x^{a_n} \tag{1.6.1}$$

とする．つまり，x^α が α について連続になるように定義するわけだ[7]．このようにして，有理数で定義された関数を非常に自然に実数に拡張することができる．(指数函数・対数関数の定義については後で（教科書 3.3 節）詳しくやります．)

[7] これで納得してしまったあなた，まだまだ甘いですね！このように定義するなら，「上の極限が $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ となるすべての $\{a_n\}$ の取り方について同じである」ことを確かめる必要があります．

2 微分

これで漸く,「微分」に入ることができる．これまで延々と基礎の部分の準備をしてきたので，これを用いてまずは（高校でやったことになっている）微分の基礎付けを簡単に行う．そのあとで，高校ではやらなかった新しい題材も学習する（テイラー展開）．

微分を考える理由には大きく分けて２通りある．

- 微係数は関数の「変化率」を表すから，微分の値（正負）を知ることで，関数の 増減を知る ことができる．特に「微係数がゼロ」の点を探すことで極大・極小問題が奇麗に解けた．また，２階微分を考えるとグラフの凹凸も知ることができる．
- 微分を利用して関数を級数に展開できる（テイラー展開）．これを利用して，関数の近似値 が計算できる．

このうち，第一の視点は受験などを通して散々やってきたものと思うので，この講義では簡単にすませる — ただしこれが形を変えて,「多変数関数の微分」（偏微分）として登場する．ところが，第２の「テイラー展開」は，現在の高校のカリキュラムにはない．そこで，この重要なテーマをマスターするのが微分に関する大きな目標の一つになる．

2.1 微分の定義[8]

微分については，かなり高校でやっている．大学で付け加えるべき事は，微分を定義している極限の定義が新しく厳密になった，ということくらいだ．だから，簡単に行きましょう．まずは高校の復習から．

定義 2.1.1 (微分係数) $x = a$ とその近傍で定義されている関数 $f(x)$ に対して，極限

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{2.1.1}$$

が存在するとき，この極限を $f(x)$ の $x = a$ での微分係数（derivative）とよび，$f'(a)$ または $\dfrac{df}{dx}(a)$ と書く．またこのとき，$f(x)$ は a で微分可能（differentiable）という．なお，f がある区間 I のすべての点で微分可能であるとき，**f は I で微分可能**という．

色々な a に対する $f'(a)$ の全体は a に $f'(a)$ という値を対応させる関数だと考えられるので，これを f の 導関数（derived function，または derivative）とよぶ．微分係数は，考えている関数の「変化率」（増減の目安）であり，グラフの接線の傾きであったことを思い出しておこう．

（注）極限のところで注意したように，$x \to a$ というのは $|x - a| \to 0$ の事であったから，(2.1.1) の極限に於いても x は可能なすべての近づき方を考える．この極限の取り方を片側に制限すると以下の定義になる：

定義 2.1.2 (片側微分係数) 定義 2.1.1 の状況の下で，極限

$$f'_-(a) := \lim_{x\to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{2.1.2}$$

が存在するとき，この極限を $f(x)$ の a での左微分係数（left derivative）とよぶ．また，

$$f'_+(a) := \lim_{x\to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{2.1.3}$$

が存在するとき，この極限を $f(x)$ の a での右微分係数（right derivative）とよぶ．

f が a で微分可能なら，右微分係数も左微分係数も存在して，$f'(a)$ に等しい事はすぐにわかる（証明できますか？）．実はその逆も成り立つ．つまり，右微分係数と左微分係数が両方存在して $f_-(a) = f_+(a)$ ならば，f は a で微分可能で，$f'(a) = f_-(a) = f_+(a)$ である．まあ，この辺りは片側連続と同じノリやわな．

[8]教科書 2.3 節の前半

教科書の命題 2.3.4，定理 2.3.7（微分の計算規則）などは高校でもやったと思うので，くり返さない．各自で思い出して，試験になったらできるようになっておくこと．

微分可能性と連続性の間には非常に重要な以下の関係がある：

定理 2.1.3 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であれば，f は a で連続である．

（証明）微分可能性の定義を書き下せば簡単に出るので略．ただし，各自で一度はやっておく事． □

（注）上の定理の逆はなりたたない．つまり,（1 点で）連続だけれど微分不可能な関数の例はすぐに作れる（各自でやること！）．なお，すべての点で連続だけど，どの点でも微分不可能な関数も（なかなか想像しにくいが）存在する．一つの例が田島本の p.129 に載っている（Weierstrass）．

2.2 平均値の定理[9]

高校でもやったはずのロルの定理，平均値の定理について述べよう．せっかく大学の内容なのだから，定理の微妙な仮定（閉区間で連続，開区間では微分可能）に注目してほしい．

まずはロルの定理．定理の下の左側の図を見れば，直感的には明らかだろう．

定理 2.2.1 (ロル Rolle の定理；教科書の定理 2.3.9) $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能．更に $f(a)=f(b)$ とする．このとき

$$f'(\xi)=0 \qquad (a<\xi<b) \tag{2.2.1}$$

となる ξ が存在する．

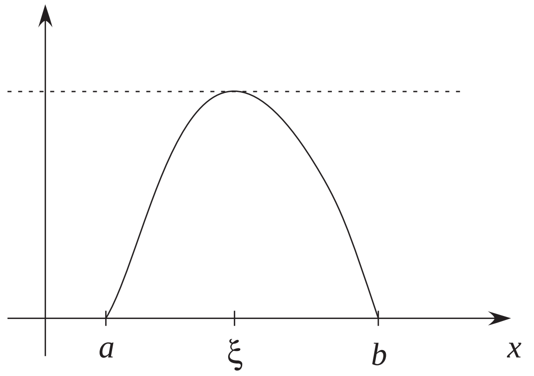
（注）定理の ξ は一般には a,b の両方に依存して決まる．アタリマエだが，注意の事．

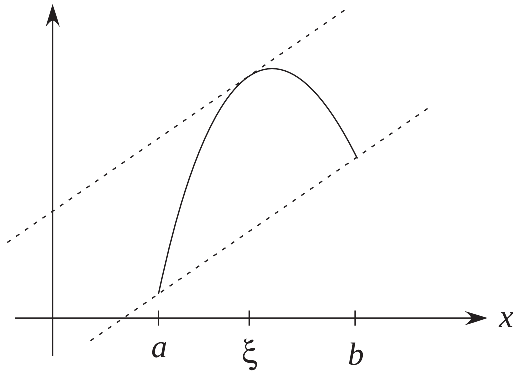
（証明）$f(x)$ が定数であればいつでも $f'(x)=0$ だから，証明は終わっている．そこで，$f(x)$ が定数でない場合を考える．定数でない $f(x)$ は (a,b) で正または負の値をとる[10]ので，ある点では正をとったと仮定しよう．(負の場合は $-f(x)$ は正だから，同じことである)．

ここで，**閉区間で定義された連続関数は必ず最大値，最小値を持つ**ことを思い出そう（定理 1.5.9）．その最大値をとる点（の一つ）を ξ と書くと，ここでは f が正だから $\xi\in(a,b)$．また，ξ で最大値なんだから，ξ の周りでは $f(\xi)\geq f(x)$ である．従って，ξ での微分係数の定義

$$f'(\xi)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \tag{2.2.2}$$

において，分子はいつも非正であり，分母は h の正負に応じて正負になっている．従って．この極限に出ている分数は，$h>0$ なら非正，$h<0$ なら非負である．しかし，$h\to 0$ ということは h を正負両方の方向からゼロにする訳だから，定理の仮定にあるように極限が存在するなら，それは非負でも非正でもある．この両方を満たすのは極限がゼロの時だけだ． □





[9]教科書 2.3 節の後半

[10]数学用語の注：高校でも散々聞かされたと思うが,「正または負」というときは「正だけ」「負だけ」「正も負も」の 3 通りをすべて含む．この点，日常用語とズレているので注意

ロルの定理からすぐに次の（Lagrange による）平均値の定理が出る．これが本節の主要な結果である．上の図では右側の状況である．

定理 2.2.2 (平均値の定理；教科書の定理 2.3.10) $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能と仮定する．このとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \qquad (a < \xi < b) \tag{2.2.3}$$

となる ξ が存在する．

（注）ロルの定理と同様，平均値の定理の ξ も一般には a, b の両方に依存して決まる．

（証明）ロルの定理を認めれば簡単だ．$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}\{f(b)-f(a)\}$ を作ると，ロルの定理の条件をみたす．よって，$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{1}{b-a}\{f(b)-f(a)\}$ がなりたつ $a < \xi < b$ が存在する． □

以上で平均値の定理の主要な部分はおしまいだが，下の形の定理も有効である．実際，後で「テイラーの定理」の証明に用いるであろう．

定理 2.2.3 (コーシーの平均値の定理；教科書の p.64，問題 3) $f(x)$ と $g(x)$ が共に閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能とする．更に，(a,b) では $g'(x) \neq 0$ としよう．このとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (a < \xi < b) \tag{2.2.4}$$

となる ξ が存在する．

（注）$g'(x) \neq 0$ から $g(a) \neq g(b)$ は保証されている．

（証明）$k := \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ とおいて，$F(x) := f(x) - f(a) - k\{g(x) - g(a)\}$ を考える．すると，$F(a) = F(b) = 0$，かつ F の微分可能性なども f, g の微分可能性と同じだから大丈夫なので，ロルの定理から $F'(\xi) = 0$ なる ξ が存在するといえる．これは $f'(\xi) - kg'(\xi) = 0$ を意味するので，定理を得る． □

以下では平均値の定理の応用を考える．これらは大まかには高校でやっていると思うので，簡単にすませる．平均値の定理の応用として非常に大事な（かつ，高校ではやってない）「テイラー展開」については後の節で考える．

2.2.1 関数の増減

微分の応用として最重要なものの一つは，関数の増減や極大・極小との関連である．類似の結果は高校から散々やってきているだろうから，講義でも簡単に触れるにとどめる．ただ，以下のように（また教科書にも強調されているように）仮定の微妙な入り方が面白いところである．まずは言葉の定義から始める．

定義 2.2.4 (単調な関数) 区間（開区間でも閉区間でも）I で定義された関数 f に対して

- $x, y \in I$ かつ $x < y$ ならば常に $f(x) < f(y)$ であるなら，f は I で狭義の**単調増加**であるという．
- $x, y \in I$ かつ $x < y$ ならば常に $f(x) \le f(y)$ であるなら，f は I で**広義の単調増加**（または，単調非減少）であるという．
- $x, y \in I$ かつ $x < y$ ならば常に $f(x) > f(y)$ であるなら，f は I で狭義の**単調減少**であるという．
- $x, y \in I$ かつ $x < y$ ならば常に $f(x) \ge f(y)$ であるなら，f は I で**広義の単調減少**（または，単調非増加）であるという．

なお，単調増加な関数を単に「増加関数」．単調減少な関数を「減少関数ともいう．また単調増加と単調減少の両方をまとめて,「単調な」関数という．

数列のところでも注意したが，単に「単調増加」と言った場合に広義の単調増加を指すのか狭義の単調増加を指すのかは分野やレベルによる．この講義では教科書に従い「狭義の単調増加」を単に「単調増加」という事が多いだろう．

定理 2.2.5 (導関数の符号と関数の増減；教科書の定理 2.3.12 と定理 2.3.14) $f(x)$ が開区間 $I=(a,b)$ で微分可能と仮定する．このとき，

- I で常に $f'(x)\geq 0$ $\Longrightarrow$ I で $f(x)$ は広義単調増加.
- I で常に $f'(x)>0$ $\Longrightarrow$ I で $f(x)$ は狭義単調増加.（逆はなりたたない.）
- I で常に $f'(x)=0$ $\Longleftrightarrow$ I で $f(x)$ は定数関数.

（注）上の定理の仮定では「区間 I 全体で $f'(x)>0$」などを仮定しているが，これはほとんど必要である．つまり，ある一点 a で $f'(a)>0$ だとしても，これだけでは $x=a$ で増加しているとはいえない（例は田島本の p.135）.

（注）狭義単調増加や狭義単調減少だからと言って，$f'(x)>0$ や $f'(x)<0$ とは言い切れない（反例は $f(x)=x^3$）.

2.3 高階導関数[11]

高校でもやったと思うけど，高階の導関数についてまとめておく.

関数 $f(x)$ に対して．それを n-回微分してできる関数を n-階の導関数（n^{th} derivative）といい，$f^{(n)}(x)$ と書く．ただし，１階，２階，３階くらいはそれぞれ $f'(x), f''(x), f'''(x)$ とも書く．具体的には

$$f^{(2)}(x)=\frac{d^2}{dx^2}f(x)=\frac{d}{dx}\Big\{\frac{d}{dx}f(x)\Big\},\qquad f^{(3)}(x)=\frac{d^3}{dx^3}f(x)=\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\Big\{\frac{d}{dx}f(x)\Big\}\right],\quad \ldots \tag{2.3.1}$$

というわけ． なお，$f^{(0)}(x)$ は $f(x)$ そのものを表すものと理解する（これは今後，断りなく多用する）.

高階の導関数については ライプニッツ（Leibniz）の公式 が成り立つ．つまり

$$\frac{d}{dx}\big\{f(x)g(x)\big\}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),\qquad \frac{d^2}{dx^2}\big\{f(x)g(x)\big\}=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x) \tag{2.3.2}$$

で，より一般には（n は自然数）

$$\frac{d^n}{dx^n}\big\{f(x)g(x)\big\}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)\,g^{(n-k)}(x),\qquad \binom{n}{k}:={}_nC_k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!} \tag{2.3.3}$$

となる[12]．この証明は数学的帰納法でできるから，一度は自力でやっておくこと．ただし，その途中で恒等式

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} \tag{2.3.4}$$

を用いることは注意しておく.（この恒等式の意味は何だろう？順列組み合わせで考えてみよう.）

（用語）ある開区間 I で定義された関数 $f(x)$ が n 回微分可能で，更に $f^{(n)}(x)$ が連続 のとき，この関数は開区間 I で C^n-級 である，という．いうまでもなく，$m<n$ ならば，C^n-級の関数は C^m-級でもある.

（注）「**連続性は遺伝しない**」とは高木貞治の名言である．つまり，連続な関数の導関数は連続とは限らない．このような例はいくらでも作れるから，各自で作って納得しておくこと.

以下では高階導関数の応用を簡単に紹介する．どちらも高校でやったはずだ.

---

[11] 教科書 2.4 節

[12] この公式は２項展開の公式 $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n-k}$ に良く似ている．その導出法を思い出すと，同じ二項係数 $\binom{n}{k}$ が出る理由がわかるだろう

2.3.1 関数の極大・極小

定義 2.3.1 点 $x=a$ が関数 $f(x)$ の 極大点（local maximum）であるとは，

$$\exists r>0, \qquad 0<|x-a|<r \quad \Longrightarrow \quad f(x)<f(a) \tag{2.3.5}$$

となることである．このとき，f は $x=a$ で極大，ともいう．同様に，点 $x=a$ が関数 $f(x)$ の 極小点（local minimum）であるとは，

$$\exists r>0, \qquad 0<|x-a|<r \quad \Longrightarrow \quad f(x)>f(a) \tag{2.3.6}$$

であることをいう．なお，

$$\exists r>0, \qquad |x-a|<r \quad \Longrightarrow \quad f(x)\le f(a) \tag{2.3.7}$$

となっている時（最後の不等号に等号を許す），f は a で 広義の極大 という．広義の極小も同様に定義する．

（注）高校でも強調されたかもしれないが，関数 $f(x)$ が $x=a$ で 最大（maximum）とは，f の 定義域全体 を見渡した時に $f(a)$ が最大であることをいう．つまり，

$$f \text{ の定義域に入っているすべての } x \text{ に対して} \quad f(x)<f(a) \tag{2.3.8}$$

であることをいう（上の極大の定義のように x の範囲を我々が勝手に設定してはいけない）．最小（minimum）についても同様である．要するに極大・極小とは local な性質，最大，最小とは（全体を見渡した時の）global な性質である．この点は英語の方が良く表現されている．

実際問題として，極大や極小を求めるのは（みんなが高校で習ったように）割合簡単なことが多い．それに引き換え，最大や最小を求めるのはなかなかに大変なことが多く，すべての極大点や極小点を探し出した上でそれらの中で最大や最小のものを求める，という２段階が必要になる.（場合によっては，境界での値も考えに入れないといけない.）この節では極大・極小問題に重点をおきたい（教科書の p.69〜70 に少し記述がある）．

さて，１変数の場合の極大，極小問題は以下のようになっている．この結果そのものは高校でやったはずだが，今では厳密に証明できるようになったから，再録する．

定理 2.3.2 $x=a$ の近傍で定義された 1 変数の関数 $f(x)$ について，以下が成り立つ．
(i) $f(x)$ が $x=a$ で微分可能，かつ $x=a$ で $f(x)$ が極大または極小の場合，$f'(a)=0$ である．逆は必ずしもなりたたない．
(ii) $f(x)$ が $x=a$ で２階微分可能で $f'(a)=0$ の場合には，以下が成り立つ：

a. $f''(a)>0$ の場合，$f(x)$ は $x=a$ で極小である．
b. $f''(a)<0$ の場合，$f(x)$ は $x=a$ で極大である．
c. $f''(a)=0$ の場合，$f(x)$ の $x=a$ での極大極小については何も言えない（極大の場合，極小の場合，どちらでもない場合もある）．

（上の定理の (ii)-c は「定理」の中に入れるほどのことではないが，わかりやすさを考えて入れておいた.）

講義ノートにはこれ以上書かないが，各自でいくつかの計算問題はやっておくこと（受験数学の復習みたいなものだが）．

2.3.2 曲線の凹凸

これまた高校でもやったはずだが，２階導関数の幾何学的意味を復習しておこう．
１階導関数 $f'(x)$ は x での $f(x)$ の変化率（増減）を表すので，$y=f(x)$ のグラフの傾きを表す．
それに対して，２階導関数 $f''(x)$ は $f'(x)$ の増減を表し，これは $y=f(x)$ のグラフの曲がり具合に対応している．つまり，$f''(x)>0$ ならば x でのグラフは下に尖っている（これを下に凸という）．$f''(x)<0$ ならば x でのグ

ラフは上に尖っている（これを上に凸または凹という）．f' と f'' の正負を調べてグラフを書くことは高校のときに散々やっただろうから，詳細は省く．

用語についての注意： 英語では下に凸の関数を単に convex function（直訳：凸関数）といい，上に凸の関数を concave function（直訳：凹関数）とよぶ．日本人にとっては不幸なことに，関数の凹凸に関する用語が，漢字から受ける印象と逆になってしまっている．

2.4 テイラーの定理とテイラー展開[13]

これから暫く，微分の重要な応用のもう一つ.「テイラー展開」を扱う．これは案外，皆さん苦労するようだから，甘く見ないように．

「テイラー展開」とは大雑把にいうと，$f(x)$ の値を $f(a)$ とその高階微係数で表す表式で，

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{2.4.1}$$

という形をしている（この表式の成立条件は後でじっくりやる）．皆さんの良く知っている関数の例では（上で $a = 0$ としたものを書いた）

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \tag{2.4.2}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \tag{2.4.3}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} \tag{2.4.4}$$

などとなる.（これらはゴールデンウィークの頃のレポートで少しだけやった.）

これはある種，驚異的な式である．高校から知ってたはずの関数が，上のような変な級数（和）で書けるというのだ．物事を深く考えるひとほど，初めはこの式に違和感を持つものと思う．特に変なのは $\sin x$ と $\cos x$ であって，上の表式からは $\sin x$ と $\cos x$ が周期 2π の周期関数である事が全く自明ではない！($\sin \pi = 0$ が上の式から見えますか？)

しかし，後で証明するように，上の 3 つの式はすべて正しい．$\sin x$ や $\cos x$ の周期性は暫く各自で考えてもらうことにして，テイラー展開の持ちうる意味（意義）について簡単に述べておこう．

- まず，(2.4.2) などの式は，それ自身が数値計算にも適している —— $e^x, \sin x$ などの値を，右辺の級数（和）で計算できるのだ．もちろん，無限級数の値そのものを数値的に求める事はできないが，たくさんの項の和をとる事で，いくらでも精度良く計算できる[14]．
- (2.4.1) にはもう少し理論的な意味もある．つまり，$|x - a|$ が小さい場合に $f(x)$ を $f(a)$ で近似すると，誤差がどうなるかを表していると解釈できる．この誤差の評価は，もっと進んだ結果を得るのに不可欠である．

以下，このテイラー展開について詳しく述べる．まずはおおもとの「テイラーの定理」から始めよう．

2.4.1 テイラーの公式（有限項でとめた形）

通常，テイラーの定理（テイラーの公式）というのは以下の形の定理をいう：

定理 2.4.1 (通常のテイラーの公式) $f(x)$ がある開区間 I で n 回微分可能と仮定し，この区間内に $a \in I$ をとろ

[13] 教科書 2.5 節

[14] 実際にコンピューターが $e^x, \sin x$ などを計算する場合には，上の (2.4.2) そのものではなく，これを更に効率よくしたものを用いる．しかし，計算の原理は（大体）同じである

う．このとき，勝手な $x \in I$ に対して，a と x の間の一点 ξ が存在して以下が成り立つ：

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n \tag{2.4.5}$$

なお，(2.4.5) の 2 つの項に名前をつけて

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \tag{2.4.6}$$

$$S_n(x) := f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad R_n(x) := \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n \tag{2.4.7}$$

と書く事もある．$S_n(x)$ をテイラー展開（テイラーの公式）の n 次の 主要項，$R_n(x)$ を n 次の 剰余項（残項）という．

- 上のテイラーの公式を「$f(x)$ の $x = a$ の周りのテイラーの公式」という，例えば，$a = 3$ なら「$f(x)$ の $x = 3$ の周りのテイラーの公式」という．場合によっては「$x = \ldots$ の周りの」の代わりに「$x = \ldots$ において」とかと「$x = \ldots$ での」と言うこともある．つまり,「$x = 2$ におけるテイラーの公式」や「$x = 2$ でのテイラーの公式」などともいう．
- $a = 0$ とした場合の展開を特にマクローリン（Maclaurin）の公式（展開）ともいう．
- 実はマクローリンの公式とテイラーの公式は非常に近い親戚関係にあり，片方だけわかれば十分だ．理由は以下の通り：$y = x - a$ という変数変換によって，座標 x で見た時の点 $x = a$ は座標 y で見た時の $y = 0$ に移る．従って，座標 y でのマクローリンの公式は座標 x での $x = a$ の周りのテイラーの公式に対応している．
- テイラーの公式でも，平均値の定理でも，ξ は a と x（または b）の両方に依存しうることを再度強調しておく．同じ理由で，剰余項 $R_n(x)$ は x, a で決まるけども，$R_n(x)$ の ξ そのものが x, a に依存する事をお忘れなく．
- 細かいことであるが，定理 2.4.1 では $f^{(n)}(x)$ の存在は仮定するが，連続性は仮定しなくても良い．この点で，剰余項が積分形の定理 2.4.7（後出）より，こちらの方が少しだけ適用範囲はひろい（そのぶん，誤差評価は大抵，劣る —「ある ξ が存在して」とか言われても，どんな ξ かわからなければ細かい評価はできない）．

定理 2.4.1 の証明[15]

$$F(x) := f(x) - \left[f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right], \qquad G(x) := (x-a)^n \tag{2.4.8}$$

とおく．$F(x)$ が (2.4.6) の $R_n(x)$ の表式で書けることを示せばよい．

そのために，コーシーの平均値の定理（定理 2.2.3）を F, G に適用する事を考えよう．$F(x)$ は $f(x)$ から $(x-a)^k$ の和を引いているだけなので，また $G(x)$ は多項式なので，共に n 階は微分できる．微分を具体的に計算すると

$$F(a) = F'(a) = F''(a) = \ldots = F^{(n-1)}(a) = 0, \qquad F^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \tag{2.4.9}$$

$$G(a) = G'(a) = G''(a) = \ldots = G^{(n-1)}(a) = 0, \qquad G^{(n)}(a) = n! \tag{2.4.10}$$

となっている．この事実を用いて，以下のように進む．

（1）定理 2.2.3 そのもので

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} \tag{2.4.11}$$

を満たす ξ_1 の存在（ξ_1 は a と x の間にある）が言える．

[15] 正直，僕は高校の頃からこの定理の証明がどうもすんなりできないままである．典型的な証明は以下に述べる「コーシーの平均値の定理」を使うもので，それは理解できるものの，どうも回りくどい気がして仕方ない．そこで，微積の講義を受け持つたびに「コーシーの平均値の定理」を使わない証明を何度か試みるのだが，いつもうまくいかないのだ．仕方ないので,「コーシーの平均値の定理」を用いるバージョンを載せておく（高木本からのカンニング）

（2）上の右辺の量は $F'(a) = G'(a) = 0$ を用いて強引に書き直すと，定理 2.2.3 が使える．その結果，

$$\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} \tag{2.4.12}$$

を満たす ξ_2 の存在（ξ_2 は a と ξ_1 の間にある）が言える．

（3）この議論は，$F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0$ である限り，つまり $k \le n-1$ である限りくりかえす事ができて，

$$\frac{F^{(k)}(\xi_k)}{G^{(k)}(\xi_k)} = \frac{F^{(k)}(\xi_k) - F^{(k)}(a)}{G^{(k)}(\xi_k) - G^{(k)}(a)} = \frac{F^{(k+1)}(\xi_{k+1})}{G^{(k+1)}(\xi_{k+1})} \tag{2.4.13}$$

を満たす ξ_{k+1} の存在（ξ_{k+1} は a と ξ_k の間にある）が，$k \le n-1$ で順次，証明される．

（4）以上をまとめると，

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} \tag{2.4.14}$$

を満たす ξ_n の存在（ξ_n は a と x の間にある）が，証明された．この両辺を具体的に計算すると

$$\frac{F(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!} \tag{2.4.15}$$

となっているので，分母を払うと定理が得られる． □

2.4.2 テイラー展開（無限項まで）

定理 2.4.1 において，公式 (2.4.6) がすべての $n \ge 1$ で成り立ち，かつ剰余項 $R_n(x)$ が $n \to \infty$ でゼロになるならば，つまり，$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ ならば，

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{2.4.16}$$

が得られる．

> ここのところ，$\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在するのかどうか気になる人がいるかもしれないが，それは「R_n の極限がゼロ」の仮定の下では以下のように保証される：(2.4.6) の左辺は n に依存せず，右辺では R_n がゼロに行く．従って，残りの S_n の $n \to \infty$ 極限が存在して，かつその極限は左辺の $f(x)$ に等しくなければならない．

このように無限級数の形になったものをテイラー展開またはテイラー級数とよび，有限項の「テイラーの公式」と区別する．なお，剰余項 $R_n(x)$ が $n \to \infty$ でゼロになるか否かは展開される関数 f と考えている区間 I に依存するので，個別に考察する必要がある．この問題は個々の例で見て行こう．

2.4.3 テイラーの公式，テイラー展開の例

まずは具体例を見てみよう．もう少し「理論的」なことは後で詳しく見る．

- まず，多項式．$f(x) = c_n(x-a)^n + c_{n-1}(x-a)^{n-1} + \ldots + c_1(x-a) + c_0$ は何回でも微分可能であり，既にテイラー展開の形になっている．念のため，テイラーの公式を用いたら多項式が再現される事を各自で確かめてみよう．
- 指数関数．$f(x) = e^x$ は何回でも微分可能で，高階の導関数もすべて e^x である．従って，特に $a = 0$ としたテイラーの公式から

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + R_n(x), \qquad R_n(x) := \frac{e^{\xi}}{n!} x^n \tag{2.4.17}$$

が得られる（ξ は 0 と x の間の数）．更に，少しややこしい計算を頑張ってやると，すべての実数 x に対して $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が証明できる（レポート問題）．従って，すべての実数 x に対して

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{2.4.18}$$

が成り立つ．このテイラー級数の形は非常に基本的だから，覚えておくことが望ましい．

- 三角関数（$\sin, \cos$）も同様にして展開式を導くことができる．例えば

$$\sin x = S_n(x) + R_n(x), \qquad S_n(x),\ R_n(x) \text{ の形はレポートでね} \tag{2.4.19}$$

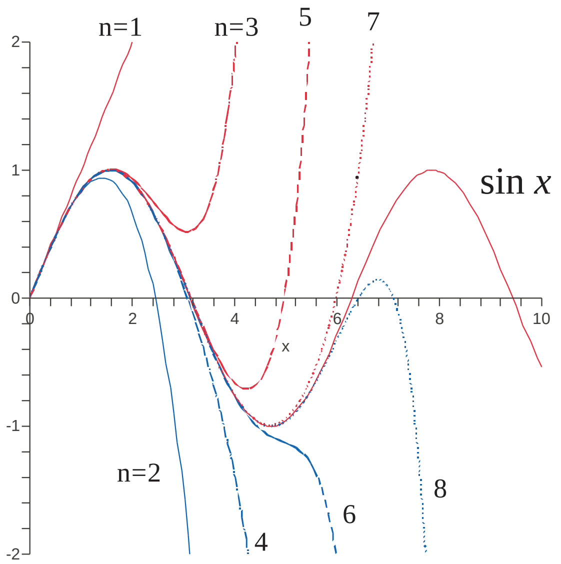
がなりたつ．指数関数と同様に，この場合もすべての実数 x に対して $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が証明できる（レポート問題）．従って，すべての実数 x に対して

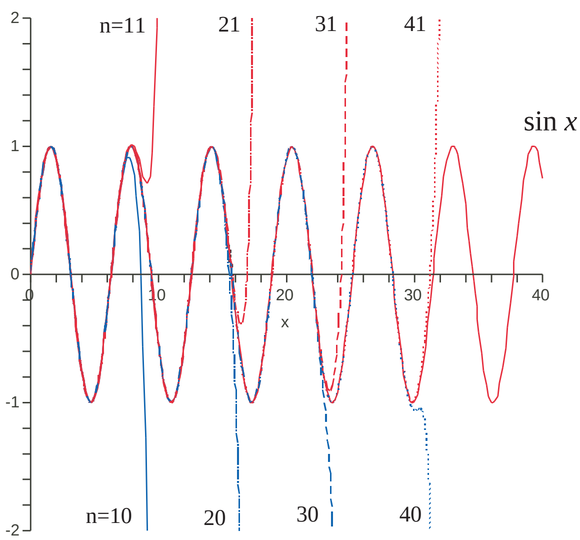
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \text{また同様の考察により} \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{2.4.20}$$

が成り立つことがわかる．このテイラー級数の形も覚えてしまうくらいになろう[16]．

参考までに $\sin x$ のテイラー展開の図を載せておく．下の左図は，$n = 1, 2, \ldots, 8$ の $y = S_n(x)$ の様子を，$y = \sin x$ のグラフ（実線）とともに書いたもの．n が奇数のものはいつも正の方に大きくなって視界から消えている．一方，n が偶数のものは負の方に大きくなって視界から消えていく．

右図は $n = 11, 21, 31, 41$ と $n = 10, 20, 30, 40$ の様子を，$y = \sin x$ とともに書いたもの．n が増えるにつれて，近似はどんどん良くなっていくが，ある x から先では急速にダメになって上下に離れてしまう様子が見て取れる．





[16] このような公式は無理に丸暗記してもダメだ．自分で導出したり，実際に使ってみるうちに自然に覚えるようになるのが望ましい

2.4.4 テイラーの公式の意味（関数の近似）

そもそも，テイラーの公式は

よく訳のわからない関数 $f(x)$ を，訳のわかっている関数 $(x-a)^k$ の和 $S_n(x)$ で書く

いう精神の下に生まれたものである．つまり，後述する条件の下では，(2.4.6) での $S_n(x)$ が $f(x)$ を良く近似し，$R_n(x)$ の方は小さな誤差項とみなせるのだ．

また，前回のレポートの解説にも書いたが，函数の種類によってはテイラーの公式を杓子定規に使うよりも簡単な方法もある（例：$f(x)=1/(1-x)$．しかしそのように「ずるい」方法がテイラーの公式を杓子定規に使ったものと同じかどうかは現時点ではまだわからない．

このような事情を明確にするため，以下の考察を行う．まずは「関数を近似する」とはどういう事かをはっきりさせよう．

定義 2.4.2 (n 次より高く近似) $x=0$ の近くで定義された関数 $f(x), g(x)$ があり，

$$x \to 0 \text{ のときに} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{x^n} = 0 \qquad (n \text{ は正の整数}) \tag{2.4.21}$$

となるとき，0 の近くで <u>$g(x)$ は $f(x)$ を n 次より高く（n 次よりも良く）近似する</u> という．

上の式では，$f(x)-g(x)$ はゼロに行くのだが，その行き方（ゼロへの収束の速さ）が，x^n よりも速い，と言っているのである．このような事情をうまく表すため，以下のような書き方を導入する[17]

定義 2.4.3 (無限小の比較；オーダーまたはランダウの記号．教科書の定義 2.3.5) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = 0$ とする．

ア．$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$ の時，<u>$f(x)$ は $h(x)$ より高位の無限小</u> であると言い，$f(x) = o\bigl(h(x)\bigr)$ と書く（ここの o は小文字）．

イ．上よりもう少し弱く，$\frac{f(x)}{h(x)}$ が $x\to a$ で有界であるとき，つまり，

$$\exists K>0 \quad \exists \delta>0 \qquad \Bigl(0<|x-a|<\delta \quad \Longrightarrow \quad \Bigl|\frac{f(x)}{h(x)}\Bigr| < K\Bigr) \tag{2.4.22}$$

のとき，<u>$f(x)$ は $h(x)$ のオーダーである</u> といい，$f(x) = O\bigl(h(x)\bigr)$ と書く（ここの O は大文字）．

（注）

- アとイは大文字と小文字だけの区別なので，特に手書きの際には注意が必要だ．
- また，これらのオーダー比較は <u>どのような極限を考えているのか</u>（x がどこに近づいた時のものか）に当然，依存する．通常は文脈でわかるけども，どんな極限を考えているかはいつも意識すること．
- 上のイは当然アの場合を含み，実際には $f(x)$ が $g(x)$ よりずっと速くゼロに行く場合でも，$f(x)$ は $g(x)$ のオーダーである，という．この点，極限を計算する場合に注意を要する．
- では $f(x)$ は少なくとも $g(x)$ と同じくらいか大きい，という場合に使う記号はないのだろうか？ない訳ではないのだが，それほどポピュラーではない．分野によっては $f(x) \approx g(x)$ と書いたり，$f(x) = \Omega\bigl(g(x)\bigr)$ と書いたりすることはある．

この書き方によると，(2.4.21) は

$$f(x) - g(x) = o(x^n) \qquad (n \text{次より高く近似．ここの } o \text{ は小文字}) \tag{2.4.23}$$

と書ける．

[17] この内容は別に小節を設けても良いくらいなのだが，話の流れを切らないために，必要最小限だけを書くことにした

この用語法に従うと，テイラーの定理を以下のように言い換えることができる．

命題 2.4.4 (テイラーの定理の言い換え) 関数 $f(x)$ の $x=0$ を中心とした n 次のテイラーの公式

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x),\qquad S_n(x):=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,\quad R_n(x):=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\quad(0<\theta<1) \tag{2.4.24}$$

において，$S_n(x)$ が $f(x)$ を $(n-1)$ 次より高く近似する，つまり

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^{n-1}) \tag{2.4.25}$$

となるための必要充分条件は以下の通り：

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_n(x)}{x^{n-1}}=0 \tag{2.4.26}$$

前の命題の (2.4.26) の十分条件として，以下がある．

命題 2.4.5 (多項式近似の十分条件)
1) 0 を内部に含むある区間で $f^{(n)}$ が有界，つまり $\delta>0$ と $M>0$ があって（これらは n に依存してもよいが，x に依存してはいけない），

$$|x|<\delta \text{ ならば } \left|f^{(n)}(x)\right|<M \tag{2.4.27}$$

となっているとする．このとき，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+O(x^n) \tag{2.4.28}$$

である．
2) 0 を内部に含むある区間で $f^{(n)}$ が連続，つまりこの区間で $f(x)$ が C^n-級なら，1) のためには十分である．

これらはわざわざ命題とするほどのことではないかもしれないが，実用上大事だから載せた．特に，一年生で出てくる関数は C^∞-級（何回でも微分できる）のものが多く，これらに対しては上の十分条件が自動的に満たされており，命題 2.4.4 の結論も成り立つのである．

さて，テイラー展開（より一般に函数を級数で近似すること）については，以下の非常に重要な性質がある．これはほとんどアタリマエだが，テイラーの公式を直接使わずに S_n を求める方法の基礎を与えてくれる．

命題 2.4.6 (多項式近似の一意性；教科書の命題 2.5.6 の 1)) 原点の近くで定義された函数 $f(x)$ と多項式 $g(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j$ があり，$g(x)$ は $f(x)$ を n 次より高く近似しているものとする．このとき，$g(x)$ の係数 $a_0,a_1,\ldots,a_n$ は一意に決まる．

テイラーの公式があることを考えると，要するに a_j はテイラーの公式にでている係数と一致しなければならない事がわかる．

証明：
f を n 次より高く近似する g が 2 つあったとして，それらを

$$g_1(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j,\qquad g_2(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j \tag{2.4.29}$$

とする．$a_j=b_j$ $(0\le j\le n)$ を示したい．さて $(x\neq 0)$，

$$\frac{|g_1(x)-g_2(x)|}{|x|^n}\le\frac{|g_1(x)-f(x)|}{|x|^n}+\frac{|f(x)-g_2(x)|}{|x|^n} \tag{2.4.30}$$

の両辺で $|x|\downarrow 0$ とすると，

$$\lim_{x\to 0}\frac{|g_1(x)-g_2(x)|}{|x|^k}=0\qquad(0\le k\le n) \tag{2.4.31}$$

がなりたつ．そこで

$$g_1(x) - g_2(x) = \sum_{j=0}^{n} (a_j - b_j) x^j \tag{2.4.32}$$

である事に注目して $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して (2.4.31) を順次考えると，$a_k - b_k = 0$ しかあり得ないことが，$k = 0, 1, 2, \ldots$ と順次わかる． □

この命題から，与えられた函数 $f(x)$ のテイラーの公式（S_n の方のみ考える）を求めるには，どのようなやり方でも良いから $f(x)$ を $(n-1)$ 次よりも高く近似するものを見つければよいことがわかる．先週のレポート問題なら，$1/(1-3x)$ は等比級数で書ける事は高校から知ってるから，これが答えになるしかないことがすぐにわかる．

また，複雑な関数のテイラー展開（の最初の何項か）を求めるには，いろいろな工夫が可能になる．例えば，$\tan x$ を $x = 0$ の周りで展開する場合，まともに微分して行くとなかなか大変だ．でも $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ を利用して，分母と分子を別々にテイラー展開した後で割り算（これにも工夫が必要だが）するのが良い．これは教科書の p.82 に載ってるから見ておくこと．

2.4.5 テイラー展開の効用

テイラーの公式とテイラー級数の効用については既に述べたが，重要なのでもう一度繰り返す．

1. テイラーの公式では，剰余項以外は単なる級数（$(x-a)^n$ の和）で，四則演算で計算できる．剰余項を何らかの工夫で押さえれば，問題の <u>関数の値の近似値を計算</u> できる．その例をレポート問題に与える予定なので，やってみてほしい．
2. テイラー展開（無限級数の形）が成立するならば，テイラー展開によって <u>関数を定義する</u> のだと考え直すこともできる．そうすれば，その級数をより広い x に拡張して適用することにより，関数の定義域を一気に拡げることも可能である．これは特に，「いままで実数だと思ってきた x を複素数に拡張する」場合に非常に有効である．この一つの例（オイラーの公式）を下に示した．この視点は秋以降（また２年時の「複素関数論」で）たくさんやるだろう．

2.4.6 オイラーの公式

２番目の効用の例として（多分，どこかで見ただろう）オイラー（Euler）の公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R} \tag{2.4.33}$$

を挙げておこう．指数関数のテイラー展開において，$x = i\theta$ とおいてしまおう（このようにおいてもテイラー展開が収束することは，実部と虚部を別々に考察すると確かめられる）．すると，

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!} + i \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \tag{2.4.34}$$

が得られる（２番目の等号は，単に k が偶数の場合と奇数の場合をわけて，i^k を計算しただけ）．ところがこの最右辺は $\cos\theta + i\sin\theta$ のテイラー展開に他ならない．従って，<u>指数関数や三角関数はそのテイラー展開の式で定義し直すのだと思えば，オイラーの公式が証明されたことになる</u>．テイラー展開によって関数を定義し直すというのは一見，奇妙に思えるかもしれないが，同値な命題がある場合にどれを仮定（公理）にしてどれを結論とするか，の一例と思えば良い．ただし，本当に定義し直す立場をとった場合は今まで知っていたはずの関数の性質（例：$\sin, \cos$ は周期 2π である，指数関数は $e^{a+b} = e^a e^b$ を満たす，等々）はすべて忘れて，テイラー展開だけからこれらを導き直す必要はある．この辺りは夏休みチャレンジ問題とする予定なので，我こそはと思う人は挑戦して欲しい．

2.4.7 おまけ：剰余項が積分の形のテイラーの定理

今までのものの他に，テイラーの公式には以下のようなバージョンもある．これは剰余項を積分で書くもので，剰余項の大きさを評価するには楽な事が多い．(大体，微分よりは積分の方が評価しやすいのである —— これは皆さんが４年生くらいになるとわかってくるだろう)．ただ，これは積分を使っているから（そして，我々は積分の厳密な理論をまだやっていないから）現時点ではこの定理の完全な証明を与えるわけにはいかない．

定理 2.4.7 (剰余項が積分形のテイラーの公式；教科書の定理 2.5.8) $f(x)$ がある開区間 I で C^n-級であると仮定する．この区間 I 内に $a \in I$ をとろう．このとき，勝手な $x \in I$ について，以下が成り立つ：

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \qquad S_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad R_n(x) := \int_a^x \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}\,dy \tag{2.4.35}$$

（高校のノリでの証明；ただし積分の基礎付けさえすれば，この証明は厳密に正しい）数学的帰納法で証明する．つまり $f(x)$ は C^N-級と仮定し，(2.4.35) をすべての $n \le N$ について証明することを目指す．それで n についての帰納法を用いる．

I. $n = 1$ では，$\int_a^x f'(y)dy = f(x) - f(a)$ であるから，$f(a)$ を移行すれば証明できる —— $f^{(0)}(x) := f(x)$ の記号法を思い出せ．

I′. $n = 2$ の場合（これは証明には必要ないが，ウォームアップとしてやる）．$n = 1$ の

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)dy \tag{2.4.36}$$

の第２項を，以下のように部分積分するとよい．

$$\begin{aligned}\int_a^x f'(y)dy &= \int_a^x \Bigl\{-\frac{d}{dy}(x-y)\Bigr\} f'(y)dy = \Bigl[-(x-y)f'(y)\Bigr]_a^x + \int_a^x (x-y)f''(y)dy \\ &= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-y)f''(y)dy \end{aligned}\tag{2.4.37}$$

II. n まで証明できたとして，$n+1$ をやってみよう（もちろん，$n \le N-1$ と仮定しておく）．n までできたと仮定したので，(2.4.35) が成り立っているが，最後の項を以下のように考えて部分積分する（分母の $(n-1)!$ は後で)：

$$\begin{aligned}\int_a^x f^{(n)}(y)(x-y)^{n-1}dy &= \int_a^x f^{(n)}(y)\Bigl\{-\frac{1}{n}\frac{d}{dy}(x-y)^n\Bigr\}dy \\ &= -\frac{1}{n}\Bigl[f^{(n)}(y)\,(x-y)^n\Bigr]_a^x + \frac{1}{n}\int_a^x f^{(n+1)}(y)\,(x-y)^n dy \\ &= \frac{1}{n}f^{(n)}(a)\,(x-a)^n + \frac{1}{n}\int_a^x f^{(n+1)}(y)\,(x-y)^n dy. \end{aligned}\tag{2.4.38}$$

これを (2.4.35) の最後の項に用いると（もちろん，分母の $(n-1)!$ を忘れない)，(2.4.35) の $n+1$ のものが証明されてメデタシメデタシ． □

3 積分

積分については高校でも習ってはいるが，これは非常に不完全である．特に「積分は微分の逆演算」として定義すると,「ある関数 f の積分を求めよ」という問題や「この関数の積分は定義できるか？」という問題でハタと困ってしまう.（例：微分して $f = e^{-x^2}$ になるような関数 F は何でしょう？じつはこの F は簡単に書けない —— というか，積分で定義するしかないのだが，高校の範囲ではこのような関数は定義できないし，その存在もわからない.）この節では高校までの知識はいったん忘れて,「積分とは何か」「積分をどのように定義すべきか」から話を始める．その後で高校で習ったこととの関連をつけ，更に積分のいろいろな性質を見ていくことにしよう．

3.1 積分（定積分）の定義

ということで，まずやるべきは「与えられた関数 $f(x)$ に対して，その積分を定義すること」である．これから見ていくように，かなり広いクラスの関数に対してその積分（定積分）を定義することができる．定積分を通して不定積分も定義できるので，高校までの知識とのつながりがつくことになる[18].

$f(x)$ を適当な（例えば連続な）関数とし，簡単のために $f(x) > 0$ とする．$a < b$ を定めたときの定積分 $\int_a^b f(x)dx$ とは，高校でやった通り，直感的には区間 $[a, b]$ 上での $y = f(x)$ のグラフと x-軸との間の図形の面積である．しかし,「面積とは何か」の定義自体が実はあやふやだ．そこで，この講義では，以下のようにして面積と定積分を同時に定義していく．このような考えは,「区分求積法」として見たことがあるかもしれない[19].

なお，教科書では以下よりも簡単な定義をまず採用し，以下の定義は後で（教科書の定義 3.2.4）出てくる．しかし僕は，積分の最も素朴な定義はこれから紹介する「リーマン和」に基づくものであって，教科書の順序ではかえって本質が見えにくくなると思う．そこで敢えて「通常の」積分の定義から始めることにした.（以下は教科書の 3.2 節の一部を少し別の形で書いたものである．教科書の 3.1 節にはすぐ後で戻る.）

定義 3.1.1 (定積分) $a < b$ と．区間 $[a, b]$ で定義された（連続な）関数 $f(x)$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を以下のように定義する（下図を参照）.

- まず，区間 $[a, b]$ を n 個（n は大きな整数）の小区間に分ける：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.
  これを区間 $[a, b]$ の <u>分割</u> といい，P で表す．できる小区間は $[x_{i-1}, x_i]$ である（$i = 1, 2, \ldots, n$）.
  小区間の幅の最大値を $|P|$ と書く：$|P| = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$.
- 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に勝手に点 ζ_i をとる（$i = 1, 2, \ldots, n$）．以後 $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ をまとめて $\vec{\zeta}$ と書く.
- 上のように決めた P と $\vec{\zeta}$ に対して，f の <u>リーマン和</u>

$$R(f; P, \vec{\zeta}) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,(x_i - x_{i-1}) \tag{3.1.1}$$

  を定義する.
- さて，$|P| \to 0$（区間の幅がゼロ）を満たすような任意の P と，P に対して上のようにとった任意の $\vec{\zeta}$ を考える．$|P| \to 0$ の極限で $R(f; P, \vec{\zeta})$ の値が（$P, \vec{\zeta}$ の取り方によらず）一定の値に <u>近づくならば，$f(x)$ は $[a, b]$ 上で**積分可能**</u>（または <u>可積分</u>）といい，その極限値を定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値と定める．模式的に数式で書けば

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \text{“}\lim_{|P| \to 0}\text{”}\, R(f; P, \vec{\zeta}) \tag{3.1.2}$$

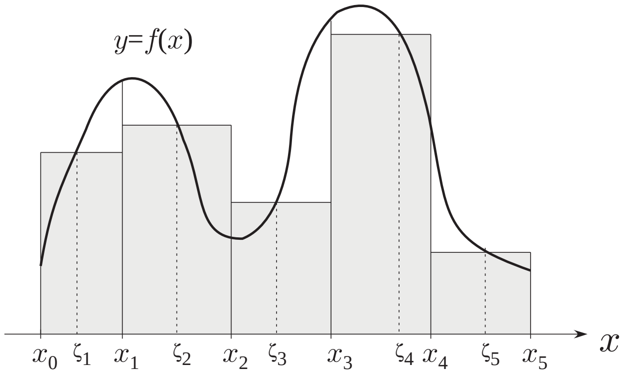
  とするのである（上の極限はかなり複雑なので “ ” を付けた）.

[18] 定積分より先に不定積分を考えようとすると,「微分したら $f(x)$ になるような関数 $F(x)$ は何？という問いに応える必要がある．これは一般に非常に難しい．しかしこれからやる定積分の定義なら，このような場合にも使えるのだ

[19] 厳密には,「区分求積法」とは区間を等間隔に区切った場合をいうようだ．以下では等間隔でない場合も扱う

なお，$a = b$ の場合は $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$ と定義する．
また，$a > b$ の場合は $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ と定義する．($a > b$ の時の定義はもちろん，$\displaystyle\int_b^a f(x)dx$ が定義できる時のみ有効である．）このようにして定義した積分をリーマン式積分，または**リーマン積分**という．

$f(x) > 0$ の場合の模式図（$n = 5$）を以下に示した．図で陰をつけた部分の面積がこの場合の $R(f; P, \vec{\zeta})$ である．



図を見ればわかるように，この定義は大体において，面積の近似値を作るだろうと予想される．少なくとも，上の極限が存在する場合にこの値を面積とすることに異論はないだろう．非常に大きな問題は この極限がいつ存在するのか（面積がいつ定義できるのか)，そもそもこのような極限が存在する関数（可積分な関数）は存在するのか，であるが，これは後の節で少し考察する．

この節ではまず，定積分とは，グラフの下の図形の面積を細い短冊の和で近似する（近似したい）ものである，ということをはっきりと認識してほしい[20]．

（注）繰り返しになるが，ここで学んでいる定積分の定義から出発して高校でやった「原始関数」につなげていくことはこの後で行う．従って,「微分の逆演算は積分」ということは一旦，忘れて頂きたい．この意味で，これからやることは高校での積分の導入に厳密な根拠を与える作業である．

以下の 2 節で，上に定義した積分を厳密に取り扱う．ただ，このような内容にあまりに気をとられてしまうのは，一年生の段階では得策ではないかもしれない．以下の 2 節はあくまで参考程度のものだと思ってほしい．ややこしいことが嫌いな人は，定理 3.3.3 だけは理解した上で，3.4 節に跳んでも良い．

3.2 その前に：一様連続性，上限と下限

上の問いに答えるためには，二つばかり，基礎的な概念を追加しておく必要がある．ただ，数学科ではない学生さんにこのようなことを強調しすぎるのも問題かもしれないので，講義では簡単に触れるにとどめる（この小節の内容は教科書の 3.1 節）．

3.2.1 一様連続性

一つ目の概念は，以下の「一様連続性」と呼ばれる性質である

関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続とは，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ であることだった．また，関数 $f(x)$ が区間 $[a.b]$ の各点で連続とは，その字のごとく，$[a, b]$ の中の任意の点 c にて $\displaystyle\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ となることであった．これを $\epsilon - \delta$ で書いてみると，任意の $c \in [a, b]$ と 任意の $\epsilon > 0$ に対して，うまく $\delta(\epsilon, c) > 0$ をとって，

$$|x - c| < \delta(\epsilon, c) \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon \tag{3.2.1}$$

[20]煎じ詰めれば「積分は和のお化け」である．ついでに「微分は差のお化け」である.「お化け」は別名，極限ともいう

がなりたつようにできる，ということになる．δ は ϵ に依存するのはもちろんであるが，一般には c にも依存する．特に $c \to \infty$ や $c \to 0$ で $\delta(\epsilon, c)$ がゼロになってしまうことも良くある．このような連続性は単に「連続」または「各点連続」という．

ところが，関数 $f(x)$ と考えている区間 $[a, b]$ の取り方によっては，上の $\delta(\epsilon, c)$ を c によらずにとれる，つまり $[a, b]$ **内のすべての** c **に共通の** $\delta(\epsilon)$ **をとれる**，場合がある．このような場合，$f(x)$ は区間 $[a, b]$ で 一様連続 であるという．正確に書くと以下のようになる．区間 I は開区間でも閉区間でもよい．

定義 3.2.1 (一様連続；教科書の定義 3.1.2) 関数 $f(x)$ が区間 I で**一様連続**とは，任意の $c \in [a, b]$ に対して うまく $\delta(\epsilon) > 0$ をとって，

$$\text{任意の } c \in I \text{ に対して} \qquad \Big(|x - c| < \delta(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \epsilon \Big) \qquad \text{がなりたつ} \tag{3.2.2}$$

ようにできること，である．

しつこいけども，上での $\delta(\epsilon)$ がすべての c に共通にとれるのが「一様」連続の意味である．

さて，一様連続性については，以下の非常に重要な定理がある．

定理 3.2.2 (連続関数は閉区間で一様連続；教科書の定理 3.1.4) $a < b$ を任意の実数とするとき，**閉区間** $[a, b]$ **上の連続関数は一様連続**である．つまり，任意の $\epsilon > 0$ に対して適当な $\delta(\epsilon) > 0$ がとれて，

$$\text{すべての } x, y \in [a, b] \text{ に対して} \qquad \Big(|x - y| < \delta(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon \Big) \tag{3.2.3}$$

が成立する．今までに強調した通り，$\delta(\epsilon)$ はすべての $x, y \in [a, b]$ に共通にとれる．

いろいろとややこしいことを言ってるが，積分の理解には上の定理さえわかってれば何とかなる．この定理の証明は教科書を参照されたい．

3.2.2 上限と下限

２つめの重要な概念は「上限と下限」である．これは実数の連続性をまじめに議論するには避けて通れない概念だが，これまで，ごまかしていた．積分の定義に必要な最小限をここで学ぶことにしよう．

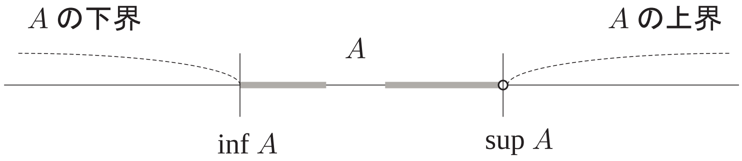
まず，上界と下界の概念を思い出そう．

定義 3.2.3 (上界と下界；教科所の定義 3.1.8) A を実数の集合とする．ある数 N があって，A の任意の元 a が $a \le N$ を満たすとき，A は上に有界（bounded from above）といい，N を A の 上界（upper bound）という．同様に，ある数 M があって，A の任意の元 a が $a \ge M$ を満たすとき，A は下に有界（bounded from below）といい，M を A の 下界（lower bound）という．A が上にも下にも有界な場合は単に 有界（bounded）という．

定義からわかるように，上界や下界はギリギリの数でなくても良い．例えば，A を区間 $[0, 1]$ とした場合には，-1 や -10 や -2345 はすべて A の下界である．同様に 1 や 123 や 33556 は A の上界である．でもこの定義では A がどこまで広がっているのかがわからない．そこで，A の端と端を決める（ギリギリの数にする）つもりで,「上限」と「下限」を定義する．以下の定義と定理が教科書の「定理と定義 3.1.9」に相当する．

定義 3.2.4 (上限と下限) A を実数の集合とする．A が上に有界のとき，A の上界の最小値 を A の**上限**（supremum）と定義し，$\sup A$ と書く．同様に A が下に有界のとき，A の下界の最大値 を A の**下限**（infimum）と定義し，$\inf A$ と書く．

（注）上限と上界は間違いやすいから，注意する事.（正直，僕は日本語だとどっちがどっちだったかすぐにわからなくなる.）



（注意！）上では「A の上界の最小値」や「A の下界の最大値」があたかも存在するかのような書き方をしたが，これは以下の定理 3.2.5 で保証される．だから，論理の順序を重んじるなら，まず下の定理を書いてから，上の定義で上限や下限を定義すべきなのだ（教科書ではちゃんとそう書いている）．しかしその順序ではかえってわかりにくいと思ったので、敢えて上の順序で書いた．下では［$\cdots$］の中はそれぞれ置き換えて読むべし．

定理 3.2.5 (上限と下限の存在) 実数の集合 S が上に［下に］有界ならば S の上界 [下界] の最小値 [最大値] が存在する．上の定義の用語を使うと，S が上に［下に］有界ならば S の上限 [下限] が存在する．

3.3 定積分はいつ定義できるのか？

準備が終わったので，定積分の問題に戻ろう.（この節の内容は本質的に教科書の 3.2 節である）．先に注意したように，定義 3.1.1 の極限値 (3.1.2) はいつも存在するとは限らない．有名な例（Dirichlet）だが

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が有理数の時}) \\ 1 & (x \text{ が無理数の時}) \end{cases} \qquad \text{に対して} \qquad \int_0^1 f(x)dx \tag{3.3.1}$$

を考えると，これは定義 3.1.1 では定義できない（なぜ定義できないのか，各自で納得するまで考えること）．このような関数に対しても「積分」を定義しよう，というのが Lebesgue が彼の博士論文で提唱した「ルベーグ積分」である．いろいろな意味で，ルベーグ積分の方がリーマン積分より自然な積分だと僕は考えるが，その厳密な理論はそれなりに大変なので，この講義ではルベーグ積分は扱わない．

これからリーマン積分の厳密な構築に入る．難しく見えるだろうから講義では簡単に触れるにとどめるが，興味のある人は大筋だけでも理解するように心がけてほしい．その際にキーになるのは

- 定積分は定義できなくても，**「上積分」「下積分」はいつでも定義**できること（Darboux の定理，定理 3.3.1）
- 定積分が定義できる必要十分条件は**上積分と下積分の値が等しい**こと（定理 3.3.2）
- 定積分が定義できる十分条件の一つは f **が連続関数であること**（定理 3.3.3）

である．特に 3 番目の「**連続関数は可積分である**」は非常に重要な定理だから，結果だけでも頭に叩き込んでおくように！

まず,「上積分」などの定義から始めよう．ここでは区間 $[a, b]$ で定義された有界な関数 $f(x)$ に話を限る．$f(x)$ が有界でない場合や $[a, b]$ が有限の区間でない場合は，後（**??**節）で「広義積分」として取り扱う．

- 分割 P に対して以下のように定義する:区間 $[x_{i-1}, x_i]$ における $f(x)$ の下限と上限をそれぞれ $m_i(f; P), M_i(f; P)$ と書く．そして

$$s(f; P) \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i(f; P) \times (x_i - x_{i-1}), \qquad S(f; P) \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i(f; P) \times (x_i - x_{i-1}) \tag{3.3.2}$$

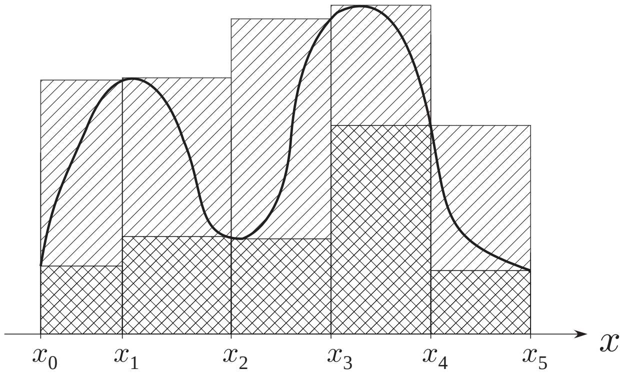
  を定義する．$s(f; P)$ を下限和，$S(f; P)$ を上限和という．

- 更に，様々な細かさの P を考え，

$$s(f) = \sup\{s(f; P) \mid P \text{ は } [a, b] \text{ の分割 }\}, \qquad S(f) = \inf\{S(f; P) \mid P \text{ は } [a, b] \text{ の分割 }\} \tag{3.3.3}$$

  も定義する．$s(f)$ を <u>下積分</u>，$S(f)$ を <u>上積分</u> という．

$n = 5$ の場合の例を以下に示した．右上から左下への斜め斜線のところの面積が上限和，左上から右下への斜め斜線のところの面積が下限和である．ただし，図では下限和に相当する部分は両方の斜め線が入って十文字の模様になっている．



上の定義から，分割内の分点 $\vec{\zeta}$ の取り方にかかわらず，

$$s(f;P) \le R(f;P,\vec{\zeta}) \le S(f;P) \tag{3.3.4}$$

であることに注意しておこう（上の２つの図を比べてみよ）．

以上の準備の下に，リーマン積分に関する基本的な定理を述べることが出来る（定理の証明は後で）．まず，１つめの定理は，$s(f;P)$ や $S(f;P)$ は，それぞれが極限を持つことを保証する．

定理 3.3.1 (Darboux の定理，教科書にはない) 分割 P を限りなく細かくする（$|P| \to 0$）とき，下限和と上限和はそれぞれ一定の値に収束し，その行き先は (3.3.3) で定義された s と S である．つまり，

$$\lim_{|P|\to 0} s(f;P) = s(f), \qquad \lim_{|P|\to 0} S(f;P) = S(f) \tag{3.3.5}$$

がなりたつ．(ただし，$s(f) = S(f)$ とは限らない．)

では，上積分・下積分と積分可能性の関係はどうか？それぞれの P に対しては $s(f;P) \le S(f;P)$ だったから，

$$s(f) \le S(f) \tag{3.3.6}$$

であることはわかる．問題は上積分と下積分がいつ等しいかだ — 関数 f や区間 $[a,b]$ の取り方によってはこの２つは等しくないこともある．しかし，この２つが等しいことは定義 3.1.1 の積分可能性と同値だ，というのが次の定理である．

定理 3.3.2 (積分可能性の必要十分条件，教科書ではこれを積分可能の定義にしている) f が区間 $[a,b]$ 上で積分可能である必要十分条件は，上積分と下積分が一致することである．つまり

$$s(f) = S(f) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ は可積分で，} \int_a^b f(x)dx = s(f) = S(f) \tag{3.3.7}$$

これで積分可能性の一般論はおしまいである．しかしこのままでは，与えられた関数に対して上積分，下積分を計算しないと積分可能かどうかがわからない．これは不便だから，積分可能性の簡単な十分条件を挙げておく：

定理 3.3.3 (連続関数は積分可能，教科書の定理 3.2.3) 関数 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ 上で連続なら，f は $[a,b]$ 上で積分可能である．また，有限個の点を除くと連続な場合も積分可能である．

講義ではこれらの定理の証明（説明）は行わないし，証明を気にする必要もないが，参考までに，以下の小節に載せておく．

理解を深める問題：

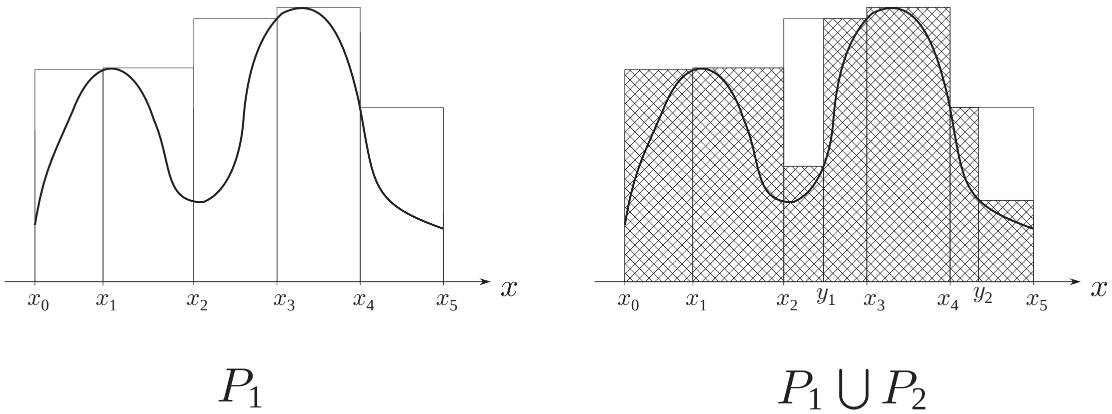
高校の時にもやったかもしれないが，良く知っている関数に対して，上積分，下積分を計算しよう．例えば，積分区間は $[-1,1]$ にして，$f(x)=x^2, x^3$ の場合など，いくつかやってみることを強く奨める．

3.3.1 定理 3.3.1 と定理 3.3.2 の証明

定理 3.3.1 の証明の基本になるのは，以下の性質である．定理 3.3.2 の方は定理 3.3.1 からすぐに出る．

補題 3.3.4 $S(f;P)$ は，分割を細かくすると減少する．より正確にいうと，区間 $[a,b]$ の勝手な分割 P_1, P_2 をとってきて，これを合わせた（つまり，両方の分割の分点を全部集めた）分割を $P_{12}=P_1\cup P_2$ と書くと，$S(f;P_{12})\le S(f;P_1)$ および $S(f;P_{12})\le S(f;P_2)$ である．
同様に，$s(f;P)$ は分割を細かくすると増加する．

この補題は，$S(f;P)$ の定義からほとんどあたりまえである．以下にこの事情を図で例示した．



左側の図（の長方形の下の面積）が $P_1=(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ のみの場合の $S(f;P_1)$ である．一方，$P_2=(y_0,y_1,y_2,y_3)$ を考えると（$y_0=a, y_3=b$），右側の図の陰をつけた部分の面積が $P_1\cup P_2$ の場合の $S(f;P_1\cup P_2)$ である．図に示すように，白い 2 つの長方形の部分だけ，$S(f;P_1\cup P_2)$ が小さくなっている． □

（注）上ではわかりやすいようにわざと不正確な書き方をしたが，本来は「$S(f;P)$ は，分割を細かくすると増加しない」と書くべきであった．同様に，「$s(f;P)$ は，分割を細かくすると 減少しない」が正しい．

以下ではこの補題を用いて定理 3.3.1 と定理 3.3.2 を証明する．

定理 3.3.1 の証明 S の方のみ，証明する．s のほうも，いくつかの不等号の向きが逆になるだけで同じだ．

ちょっと考えると，定理 3.3.1 は当たり前に思える．なぜなら，補題 3.3.4 より，$S(f;P)$ は単調減少っぽく見えて，「有界な単調減少列は極限を持つ」からだ．しかし，これは**早とちり**だ．というのは，補題 3.3.4 は「P をより細かくしたら $S(f;P)$ は非増加」と言っているだけで，**他の分割から出発して**細かくした行き先が，この P から出発した行き先と**等しいかどうか**は保証の限りではない．この問題を解決するため，以下のように進む．

まず inf としての $S(f)$ の定義から，どんな分割 P に対しても $S(f)\le S(f;P)$ であることに注意しておこう：

$$\text{すべての分割}\quad P\quad\text{に対して}\qquad S(f)\le S(f;P). \tag{3.3.8}$$

また，$S(f)$ は $S(f;P)$ の inf であるから，$S(f)$ と $S(f;P)$ の差がいくらでも小さくなるような分割 P もある：

$$\text{任意の}\quad \epsilon>0,\quad\text{に対して}\qquad\text{ある分割}\quad P\quad\text{がとれて，}\qquad S(f;P)\le S(f)+\epsilon\qquad\text{とできる．} \tag{3.3.9}$$

問題は，(3.3.9) が $|P'|\to 0$ なる任意の P' に対して成り立つか，つまり

$$(??)\qquad\text{任意の}\ \ \epsilon>0\ \ \text{に対してうまく}\ \ \delta>0\ \ \text{がとれて，}\quad \Bigl(|P'|<\delta\implies S(f;P')\le S(f)+\epsilon\ \Bigr) \tag{3.3.10}$$

とできるか？ということである．

そこでまず，(3.3.9) の P を固定し，十分細かい分割 P' を,「P' の各ブロック内に P の分点が高々一つしかない」ようにとる．これは $|P'|$ を「P の一番細い区間の幅」より小さくとれば，絶対に実現できる．次に，P と P' を合わせた分割を考えると，これは P, P' よりも細かいので，細かい方の S の値が小さくなる：

$$S(f; P \cup P') \le S(f; P). \tag{3.3.11}$$

一方，n を P の分点の数，M, m は $[a, b]$ 内での f の上限と下限とすると，

$$S(f; P') - S(f; P \cup P') \le n(M - m)|P'| \tag{3.3.12}$$

が成り立つ．なぜなら，左辺の差への寄与は P' の分割ブロック中に P の分点が入っているときのみゼロでないが，このような分点の数は最大で n 個しかなく，そのような一つのブロックからの寄与は $(M - m)|P'|$ で押さえられるからだ（ここのところは図で納得するのがよい）．(3.3.11) と (3.3.12) から

$$S(f; P') \le S(f; P \cup P') + n(M - m)|P'| \le S(f; P) + n(M - m)|P'| \tag{3.3.13}$$

が結論できた．これと (3.3.9) を組み合わせると

$$S(f; P') \le S(f; P) + n(M - m)|P'| \le S(f) + \epsilon + n(M - m)|P'| \tag{3.3.14}$$

が得られる．さてここで P' を十分細かく，$n(M - m)|P'| < \epsilon$ となるようにとると（ここで，n は P のみで決まり，P' には関係ないことが効いている），

$$\text{すべての}\ \ \epsilon > 0\ \ \text{に対してうまく}\ \ \delta > 0\ \ \ \text{がとれて}\qquad |P'| < \delta \implies S(f; P') \le S(f) + 2\epsilon \tag{3.3.15}$$

とできる．よって,（ϵ は任意だから 2ϵ を ϵ と思い直して）(3.3.10) が結論できる． □

定理 3.3.2 の証明

（十分であること）Darboux の定理の証明中，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ がとれて，

$$|P| < \delta\ \text{ならば}\quad S(f; P) < S(f) + \epsilon \quad \text{かつ} \quad s(f; P) > s(f) - \epsilon \tag{3.3.16}$$

であることを見た — (3.3.15) 式．ところで，その定義から，リーマン和は

$$s(f; P) \le R(f; P, \vec{\zeta}) \le S(f; P) \tag{3.3.17}$$

を満たす．従って，$|P| < \delta$ である限り，どんな分割でも，どんな分点 $\vec{\zeta}$ の取り方に対しても，

$$s(f) - \epsilon \le s(f; P) \le R(f; P, \vec{\zeta}) \le S(f; P) \le S(f) + \epsilon \tag{3.3.18}$$

が成り立つことがわかる．ここでもし，定理の仮定のように $s(f) = S(f)$ であれば，$\delta \downarrow 0$ として（このとき，もちろん $\epsilon \downarrow 0$）

$$\lim_{|P| \to 0} R(f; P, \vec{\zeta}) = s(f) = S(f) \tag{3.3.19}$$

が結論できる．リーマン和の極限が確定するから，積分可能である．

（必要であること）ほとんど自明である.（対偶を証明）$S(f) - s(f) = c > 0$ と仮定すると，sup, inf としての定義から，

$$s(f; P) \le s(f) = S(f) - c \le S(f; P') - c \tag{3.3.20}$$

が勝手な P, P' に関して成り立つ．つまり，いくら頑張っても $S(f; P)$ と $s(f; P')$ のギャップを埋めることはできず，リーマン和の極限が存在しない（そのような分点をいくらでもとれる）．従って積分不可能である． □

3.3.2 定理 3.3.3 の証明

一様連続性がわかれば，証明は簡単だ．

定理 3.3.3 の証明

定理 3.3.2 を考えに入れると，$s(f) = S(f)$ が言えれば定理 3.3.3 の証明には十分だ．そのためには，

$$\text{（?）任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して，} 0 \le S(f;P) - s(f;P) < \epsilon \text{ なる分割 } P \text{ がとれる} \tag{3.3.21}$$

となることを証明すればよい．以下ではこれよりも強い，

$$\text{（?）任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して，うまく } \delta > 0 \text{ をとると } \Bigl(|P| < \delta \implies 0 \le S(f;P) - s(f;P) < \epsilon \Bigr) \tag{3.3.22}$$

を証明しよう．さて，積分領域の長さは $b-a$ なので，$\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{b-a}$ とおく．f の一様連続性から $\delta > 0$ が存在して，

$$|x-y| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon' \tag{3.3.23}$$

とすることができる．そこで，分割 P を，$|P| < \delta$ となるようなものにとろう．この分割は十分小さいので，同じ小区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ に属する x, y は $|x-y| < \delta$ を満たしており，したがって $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$ も満たされる．よって，I_i 上での f の上限 M_i と下限 m_i は $0 \le M_i - m_i \le \epsilon'$ を満たす．これを i について和をとると，

$$0 \le S(f;P) - s(f;P) = \sum_i (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \le \sum_i \epsilon'(x_i - x_{i-1}) = \epsilon' \, |b-a| = \epsilon \tag{3.3.24}$$

が得られる．つまり，(3.3.22) が証明できた．メデタシメデタシ． □

理解を深めるための問題：

定積分の定義に従って（上の定理を使っても良い），積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を求めてみよ．ここで

$$a = 0, \quad b = 1, \qquad f(x) = x \tag{3.3.25}$$

とする．余力のある人は他の $f(x)$ の場合も（例：$f(x) = \sin$）やってみようか．

この問題の計算は大変である．しかし，一回はやっておいた方が，後々のためになる．

まあ，定義に従って定積分を求めるのは大変だ（上の問題をやった人は同意するだろう）．でも，高校で習ったように（それでこれから見るように）定積分は微分の逆演算なのだ．この事実により，積分の計算は非常に簡単になるのだ．

以上で，ちょっと難しい「積分の理論」はおしまいだ．あまり細かいことを気にする必要はないが，定理 3.3.3「連続関数は積分可能」だけは理解してほしい．以下，本来の工学部向け講義内容に戻る．以下の内容はちゃんと理解すること．

3.4 積分の性質

ほとんど当たり前ではあるが，定積分の基本的な性質をまとめて述べておこう．まず，$a \geq b$ の場合の定積分の定義を思い出しておこう．

- $\displaystyle\int_a^a f(x) = 0$ と定める．
- $a < b$ のとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が定義できるならば，$\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ と定める．

さて，定積分の定義から 以下の諸性質が簡単に導かれる．

定理 3.4.1 (区間に関する加法性)
(i) $a < c < b$ のとき，

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \tag{3.4.1}$$

である（もちろん，３つの積分が定義できることは仮定する）．
(ii) 実は上の (3.4.1) は任意の実数 a, b, c について成り立つ（やはり３つの積分が定義できることは仮定する）．

これは区間を合わせた（足した）場合に対応する積分も足し算になることを主張しているので，積分の加法性と呼ばれる．これも（厳密な証明はともかく）高校の時から知ってるはずだ．

証明：
(i) $f(x) \geq 0$ の場合，定積分をグラフの下の面積だと思えば，これはほとんどアタリマエであるが，定積分の定義からもすぐに導かれる．その際，区間 $[a, b]$ の分割として点 c を分点に持つようなものを考えて，$[a, c]$ 上，および $[c, b]$ 上の積分との関連をつけるとよい．
(ii) これは簡単で，(i) の結果と積分の上端が下端より小さい場合の定積分の定義を組み合わせるとすぐに出る． □

定理 3.4.2 (積分の線形性)
(i) $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ がともに定義できるとき，

$$\int_a^b \bigl\{f(x) \pm g(x)\bigr\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \tag{3.4.2}$$

である．
(ii) $\int_a^b f(x)dx$ が定義できるとき，任意の実数 α に対して

$$\int_a^b \bigl\{\alpha f(x)\bigr\}dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \tag{3.4.3}$$

である．

いうまでもなく，上の性質は定積分で定義される関数から実数への写像

$$f \qquad \mapsto \quad \int_a^b f(x)dx \tag{3.4.4}$$

が線形写像であることを主張している．線形代数で注意されたかもしれないが，線形写像の一番基本的なものは普通の微分演算や積分演算なのだ．それはともかく，これは高校の時から親しんできた性質であろう．

証明：
(i), (ii) ともに非常に簡単である．定積分はリーマン和の極限として定義されたが，そのリーマン和に対して (i), (ii) に相当する線形写像の関係式が成り立っている．そのため，極限をとった後の定積分でも同じ関係式が成り立つ． □

定理 3.4.3 $a < b$ のとき，以下が成り立つ（もちろん，登場する積分は定義できているものとする）．
(i) （正値性）

$$[a,b] \text{ で } f(x) \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f(x)dx \geq 0 \tag{3.4.5}$$

(ii) （単調性）

$$[a,b] \text{ で } f(x) \leq g(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \tag{3.4.6}$$

(iii) $[a,b]$ で $f(x)$ は連続かつ非負とする．もし $f(x)$ がこの区間で恒等的にゼロでなければ，$\int_a^b f(x)dx > 0$ （ゼロではなく，完全に正）である．

証明：

(i) $f(x) \geq 0$ ならば定積分の定義のリーマン和がそもそも非負である．従って，極限として定義される定積分も非負である．
(ii) $h(x) = g(x) - f(x)$ に (i) を適用すればよい．
(iii) 仮定から $a \leq c \leq b$ なる c があって，$f(c) > 0$ となっているはずである．今，$f(x)$ が連続と仮定したので，$f(x)$ の値は $x = c$ の十分近くでは正である．特に十分小さな $\delta > 0$ をとれば

$$|x - c| < \delta \text{ かつ } a \leq x \leq b \quad \text{では} \quad f(x) \geq \frac{f(c)}{2} \tag{3.4.7}$$

となっているはずだ．

ここで簡単のため，$c - \delta \geq a$，$c + \delta \leq b$ だったとする（そうでない場合にどのように証明を修正すべきかは以下から明らかだろう）．積分の区間に関する加法性を用いて積分区間を $c \pm \delta$ でわけると，

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \tag{3.4.8}$$

となるが，始めと終わりの積分は $f(x) \geq 0$ のために非負である．また，真ん中の積分は (3.4.7) をもちいると，

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2} dx = \frac{f(c)}{2} \times 2\delta = f(c)\,\delta > 0 \tag{3.4.9}$$

である．従って，(3.4.8) 自身も正である． □

系 3.4.4 $a < b$ のとき，両辺の積分が定義できているなら，

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b \bigl| f(x) \bigr| dx. \tag{3.4.10}$$

証明 簡単だ．

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \tag{3.4.11}$$

がいつでも成り立っているので，この不等式の３辺をそれぞれ a から b まで積分すれば良い．定理 3.4.3 の (ii) から，積分結果に対しても不等号が成り立つ：

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{3.4.12}$$

これは (3.4.10) に他ならない． □

定理 3.4.5 (積分の平均値の定理，教科書の定理 3.3.6) $a<b$ とし，区間 $[a,b]$ 上では $f(x)$ が連続，かつ $g(x)\geq 0$ と仮定する．以下の両辺の積分が定義できるとき，区間 $[a,b]$ 内の一点 ξ が存在して，

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \tag{3.4.13}$$

特に $g(x)\equiv 1$ とおくと，

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\,(b-a) \tag{3.4.14}$$

となるような ξ の存在が証明される．

証明 簡単だ．閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数は最大値と最小値をもつから，それらを M,m と書こう．すると，$g(x)\geq 0$ なので，区間 $[a,b]$ では $mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)$ がなりたつ．この不等式のそれぞれの辺を積分すると，積分の単調性から，

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \int_a^b Mg(x)dx = M\int_a^b g(x)dx \tag{3.4.15}$$

が得られる．以下，これから (3.4.13) を示す．

まず，$\int_a^b f(x)dx = 0$ ならば，(3.4.13) の両辺が共にゼロとなり，(3.4.13) はアタリマエに正しい．

次に，$\int_a^b g(x)dx \neq 0$ ならば，$g(x)\geq 0$ から $\int_a^b g(x)dx > 0$ である．よって，上の不等式 (3.4.15) の両辺を $\int_a^b g(x)dx$ で割って

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M \tag{3.4.16}$$

が結論できる．m,M は区間 $[a,b]$ における $f(x)$ の最大値と最小値であったので，$f(x)$ が連続なら，x が a から b まで動くとき，$f(x)$ は m と M の間すべての値をかならず一度はとる（中間値の定理）．従って，特に，

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(\xi) \tag{3.4.17}$$

となる $\xi\in[a,b]$ が存在する．この式の分母をはらえば (3.4.13) になる． □

（注）上の定理は以下のように書く方が「平均値」の定理という感じがするのだが，どうだろうか？

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \qquad f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \tag{3.4.18}$$

左側は $f(x)$ を区間 $[a,b]$ で普通に平均したつもりだし，右側のは $f(x)$ を $g(x)$ という重みで加重平均した感じになっている．

最後に，積分の性質の中では最も重要とも言えるものを証明しよう．

定理 3.4.6 (微分積分学の基本定理，教科書の定理 3.3.5) I 上では $f(x)$ が連続とする．区間 I 内の一点を a として

$$F(y) := \int_a^y f(x)dx \tag{3.4.19}$$

を定義する．このとき，F は I 内の各点 y で微分可能で，

$$\frac{d}{dy}F(y) = f(y). \tag{3.4.20}$$

（注）$F(y)$ がちゃんと定義できていることは定理 3.3.3 で保証されている．

証明 ここでは積分の平均値の定理を使った証明を与えておく．$F(y)$ の微分を定義どおり計算しようとすると

$$\frac{d}{dy}F(y) = \lim_{h\to 0}\frac{F(y+h)-F(y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_y^{y+h} f(x)dx \tag{3.4.21}$$

の極限が問題になる．(以下，簡単のため，$h \to +0$ の極限を考えるが，$h \to -0$ も全く同様にできる．）積分形の平均値の定理，特に系**??** によると，右辺の積分は $[y, y+h]$ 内の適当な ξ を用いて $hf(\xi)$ と書ける．つまり，問題の極限は

$$\frac{d}{dy}F(y) = \lim_{h\to 0}\frac{F(y+h)-F(y)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) \tag{3.4.22}$$

というものだ（ここで ξ は y と $y+h$ の間の適当な数）．$h \to 0$ の極限では，ξ は y に収束する．更にこのとき，f が連続なので，$f(\xi)$ は $f(y)$ に収束する．従って，問題の極限は $f(y)$ に等しく，定理は証明された． □

高校でも既にやったように,「微分したら $f(x)$ になる関数」を $f(x)$ の原始関数 と呼ぶ．上の定理で定義した $F(x)$ は原始関数の一つである．すると当然，$f(x)$ の原始関数はどのくらいあるのか，が問題になるが，これには以下の命題が答えてくれる．

系 3.4.7 $a < b$ とし，区間 $[a, b]$ 上では $f(x)$ が連続とする．このとき，f の原始関数 $F(x)$ は，付加定数を除いて一意に定まる．すなわち，

(i) $F_1(x)$ が $f(x)$ の原始関数である場合，任意の定数 C を用いて

$$F_2(x) := F_1(x) + C \tag{3.4.23}$$

を定義すると，$F_2(x)$ も $f(x)$ の原始関数である．

(ii) $F_1(x)$ と $F_2(x)$ が $f(x)$ の原始関数である場合，x に依存しない定数 C がとれて

$$F_2(x) - F_1(x) = C \qquad (a \le x \le b) \tag{3.4.24}$$

と書ける．

証明 (i) のほうは，$F_1' = f$ ならば $F_2' = f$ でもあることから，明らか．
(ii) の方は，F_1, F_2 が f の原始関数ならば $\frac{d}{dx}\{F_2(x) - F_1(x)\} = f(x) - f(x) = 0$ であるべきだから，この両辺を積分すればすぐに出る． □

なお，この付加定数の自由度は (3.4.19) での c の選び方が全く任意であったことに対応していることに注意しよう．

これで漸く，高校で習った積分のお話を閉じることができる．特に，置換積分と部分積分は高校で習った通りに成り立つ．

命題 3.4.8 (置換積分) （置換積分）有限閉区間 $[\alpha, \beta]$ の C^1-級関数 $\varphi(t)$ があり，$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ （$a \ne b$）であって，$\alpha < t < \beta$ では $\varphi(t)$ は a, b の間にあるとする．このとき，区間 $[a, b]$ または $[b, a]$ 上の連続関数 $f(x)$ に対して

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(t)\bigr)\,\varphi'(t)\,dt \tag{3.4.25}$$

命題 3.4.9 (部分積分) （置換積分）有限閉区間 $[a, b]$ の C^1-級関数 $f(x), g(x)$ に対して

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Bigl[f(x)g(x)\Bigr]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx \tag{3.4.26}$$

3.5 指数関数と対数関数

これまでの知識を用いて，高校で習った指数関数と対数関数を（数学的に厳密に）定義しておく[21]．詳細は教科書の 3.4 節を参照のこと．

[21] 指数関数や対数関数の定義には,「テイラー展開」を用いることも可能だ.「テイラー展開」を用いる方法とこの節の方法が同等であることは,「級数」についてもう少し習ってからなら簡単に証明できる．

- まず，$x > 0$ に対して，対数関数 $\log x$ を

$$\log x := \int_1^1 \frac{1}{u} du \tag{3.5.1}$$

の定積分で定義する（この積分が定義できることは，$1/u$ が連続であることから保証される）．

- この定理から直ちに，log の基本的性質が導かれる．
  - $\log 1 = 0$
  - $\log x$ は $(0, \infty)$ で何回でも微分可能．特に $(\log x)' = 1/x$.
  - $x, y > 0$ に対して $\log(xy) = \log x + \log y$
  - $\log x$ は x の狭義単調増加関数で $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$， $\lim_{x\to+0} \log x = -\infty$.
- $y = \log x$ の逆関数を $y = \exp x$ と書いて，x の指数関数と呼ぶ.（具体的に書けば以下の通り）$\log x$ の単調性から，任意の実数 y に対して $y = \log x$ となる正の実数 x が一意に定まる．そこで，この y から x への写像（関数）を y の指数関数として定義し，$x = \exp y$ と書く．
- $\exp 1$ という特別な数を「自然対数の底」とよび，e と書く．
  - $\exp 0 = 1$
  - $\exp x$ は $(-\infty, \infty)$ で何回でも微分可能．更に $(\exp x)' = \exp x$.
  - 実数 x, y に対して $\exp(x + y) = (\exp x) \times (\exp y)$
  - $\exp x$ は x の狭義単調増加関数で $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$， $\lim_{x\to+\infty} \exp x = \infty$.
- 正の実数 a に対し，

$$a^x := \exp(x \log a) \tag{3.5.2}$$

と定義する．

- a^x の諸性質は $e^x = \exp x$ に準じるので略（詳細は教科書 p.107）．
- α が実数，$x > 0$ の時，

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha\, x^{\alpha-1} \tag{3.5.3}$$

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & (\alpha \neq -1) \\ \\ \log x & (\alpha = -1) \end{cases} \tag{3.5.4}$$

- $e = \exp 1$ は高校で習った極限ともちろん，一致する．

$$\lim_{x\to\infty} \Bigl(1 + \frac{1}{x}\Bigr)^x = e \tag{3.5.5}$$

このプリントは未だに作成中である（2009.06.16 現在）．下敷きにしたのは一昨年まで数学科用に使っていたプリントなので，ところどころ皆さん向けでないところもある．そのような部分は大体は直したが，講義では触れられない部分を補う意味で残したところもある．春学期は大体，このくらいまでやる予定なのだが，果たしてここまで来れるだろうか...