期末テスト（8/5）の解答編（微積 A, 2009.08.09）

ネットでの公開を考え，得点分布や全体的な講評はここには載せません．これらは答案返却時（後期開始第一回目の予定）にお知らせします．

問 1： ともかく計算します．

$$a)\ \ -\frac{e^x+2x\cos(x^2)}{\{e^x+\sin(x^2)\}^2} \qquad b)\ \ \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} \qquad c)\ \ \frac{\pi}{4} \qquad d)\ \ 2(e^2-1)$$

問 2：

(a) この極限は 1．なぜなら：

$$\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)^n=\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n \qquad \xrightarrow{n\to\infty} \qquad e^{-1}\times e=1$$

（別解）見たい数列の log をとって，log のテイラー展開を使うと

$$\log\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)^n=n\log\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)=n\times\Big(-\frac{1}{n^2}+O(n^{-4})\Big) \qquad \xrightarrow{n\to\infty} \qquad 0$$

なので，これの log を取る前のものは，1 に収束．

(b) 以下のように変形すると：

$$\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}+1} \qquad \xrightarrow{n\to\infty} \qquad \frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(c) 以下のように書いてみる：

$$\frac{n^n}{n!}=\frac{n}{n}\times\frac{n}{n-1}\times\frac{n}{n-2}\times\cdots\times\frac{n}{3}\times\frac{n}{2}\times\frac{n}{1}$$

ここでかけ算の**各因子は** 1 **以上**であり，かつ，最後の項は n である．つまり，**上の比は** n **以上**である．よって，これは無限大に発散する．

問 3：

(1) 教科書の p.82 のようにして計算するのが楽．もちろん，$\tan x$ を微分しまくって定義から作ってもよい．答えは $\tan x=x+\dfrac{x^3}{3}+O(x^5)$.

(2) 定義通りに作っていって $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+O(x^4)$.

(3) 上の結果を x で割って，$h(x)=1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+O(x^3)$.

- (1), (2) は勉強した人はちゃんとできていたと思います．
- 意外だったのは (3) で，どうも難しく考えすぎたみたいですね．$h(x)$ をそのままテイラー展開しようとすると死にますから，問題にもこの (3) については「テイラー展開」とは一言も書かなかったんですけども…

問 4：

a_n について：　$\alpha > 1$ で収束，$\alpha \leq 1$ で発散する．

（$\alpha > 1$ の場合の解析）まず，この数列は正の項の和だから n **について単調増加**である．よって，この数列が**上に有界**であることが言えれば，収束が言える．さて，上に有界であることの証明だが，例えば積分を用いて

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = 1 + \frac{1 - n^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$$

と評価してやる．これは $\alpha > 1$ かつ $n \geq 2$ なら，$n^{1-\alpha} < 1$ なので

$$a_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

となって，上に有界．

（$\alpha \leq 1$ の場合の解析）この場合は，a_n が無限大に発散することを言いたい．そこで，上と類似の（でも**向きが逆の**）不等式を以下のように作る．

$$a_n \geq \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx$$

この右辺は，$\alpha = 1$ なら

$$\int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n$$

で，これは $n \to \infty$ で無限大にいく．また，$\alpha < 1$ なら

$$\int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1 - n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} = 1 + \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha}$$

と計算できるが，これは $n \to \infty$ で無限大にいく．よっていずれの場合も a_n が無限大にいくことが示せた．

b_n について：これはすべての $\alpha > 0$ で収束する．ちょっとややこしいので，粗筋をまず説明しよう．

(1) まず，b_{2n}（$n = 1, 2, 3, \ldots$）に注目し，これが**単調減少**であることをいう．
(2) また，b_{2n} が**下に有界**であることをいう．これで $\{b_{2n}\}$ が収束することは示せた．
(3) 最後に，$b_{2n} - b_{2n-1} \longrightarrow 0$ を示す．これで，b_{2n} と b_{2n-1} が**同じ極限を持つ**ことが言えて，結局 b_n が収束することがわかる．

以下，上の各ステップを説明する．簡単なのから行こう．

(3) について：これは $b_{2n} - b_{2n-1} = -\dfrac{1}{(2n)^\alpha}$ に注目すれば，上のがゼロにいくことからすぐにわかる．

(1) について：b_{2n} を以下のように書き直す：

$$b_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^\alpha} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^\alpha} = -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(2k-1)^\alpha} - \frac{1}{(2k)^\alpha} \right)$$

和の中身は $\alpha > 0$ なら正だから，これは単調減少．

(2) について：最も簡単な手は，b_{2n} を以下のようにまとめることだ．

$$\begin{aligned} b_{2n} &= -\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} - \frac{1}{5^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \\ &= -\frac{1}{1^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha} \right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} - \frac{1}{5^\alpha} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2n-2)^\alpha} - \frac{1}{(2n-1)^\alpha} \right) + \frac{1}{(2n)^\alpha} \end{aligned}$$

上の括弧の中はすべて正だから，これらを取り去ったものよりも b_{2n} の方が大きい．つまり，

$$b_{2n} \geq -\frac{1}{1^\alpha} + 0 + 0 + \cdots + 0 + \frac{1}{(2n)^\alpha} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{(2n)^\alpha} \geq -1$$

となって，確かに下に有界である．

(2)（b_{2n} が下に有界であること）の別証明：上で示した方法はちょっと技巧的ですが，地道に積分とテイラー展開のアイディアを用いてもできます．

$$-b_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(2k-1)^\alpha} - \frac{1}{(2k)^\alpha}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(2k)^\alpha - (2k-1)^\alpha}{(2k-1)^\alpha\,(2k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^\alpha}\left\{1-\left(1-\frac{1}{2k}\right)^\alpha\right\}$$

と書き直すことはいつでもできる．この後ろの中括弧のなかは 1 以下だから，

$$-b_{2n} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{(2x-1)^\alpha}dx$$

とできる．これは $\alpha > 1$ で有界なことは (1) と同じなので，$\alpha > 1$ での有界性はこれで言えた．

問題は $0 < \alpha \leq 1$ の時であるが，このためには，中括弧の中身をもっと精密に考える必要がある．有界かどうかは，k の大きいところで決まる．k が大きければ $\frac{1}{2k}$ は非常に小さく，中括弧そのものも小さいことが考えられる —— そのためにこの和が有界になるのではないか？

このアイディアを試すために，$(1-x)^\alpha$ のテイラー展開を考える：

$$\left(1-\frac{1}{2k}\right)^\alpha \approx 1 - \frac{\alpha}{2k} + O(k^{-2}) \qquad \Longrightarrow \qquad 1-\left(1-\frac{1}{2k}\right)^\alpha \approx \frac{\alpha}{2k} + O(k^{-2})$$

従って，

$$-b_{2n} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^\alpha}\left\{\frac{\alpha}{2k} + O(k^{-2})\right\} \leq \sum_{k=1}^{n}\{c_1 k^{-1-\alpha} + O(k^{-2-\alpha})\}$$

と評価できる．右辺の和は $\alpha > 0$ なら有界だから，$-b_{2n}$ も有界である． □

なお，上のテイラー展開による評価が何となく気持ち悪い人は，以下の不等式を証明して用いてもよい．この不等式自身，テイラー展開にヒントを得て得られるものである：

$$0 < x < 1 \quad \text{かつ} \quad \alpha > 0 \qquad \text{にては} \qquad (1-x)^\alpha \geq 1 - 2\alpha x$$

- まあ，そこそこ大変だったでしょうかね... 上では不等式を使った厳密な証明を示しましたが，ここのところは多少いい加減でもかなりの点数をだしています．厳密な議論も時には大事ですが，まずはあるていどのオーダー評価であっても，正しく収束・発散の区別をつけられることが重要ですから．

問 5： この問のヒントは問 3 だったんですが，気づいた人はあまりいなかったようですね．

(1) 問 3 の (1) から

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + O(x^5)$$

であるし，

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

も知っている．ので，これらから

$$\tan(x^2) - (\sin x)^2 = x^2 + \frac{x^6}{3} + O(x^{10}) - \left(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\right)^2 = \frac{x^4}{3} + O(x^6).$$

よって，求める極限は

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}+O(x^6)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{3}+O(x^2)\Big)=\frac{1}{3}.$$

(2) 問 3 の (3) から

$$\log\Big((1+x)^{\frac{1}{x}}\Big)=\frac{1}{x}\log(1+x)=1-\frac{x}{2}+O(x^2)$$

だから，

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\exp\Big[\log\Big((1+x)^{\frac{1}{x}}\Big)\Big]=\exp\Big(1-\frac{x}{2}+O(x^2)\Big)$$

である．$X=-\frac{x}{2}+O(x^2)$ と思って $e^X=1+X+O(X^2)$ を用いると，上のは

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\cdot e^X=e\Big(1-\frac{x}{2}+O(x^2)\Big)=e-\frac{ex}{2}+O(x^2)$$

となる．よって，これと e の差をとって x でわれば，

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=-\frac{e}{2}+O(x)\qquad\xrightarrow{x\to 0}\qquad -\frac{e}{2}.$$