2009.4.15.

微分積分学・同演習 A　(S1-20 クラス)

担当：原　隆（数理学研究院）：六本松 3-312 号室，tel: 092-726-4774,　e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp,
http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html
Office hours: 講義終了後に質問を受け付けます．メイルでの質問も歓迎.

概要：この講義は秋学期の「微分積分学 B」とあわせて完成する．春学期の「微分積分学 A」ではまず「偏微分」の定義だけを非常に簡単に学習する．そのあとで『本格的な大学の数学』に入り,「極限とは何か（その厳密な定義)」「1 変数関数の微分とその応用」「1 変数函数の積分」などを扱う．秋学期には「1 変数関数の積分」（の残り，特に広義積分）,「多変数関数の微分」および「級数論」を扱う予定.

春学期でキーとなる概念：偏微分，極限,(ϵ-δ 論法）,（コーシー列），微分，テイラー展開，積分

秋学期でキーとなる概念：極限，級数，積分，偏微分，級数，微分方程式

特に講義を通して身につけて欲しいこと：この講義で学んでほしい「能力」は以下の２つである.

- 微分や積分のいろいろな概念を習得し，実際に応用して使えるようになること
- その際，単にやり方を覚えるのではなく，自分の議論に自信が持てるようになること.

従来，高校までの数学では主に最初の面に力点が置かれていた．ところが，昨今の中学，高校でのカリキュラムの制約上，その最初の面ですら，練習不足と思われる学生さんが増えている．また,「この問題はこのように解けば良い」ことは知っているけども,「その方法がなぜ正しいのか」が説明できない人（「本当にその方法で良いのか，自信ある？」と問いかけると固まってしまう人）も多いようだ．そこで，この講義ではそのような練習不足を補いつつ，この方法はなぜ正しいのか，が説明できる人を養成することを目指す.

内容予定：（以下は大体の目安です．皆さんの理解度により，ある程度の変更や増減はあり得ます.）

0. 物理などの講義のために「偏微分」の記号の説明（初回に定義のみ；偏微分は秋学期にちゃんとやります.）

I. 極限，連続性，微分（7 回程度）

1. 極限の厳密な定義：ϵ-N 論法，ϵ-δ 論法（教科書 2.1 節）.
2. 連続性（教科書 2.2 節）
   (a) 実数の連続性と有界単調列の収束（お話だけ？）
   (b) 連続関数の定義，最大値最小値の定理，中間値の定理
3. 微分の厳密な定義（定義だけ）と平均値の定理（教科書 2.3 節）
4. 関数の増減と凹凸（教科書 2.4 節）
5. テイラーの定理とテイラー展開（教科書 2.5 節）$\longleftarrow$ 案外，引っかかるかもしれないから要注意

この辺りで中間試験

II. 1 変数函数の定積分（4 回程度）

1. いくつかの基本概念（一様連続性，上限と下限；教科書 3.1 節）
2. 定積分の定義（教科書 3.2 節）
3. 定積分の基本性質（教科書 3.3 節）
4. 数 e および指数関数，対数関数（教科書 3.4 節）

この辺りで期末試験でしょう.

教科書：斉藤正彦「微分積分学」（東京図書）．実はこの本の前身であった「微分積分教科書」というのを教科書にしたかったのだが，絶版になってしまった．ともかくしっかりした良い本です.

参考書：上の教科書は今時の学生さんにも読みやすいものとして選んだ．ただ，ところどころ記述が簡潔すぎたりしてわかりにくい面もあるかもしれない．もっといろいろと調べたい場合には，以下の本をお薦めする.

- 高木貞治「解析概論」（岩波）．今の学生さんには難しすぎる，との意見もあるが，不朽の名著だ．超お奨め.
- 小平邦彦「解析入門 I, II」（岩波）．上の解析概論を少しとっつきやすくした感じ．激しくお奨め.

- 杉浦光夫「解析入門 1, 2」（東大出版会）．かなり分厚いけど，その分，記述は丁寧．お奨め．
- 田島一郎「解析入門」（岩波書店） 1 変数の場合に限って，特に ϵ-δ 論法など，かゆいところに手が届くように書いてある．自習に適しているだろう．お奨め．
- 溝畑茂「数学解析　上・下」（朝倉書店）．かなりユニークな本である．特に，微分と積分が渾然一体となって展開される点は非常に面白い．読み応えは非常にあってお奨めだが，最初はかなり難しいと感じるだろう．

以上の教科書，参考書は「田島本」「小平本」などと引用する事がある．

評価方法：中間試験（＋レポート）と 期末試験 の成績を総合して評価する．そのルールは以下の通り：

- 最終成績は一旦，１００点満点に換算してから，この大学の様式に従ってつける．
- その１００点満点（最終素点）は，以下のように計算する．
  - まず,「中間試験（＋レポート）の点」「期末試験の点」をそれぞれ 100 点満点で出す．
  - 次にこの２つを以下の式で「平均」し，一応の総合点を出す：

$$(\text{総合点 } A) = 0.50 \times (\text{中間（＋レポート）の点}) + 0.50 \times (\text{期末の点})$$

$$(\text{総合点 } B) = 0.10 \times (\text{中間（＋レポート）の点}) + 0.90 \times (\text{期末の点})$$

  - ただし，上の重みを若干変更する可能性はある（総合点 A で，中間と期末の比を $4 : 6$ にするなど）．
  - 最終素点は

$$(\text{最終素点}) = \max\{\, (\text{総合点 } A), (\text{総合点 } B)\,\}$$

    とする．つまり,（総合点 A）と（総合点 B）を比べて，良い方をとる のだ．
- 上の「最終素点」に，必要ならば全体に少し修正を加えたものをつくり，最終成績を出す．
- レポートの点は原則として，総合点 A, B には加えない．ただし，上の計算では合格基準に少し足りない人（百点満点で 10 点不足が限度）を助けるかどうかに使用する．また，レポートがずば抜けて良い場合，この事実は最終成績に反映される事もある．

（期末一発逆転の可能性について）

- この講義では（上位 10%の人だけがわかるような）進んだ話題はあまり扱わない．そのため,「できる」人が退屈することも考えられる．退屈した人には自主的な学習を奨める意味で，講義などに出なくても「期末で一発逆転」も可能なようにした．
- ただし,「期末の一発勝負」がうまくいく人はほとんどいないだろう（期末試験は中間試験やレポートよりは難しい）から，あくまで自己責任で やってくれ．期末の一発勝負に出て成績が悪くても，苦情は一切受け付けない！(できる人が少ないにもかかわらずこの形式をとるのは，僕の美学にこだわっているからである.）

「学習到達度再調査」について：

この大学には「学習到達度再調査」とかいう，変な制度がある．この科目は必修科目でもあり，これに変に期待する人がいるかもしれないので，ここではっきり，宣言しておこう．

> 「再調査」は行わない可能性もある．再調査を行うか，誰を対象とするかは，こちらの一存で（もちろん公平に，しかし厳しく）決めさせていただく．

本音を言うと，再調査をする方が，こちらとしては厳しく点を付けやすい（厳しくつけておいて，誰を助けるかは再調査できちんと確かめれば良いから）．その分，皆さんには過酷なものになるでしょう．

だから，再調査には頼らず，期末試験まででちゃんと合格できるよう，しっかり学習して下さい．期末試験までなら皆さんの学習を助ける努力は惜しまないつもりで，質問などにも忍耐強く相手することを保証する．

合格（最低）基準：

合格のための条件（A, B がとれる条件ではない！）は，講義中に出題する例題，レポート問題と同レベルの問題が解けることである.（ただし「時間がなくてレポートは出せないけど試験には出すぞ」などの指示を講義中に与えることもあり得る.）具体的には大体，以下のようになる（進度の都合で内容に若干の変更があるので，完全なリストを現時点で呈示する事はできないが，講義を追っておれば明らかになるはず）．

- １変数関数の微分とその応用について，厳密性を少し犠牲にしても良いから，計算ができること（具体的には，導関数の計算，函数の増減と極値問題，逆関数の計算，テイラー展開など）．
- 1 変数函数の積分とその応用についても，厳密性を少し犠牲にしても良いから，計算ができること．

レポート，宿題について：

ほぼ毎回，簡単なレポートや「お奨めの宿題問題」を出す予定である．このレポートは次回の講義時に集めて，その次の週の講義時に返却の予定．これらの出題意図は「この程度できれば講義についていけるし，合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること，である．成績評価に占めるレポートの比重は低いが，この講義をこなす上では重要な意味があるので，是非やること．

重要：レポートは友達と相談した結果を書いても良い．ただし，誰と相談したかは明記すること．(「俺は人に教えてやっただけで人からは全く教わってない」と思う人は書かなくても良いが.）相談した人の名前を書かせるのは,「お世話になった文献，人にはきちんと感謝する」という，学問上の最低ルールを守ってもらうためである．なお，**お世話になった人の名前を書いてもレポートの成績が不利になることはない**.

プリントの使いかた：

例年，僕は講義でプリントを配っていた．これらのプリントは板書にアップアップしないでも講義が聴けるように，また，教科書の足りないところを補うためだった．

ところが今学期から伊都での講義になり，僕の研究室が六本松にあるという最悪の組み合わせのため，分厚いプリントはなかなか印刷しにくい．また例年，プリントの残りが教室の後ろに散乱したり，プリントを受け取っても読まない人も案外いたりした．

このような理由のため，今年から講義の補助プリントはこの講義の web page に上げておいて，皆さんに自由にダウンロードしてもらう方法に変更し，講義では最低限のプリント（日々のレポート問題など）のみを配ることとする．この講義のアドレスは http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/˜hara/lectures/09/biseki20a.html である．

なお，急いで作っているためにプリントにはタイプミスなどがかなりあると思うので，気づいたらできるだけ指摘してくれるとありがたい．

特に注意を要する題材：

１．この講義で一番難しいであろうことは，極限の厳密理論で，かなりの人が戸惑うでしょう．これはそんなに難しいものではなく，ゆっくり考えればさえすれば誰でも理解できます．しかし，新学期早々にここで立ち直れなくなっても困るので，これは簡単にすませます．興味のある人は，個別に質問するなど，して下さい．なお，**「理系コア科目：数学 II」**ではこの辺りの題材に関して，もっと進んだ話題を取り扱う可能性が高いです（講師の方が「出席者の様子を見て内容を決める」とおっしゃっているので確言はできませんが）．

２．この講義の大きな目的は「使える微積分を学ぶ」ことで，実際に手を動かす（計算する）ことが大事です．

３．この講義の大半は,「高校でやったことのやり直し」に見えるかもしれませんが，ここに落とし穴があります．色々な題材が，少しずつ進化していて，油断していると全くわからなくなってる可能性がありますから，注意．

4. テイラー展開は高校では見なかったはずのもので，案外とまどう人が多いことに気づきました．一見簡単そうですが，油断しないで下さい．

この科目に関するルール：

世相の移り変わりは激しく，僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました．そのうちのいくつかは良いことですが，悪いこともあります．オヤジだとの反発は覚悟の上で，互いの利益のために，以下のルールを定めます．

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強すること であると確認する．
- 講義中の 私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している 他の学生さんへの 最低限のエチケットです．
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける．

- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕のホームページも使う —— アドレスは http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html）.「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切，受け付けない.
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う.
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.kyushu-u.ac.jp）. ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい. なお，学生さんのメイルが往々にして spam mail に分類されてしまう事があります（多分，html mail で送られてくると自動的にスパムにされてしまうのだろう）. 見分け易いように，題名には「工学部の○○です」などと書いて下さい. また僕にメイルしたのに，２，３日しても返事がない場合は返事を催促して下さい. たとえどんなに理不尽（例：人格攻撃）なメイルであっても，僕は返事はすることにしています. 返事がないのはメイルが届いていない可能性が高いです.

演習書の奨め：

教科書の例題や節末問題，章末問題はできるだけやること. それでもわかった気がしなかったら，演習書（いわゆる問題集）をやることを勧めます. 問題をやることによって，自分が曖昧にしかわかっていなかった部分がはっきりしてくることが多い. ただし，その際，**解答を鵜呑みにはせず，自分で納得するまで考えること. 考えてもわからなかったら，友達や教官（僕を含む）に訊けばよい**. 同じ理由で 問題の解答を頭から覚える愚だけは避ける 事.

演習書はどれでも良いが，一応，目についたものを列挙すると：

- 三村征雄編「大学演習 微分積分学」（裳華房）— 僕はこれを使った. ちょっとムズイかもね.
- 蟹江，桑垣，笠原「演習詳説 微分積分学」（培風館）— なかなか良いが，はじめは難しく感じるかも.
- 杉浦ほか「解析演習」（東大出版会） — これもまあ，大変ではありますが，良い本.
- 鶴丸ほか「微分積分 — 解説と演習」（内田老鶴圃） — 一番「普通」かも.
- 飯高茂監修「微積分と集合　そのまま使える答えの書き方」（講談社サイエンティフィック） — 題名は変だけど，馬鹿にはできない，なかなかの本. 流石は飯高さん監修だけあるな. 案外，おすすめ.

これ以外にもいくらでも出版されてるから，図書館や本屋さんで自分にあった（読みやすい，やる気になる）ものを選べば良い. ただしその際，解答や解説の詳しいもの がよい. また，無理をして難しすぎるものを選ぶ必要はない. 自分が簡単だと思うことでも，(人間はアホやから）わかってないことが一杯あり，むしろ簡単なところが盲点になって先に進めないのだ. 簡単な演習書でもやれば，大きな効果があるはず.

本論に入る前に記号のお約束.

$a < b$ を２つの実数，n を非負（負でない）整数とする.

- 整数の全体は $\mathbb{Z}$，自然数（1 以上の整数）の全体を $\mathbb{N}$，有理数の全体を $\mathbb{Q}$，実数の全体は $\mathbb{R}$ と書く.
- 集合 A の要素を大学では「元（げん）」ともいう. (例) 2 は $\mathbb{Z}$ の元である. $\sqrt{2}$ は $\mathbb{Q}$ の元ではない.
- 高校までと異なり,「$a < b$ または $a = b$」を $a \le b$ と書く. 同様に,「$a > b$ または $a = b$」を $a \ge b$ と書く.
- $a < x < b$ なるすべての実数の集合を (a, b) と書き，開区間 という. 教科書ではこの開区間に変な記号（括弧のうえに○がついてる）を使ってるが，打ち込むのが大変だし，標準的ではないので使わない.
- $a \le x \le b$ なるすべての実数の集合を $[a, b]$ と書き，閉区間 という.
- 高校と同じく，$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ は n の階乗 である. ただし，$0! = 1$ と約束する.

(用語の注）あるものがたった一通りに決まる（存在する）とき，業界用語では○○**が一意に決まる（存在する）**という. この表現『一意』は頻出するから覚えよう（英語の unique, uniquely の訳）.

4 月 22 日：今日は極限の話．厳密な話は「これぞ大学の数学」ですが，ちょっと難しく感じる人もいるでしょう．その場合には諦めずに「高校のノリに毛の生えた程度」でも良いから大筋をつかむようにして下さい．

第 1 回レポート問題： 今回は極限について，簡単な計算（高校の復習），および少しだけ厳密な話です．問 1, 2 で問題番号や数列の名前が変なのは，Web にあげた「講義ノート」と同じにしたためです．
なお，*印のついた問題は進んだ話題なので，できなくても悲観するには及びません．

問 1： 以下の数列の $n \to \infty$ での極限を，高校のノリで（厳密性にはあまりこだわらずに）求めよ．ただし，極限の存在しない数列も混じっているかもしれないよ．

$$g_n = \frac{\sin n}{n} \qquad h_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad p_n = \frac{2n+1}{n+1} \qquad q_n = \frac{1}{\log(n+1)} \tag{1}$$

問 2： 以下の極限を，高校のノリで求めよ（a はゼロでない定数）．ただし，極限が存在しないものも混じっているかもしれないのは上の問いと同じ．

$$4)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} \qquad 6)\ \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \qquad 7)\ \lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} \qquad 8)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \tag{2}$$

以下は極限の厳密な定義に関する，少し進んだレベルの問題である．できなくても悲観する必要は全くない．でも興味と意欲のある人は挑戦してほしい．

問 3*： 「すべての $\epsilon > 0$ に対して」の意味を実感する問題．以下の (i),(ii) のうち，どれが正しくてどれが正しくないか，判定せよ．正しくないと思うものには反例（正しくない例）を与えよ．(a, b, x は未知の定数で，もちろん，ϵ には依存しない)．

(i) (すべての $\epsilon > 0$ に対して $|a-b| < \epsilon$) $\implies$ $a = b$

(ii) (ある $\epsilon > 0$ に対して $|a-b| < \epsilon$) $\implies$ $a = b$

問 4*： 以下の小問に答えよ．(本当は n は正の整数のつもりだが，小問 1), 2) では n は正の実数と思って良い．つまり，条件を満たすような正の実数 n の範囲を求めればよい．)

1) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} < 10^{-2}$ となる n の範囲を求めよ．

2) $\epsilon > 0$ を非常に小さい正の実数として，$\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$ となる n の範囲を ϵ を用いて表せ．

3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ を，ϵ-N 論法を用いて求めよ．その際，$N(\epsilon)$ をどのようにとれば良いかを明記する事．

問 5*： 数列 $a_n := \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ の $n \to \infty$ での極限を，ϵ-N 論法を用いて求めよ．その際，$N(\epsilon)$ をどのようにとれば良いかを明記する事．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について： レポートは

5 月 13 日（水）4 限の授業開始時に，

集めます．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．
また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

5 月 13 日：今日も極限の話．あまり深入りはしませんが，今週もおつきあいくだされ．

第 2 回レポート問題： 今回も前回に引きつづき，極限についての簡単な計算（高校の復習），および少しだけ厳密な話です．
問題番号は今学期とおしての通し番号にしています．
なお，*印のついた問題は進んだ話題なので，できなくても悲観するには及びません．

問 6： 以下の極限を，高校のノリで（厳密性にはあまりこだわらずに）求めよ．

$$(1)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} \qquad (2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} \qquad (3)\quad \lim_{x\to 0}\ x\,\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

以下は極限の厳密な定義に関する，少し進んだレベルの問題である．できなくても悲観する必要は全くない．でも興味と意欲のある人は挑戦してほしい．

問 7*： $\lim_{x\to 1}(x^3+3x)$ を，ϵ-δ 論法によって求めよ． この場合，最良の $\delta(\epsilon)$ を使う必要は全くない．計算し易いように ϵ,δ を制限しても良い（もちろん，本当に見たい ϵ の範囲は入っている必要があるが）．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：提出方法を変更しました !! レポートは

5 月 19 日（火）の 3:00 PM までに，
全学教育教務課のボックス（42 番）に

入れて下さい． 整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

参考書追加： 最近出た本で，
磯崎洋，筧知之，木下保，籠屋恵嗣，砂川秀明，竹山美宏著
「微積分学入門 — 例題をとおして学ぶ解析学」（培風館）
というのがあります．かなり情けない題名ではありますが，材料は良く取捨選択されており，また例題の解説も詳しいです．教科書が難しすぎると感じている人，良い演習書が欲しいと思っている人は，一度見てみても損はないと思います．

5 月 20 日：今日は有界単調列，連続性などの話．ある程度抽象的な話は今日でおしまいです．来週からは具体的な計算になって，かなりおもむきが異なります．

第 3 回レポート問題：

問 8： 以下の数列が収束するか否かを判定せよ．ただし，極限値は求めなくてもよい．(つまり，極限がわからなくても使える収束の判定法を用いよう，ということだ.）

(1) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$　(2) $b_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$　(3) $c_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$　(4*) $d_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

(3) はちょっと難しく見えるかもしれないが，少し工夫するとできる．(4) も似たような問題ではあるが，もう少し工夫が必要．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：提出方法は前回と同様です．
レポートは

5 月 26 日（火）の 3:00 PM までに，
全学教育教務課のボックス（42 番）に

入れて下さい． 整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

―――――――――――――――――――――先週と先々週のレポートの略解―――――――――――――――――――

問 1： $|g_n| \le 1/n$ なので，$n \to \infty$ ではこれはゼロに収束．
$h_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ なので，これもゼロに収束．
$p_n = 2 - \frac{1}{n+1}$ なので，これは 2 に収束．
$\log(n+1)$ は無限大に行くので，この逆数である q_n はゼロに収束．

問 2：

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1, \qquad \lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a} = \lim_{x\to a}(x^2+xa+a^2) = 3a^2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1$$

なお，$\sin(\dfrac{1}{x})$ は -1 と 1 の間を振動し続けるので，収束しない．

問 3：
(i) 正しい．もし，$a \ne b$ だとすると，$\epsilon = (b-a)/2$ に対しては $|a-b| < \epsilon$ がなりたたないから，題意に反する．
(ii) 誤り．勝手な $a \ne b$ を持って来たとき，$\epsilon = 2|b-a|$ ととれば，$|a-b| < \epsilon$ がなりたってしまうから．

問 4： 1) $n > 10000$　2) $n > \epsilon^{-2}$
3) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $N = \epsilon^{-2}$ ととると，

$$n > N \quad \text{ならば} \quad \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}} = \epsilon$$

がなりたつ．これは $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ を ϵ-N で書いたものに他ならない．従って，この極限は 0.

問 5： （裏の計算）まず，極限は 1 と予想する．更に，極限値と数列の差は

$$\Bigl|\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}-1\Bigr|=\frac{1}{1+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

であるので，これが ϵ より小さいためには，問 [4] でやったように，$n>\epsilon^{-2}$ なら十分である.（裏の計算，終わり）

（表）任意の $\epsilon>0$ に対して $N=\epsilon^{-2}$ ととると，

$$n>N \quad ならば \quad \Bigl|\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}-1\Bigr|=\frac{1}{1+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{N}}=\epsilon$$

がなりたつ．これは $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}=1$ を ϵ-N で書いたものに他ならない．よって極限は 1 である.

問 6：

(1) $f(x)=e^x-1-x-x^2/2$ とおくと，

$$f'(x)=e^x-1-x,\quad f''(x)=e^x-1$$

である．特に，$x>0$ では $f''(x)>0$ である．また，$f'(0)=f(0)=0$ でもあるので，これらから $x>0$ では $f'(x)>0$，$f(x)>0$ がわかる．つまり，$x>0$ では

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2},\qquad \frac{e^x}{x}>1+\frac{x}{2}$$

である．この右辺は $x\to\infty$ で無限大に行くから，e^x/x も無限大に行く.

（注意）講義の中で注意したように，ある函数 $g(x)$ が $x\to\infty$ で無限大に行くことを言うには，$g'(x)>0$ のみでは足りない（反例はたとえば，$g(x)=1-1/x$）．この問題では e^x が x よりも「速く」無限大に行くことを言う必要があるので，上の解答例では $e^x\geq x^2/2$ を示した.

(2)

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)^2}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{1+\cos x}=1\times0=0$$

(3) これは問 [1] の g_n と実質的に同じ．極限は 0.

問 7： （裏の計算）極限値の予想は 4．それで $|x^3+3x-4|=|x-1|\times|x^2+x+4|$ であることを利用して，この量が ϵ より小さくなる x の範囲（十分条件）を求めたい.

$|x-1|<1$ の範囲のみを考えると，この場合，$0<x<2$ であるから，

$$|x^3+3x-4|=|x-1|\,|x^2+x+4|<10|x-1|$$

がなりたつ．つまり，$|x-1|$ を $\epsilon/10$ より小さくとれば，上の量は ϵ よりも小さくなる.

（表）任意の $\epsilon>0$ に対して $\delta=\min\{1,\epsilon/10\}$ ととると，

$$|x-1|<\delta \quad では \quad |x^3+3x-4|=|x-1|\,|x^2+x+4|<\delta\times10\leq\frac{\epsilon}{10}\times10=\epsilon$$

がなりたつ．これは $\lim_{x\to1}(x^3+3x)=4$ を ϵ-δ で書いたものに他ならない．よって，極限は 4 である.

5 月 27 日：今日から微分に入ります．まず初日の今日は，ほとんど高校の復習みたいなもんですが，まあ，聞いて下さい．
大事な相談：6 月 9 日（火曜）の 3 限に補講を入れたいと考えていますが，皆さんの都合は如何ですか？

第 4 回レポート問題：

問 9： （return match!）以下の数列が収束するか否かを判定せよ．

$$(1) \quad a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \qquad\qquad (2^*) \quad b_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}}$$

問 10： （高校の復習）以下の導関数を計算せよ．f' と f'' はもちろん，f の一階，二階の導関数を表す．

$$(1) \quad f(x) := \cos(x^3) \qquad \text{に対して} \qquad f'(x) \quad \text{と} \quad f''(x)$$
$$(2) \quad g(x) := \left(e^{x^2}+1\right)^3 \qquad \text{に対して} \qquad g'(x)$$

上で e^{x^2} とは，指数関数の肩に x^2 が乗っているものである．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：レポートは

6 月 2 日（火）の 3:00 PM までに，
全学教育教務課のボックス（42 番）に

入れて下さい． 整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

―――――― 先週のレポートの略解 ――――――

問 8： ううむ，あまり出来が良くなかったですねえ．最後の注意も参照して下さい．

(1)

$$\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \log(k+1) - \log(k)$$

の両辺を $k=1$ から $k=n$ まで足して，

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq log(n+1) - \log(1) = \log(n+1)$$

である．右辺は $n \to \infty$ で無限大に行くから，a_n も無限大に行く．

(2) まず，b_n は単調増加であることに注意する．次に，

$$\frac{1}{k^2} = \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^2} dx \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2} dx$$

の両辺を $k=2$ から $k=n$ まで足して，

$$b_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{n}$$

つまり，$b_n \leq 1+1=2$ で上に有界．よって単調増加かつ有界である b_n は収束する．

(3) この問題も次の問題も，問題の数列はそのままでは単調ではない．n が偶数，奇数で分けて考え，後で両者が同じ極限に行くことを示す．

n が偶数のとき，$n=2m$ と書くと，

$$c_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{-1}{2l-1} + \frac{1}{2l} \right) = -\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{2l(2l-1)}$$

これは単調減少であり，また，以下に示すように下に有界である．従って，c_{2m} は $m \to \infty$ で収束する.（下に有界の証明は以下の通り）

$$\sum_{l=2}^{m} \frac{1}{2l(2l-1)} \leq \int_1^m \frac{1}{2x(2x-1)} dx = \int_1^m \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x} \right) dx = \frac{1}{2} \log\left(\frac{2m-1}{2m} \right) + \frac{1}{2} \log 2 \leq \frac{1}{2} \log 2.$$

次に，n が奇数の時であるが，$n=2m+1$ と書くと，

$$c_{2m+1} - c_{2m} = -\frac{1}{2m+1}$$

であって，この差は $m \to \infty$ でゼロに行く．c_{2m} が収束するので，c_{2m+1} も同じ極限に収束する．

結果として，c_n は，n が偶数でも奇数でも同じ極限に収束する．なお，この極限の値は $-\log 2$ であるが，なぜなのかは「テーラー展開」を学べばわかる.（もっと巧妙に $-\log 2$ を出す方法もあるが，ここでは触れない.）ともかく，ここで大事なことは極限値そのものよりも，この数列が収束する（理由を述べられる）ことだ．

(4) この問題も (3) と同じように解ける．

まず，n が偶数のとき，$n=2m$ と書くと，(3) と同様にして

$$d_{2m} = \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{-1}{\sqrt{2l-1}} + \frac{1}{\sqrt{2l}} \right) = -\sum_{l=1}^{m} \frac{\sqrt{2l} - \sqrt{2l-1}}{\sqrt{2l-1}\,\sqrt{2l}} = -\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2l-1}\,\sqrt{2l}\,(\sqrt{2l} + \sqrt{2l-1})}$$

これは単調減少である．また，

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2l-1}\,\sqrt{2l}\,(\sqrt{2l} + \sqrt{2l-1})} \leq \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{(\sqrt{2l-1})^3} \leq 1 + \int_1^m \frac{1}{(\sqrt{2x-1})^3} dx = 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \leq 2$$

であるため，d_{2m} は下に有界．従って，d_{2m} は収束する．

また，

$$d_{2m+1} - d_{2m} = -\frac{1}{\sqrt{2m+1}} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (m \to \infty)$$

なので，d_{2m+1} も d_{2m} と同じ極限に収束する．

結果として，d_n は収束する．

特に注意：

- 数列の収束をいうには，有界性だけでも単調性だけでも不足で，**両方が必要**です．当たり前に見えたのかもしれないけど，この両方はきちんと念を押しましょう．
- この問題のような和の場合，和の中身の各項がゼロに行っても，和の結果が有界とは限りません（(1) のように）．この点，間違った人が半数くらいいたので，よくよく，注意して下さい．
- (3), (4) については，(a) n が偶数だけの場合は完璧に解答しつつ n が奇数の場合を忘れたり，または (b) 両方の場合が収束することを示しながらも，両方の極限が同じ値になることをチェックしてなかったりした人がかなり，いました．この点も気を付けて下さい．

6 月 3 日：今日はテイラーの定理とテイラー展開です．高校ではやってないはずなので，しっかり勉強して下さい．
先週相談した通り，**6 月 9 日（火曜）の 3 限に補講**を入れます．場所は 2209 です．
また，6/24 に中間試験を行う予定です．

第 5 回レポート問題： すみません．風邪が治りきってなくて，根性無しの問題ですが，一回は自分で手を動かしてやっておくべきものです．

問 11：（テイラー展開の計算問題）以下の関数を，$x = 0$ の周りでテイラー展開した場合の，最初のゼロでない 3 項を求めよ．

$$f(x) = e^x, \qquad g(x) = \sin(x), \qquad h(x) = \cos(x), \qquad p(x) = \sqrt{1+x}$$

問 12：（テイラー展開の応用）

(1) $f(x) = \sin(x)$ を，$x = a$ の周りでテイラー展開した場合の，最初の 3 項を求めよ．ここで a は定数である．

(2) $\sin(31°)$ の値を小数点以下 2 桁まで正確に求めよ（$31°$ とは度数法 —— 円周一周が $360°$ —— での角度である）．この際，$\sin(x)$ の $x = \pi/6$ の周りでのテイラー展開を用いて考えると良い．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：レポートは,

6 月 9 日（火）の 3:00 PM までに,
全学教育教務課のボックス（42 番）に

入れて下さい. ただし，この日は補講なので，補講の際に手渡してくれても構いません．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法（ただし，クリップは不可）で綴じてくだされ．

―――――――――――― 先週のレポートの略解 ――――――――――――

問 9：

(1) まず，この数列は**単調増加**である．さらに，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \le 1 + \int_1^n \frac{1}{x^3} dx = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{3}{2}$$

であるから，**上に有界**である．よって，収束する．

(2) この数列は単調ではないので，少し工夫が必要である．まず，b_{2n} を考えると，

$$b_{2n} = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2l-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2l}} \right)$$

と書けて，これは負の数の和だから，b_{2n} は n について**単調減少**．次に，以下に示すように，b_{2n} が**下に有界**であることを証明する．この 2 つから，b_{2n} が収束することがわかる．

最後に，

$$b_{2n-1} - b_{2n} = \frac{1}{\sqrt[3]{2n}} \longrightarrow 0$$

であるから，b_{2n+1} も b_{2n} と同じ極限に収束する．よって，数列 b_n は収束する．

b_{2n} が下に有界であることの証明．これには何通りかやり方がある．

（方法 1）

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}=\frac{b-a}{ab}\times\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+ab+b^2}=\frac{b^3-a^3}{ab(a^2+ab+b^2)}$$

を用いて（$a=\sqrt[3]{2l-1}, b=\sqrt[3]{2l}$）

$$\frac{-1}{\sqrt[3]{2l-1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2l}}=\frac{-\sqrt[3]{2l}+\sqrt[3]{2l-1}}{\sqrt[3]{2l-1}\ \sqrt[3]{2l}}=\frac{-1}{\sqrt[3]{2l-1}\ \sqrt[3]{2l}\,(\sqrt[3]{2l-1}^2+\sqrt[3]{2l-1}\,\sqrt[3]{2l}+\sqrt[3]{2l}^2)}$$

と変形した後で積分に直して評価する．この際，馬鹿正直に上の項をすべて評価する必要はなく，例えば，

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2l-1}\ \sqrt[3]{2l}\,(\sqrt[3]{2l-1}^2+\sqrt[3]{2l-1}\,\sqrt[3]{2l}+\sqrt[3]{2l}^2)}\le\frac{1}{\sqrt[3]{2l-1}\ \sqrt[3]{2l}\ \sqrt[3]{2l-1}^2}\le\frac{1}{\sqrt[3]{2l-1}^4}=(2l-1)^{-4/3}$$

などとして評価すればよろしい．

（方法 2）もう一つの手は，（上のような変形はなかなか大変だから）偶数項と奇数項の和を別々に念入りに評価することである．すなわち，

$$b_{2n}=-\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{2l-1}}+\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{2l}}$$

であるので，第一項と第二項をそれぞれ（下に有界といいたいので，示すべき不等式の向きをうまく選ぶ）

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{2l-1}}=1+\sum_{l=2}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{2l-1}}\le 1+\int_1^n\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}dx=1+\int_1^n(2x-1)^{-1/3}dx=1+\frac{3}{4}\{(2n-1)^{2/3}-1\}$$

$$\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{2l}}\ge\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{2x}}dx=\int_1^{n+1}(2x)^{-1/3}dx=\frac{3}{4}\{(2n+2)^{2/3}-2^{2/3}\}$$

と評価する．この 2 つから，

$$b_{2n}\ge-\left(1+\frac{3}{4}\{(2n-1)^{2/3}-1\}\right)+\frac{3}{4}\{(2n+2)^{2/3}-2^{2/3}\}\ge-1+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}2^{2/3}\ge-2$$

となって下に有界と言える．　□

問 12： 合成関数の微分の問題．順次やってくだけ．

$$f'(x)=-3x^2\sin(x^3),\qquad f''(x)=-6x\sin(x^3)-9x^4\cos(x^3)$$

$$g'(x)=3\big(e^{x^2}+1\big)^2\times e^{x^2}\times 2x=6x\,e^{x^2}\big(e^{x^2}+1\big)^2$$

また，レポートでは要求してないけど，

$$g''(x)=6e^{x^2}\big(e^{x^2}+1\big)^2+12x^2e^{x^2}\big(e^{x^2}+1\big)^2+24x^2e^{2x^2}\big(e^{x^2}+1\big)$$

だと思います...

6 月 10 日：今日はテイラーの定理とテイラー展開の 3 回めです．
昨日，予定通り，補講を行いました．
6/24 の 4 限（通常の授業時間）に中間試験を行う予定です．場所は 2404 （6/17 に　2404 に訂正）．範囲は大体，今日（6/10）の所までで，来週やる予定の「積分」は入りません．

第 6 回レポート問題：

問 13： （テイラー展開の計算問題）以下の関数を，$x=0$ の周りでテイラー展開した場合の，最初のゼロでない 3 項を求めよ．

$$f(x)=\sin(x^2),\qquad g(x)=\tan(x^3),\qquad h(x)=\sqrt{1+x^3},$$

問 14*： （テイラー展開の応用）次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}-2}{\tan(x^2)-\sin(x^2)}$$

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：レポートは，

6 月 16 日（火）の 3:00 PM までに，
全学教育教務課のボックス（42 番）に

入れて下さい． 整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法（ただし，クリップは不可）で綴じてくだされ．

——————先週のレポートの略解——————

問 11： ともかく計算するだけです．どのような形で回答したら良いのか，ちょっと僕の訊き方があいまいだったかもしれませんが，こちらの想定していたのは以下の通りです．

$$f(x)\approx 1+x+\frac{x^2}{2}\qquad g(x)\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\qquad h(x)\approx 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{x!}\qquad p(x)\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$$

f, g, h についてはほとんどの人ができていましたが，p は間違った人が多かったです．特に，x^2 の項の係数が 1/4 になってしまった人が多数いました．どうもテイラー展開に出てくる $n!$ を忘れたようです．要注意！

問 12： (1) これは単に計算して

$$\sin x\approx \sin a+(\cos a)(x-a)-\frac{\sin a}{2}(x-a)^2$$

(2) ここまで要求した訳ではないが，以下では厳密なやり方を与える．実は 31° というのはちょっと微妙で，小数点 2 桁目が四捨五入で 1 になるか 2 になるか，際どいところではあった．ので，ちょっと多めに項を考えに入れてやってみる．

誤差を正しく評価するため，上の展開の第 3 項を剰余項の形で正確に書くと

$$\sin x=\sin a+(\cos a)(x-a)-\frac{\sin\xi}{2}(x-a)^2$$

となる（ξ は a と x の間の数）．$x = 31^\circ = \frac{31}{180}\pi$ と $a = \frac{\pi}{6}$ を使うと，

$$\sin(31^\circ) = \sin\Big(\frac{\pi}{6}\Big) + \frac{\pi}{180} \times \cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{180}\Big)^2 \times \sin\xi \qquad (\xi \text{ は } \frac{\pi}{6} \text{ と } \frac{31}{180}\pi \text{ の間})$$

を得る．

後はこれを計算するだけ．

$$\sin\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{1}{2}, \qquad \cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

はもちろん，用いる．また，

$$\frac{\pi}{6} \le \xi \le \frac{31}{180}\pi \qquad \text{なので} \qquad \frac{1}{2} \le \sin\xi \le \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

でもある．従って，

$$\sin(31^\circ) \ge \frac{1}{2} + \frac{\pi}{180} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{180}\Big)^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.5150072962$$

および，

$$\sin(31^\circ) \le \frac{1}{2} + \frac{\pi}{180} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{180}\Big)^2 \times \frac{1}{2} \approx 0.5150388403$$

である．つまり，

$$\sin(31^\circ) \approx 0.5150 \approx 0.52$$

というのが答え．

（おまけ）もう一項とると，

$$\sin x = \sin a + (\cos a)(x-a) - \frac{\sin a}{2}(x-a)^2 - \frac{\cos\xi}{6}(x-a)^3$$

であるから（ξ は a と x の間の数），$x = 31^\circ = \frac{31}{180}\pi$ と $a = \frac{\pi}{6}$ を使うと，

$$\sin(31^\circ) = \sin\Big(\frac{\pi}{6}\Big) + \frac{\pi}{180} \times \cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{180}\Big)^2 \times \sin\Big(\frac{\pi}{6}\Big) - \frac{1}{6}\Big(\frac{\pi}{180}\Big)^3 \times \cos\xi \qquad (\xi \text{ は } \frac{\pi}{6} \text{ と } \frac{31}{180}\pi \text{ の間})$$

を得る．

$$\frac{\pi}{6} \le \xi \le \frac{31}{180}\pi \qquad \text{なので} \qquad 1 \ge \cos\xi \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$$

を用いると，上と同様にして

$$0.5150379542 \le \sin(31^\circ) \le 0.5150380729$$

を得る．つまり，

$$\sin(31^\circ) \approx 0.515038 \approx 0.52$$

というのが答え．もう一項取ることで，有効数字が 2 桁伸びた．

なお，小数点以下 30 桁目を四捨五入した正確な値は

$$\sin(31^\circ) \approx 0.51503\,80749\,10054\,21008\,16319\,36398$$

だそうです（僕のマックに訊きました）．

なお，$\sin x, \cos x$ については，テイラー展開を途中までで切った和が，これらの関数の上界と下界になっている．たとえば，

$$\sin x \le x, \qquad \sin x \ge x - \frac{x^3}{3!}, \qquad \sin x \le x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \qquad \sin x \ge x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}, \qquad \ldots$$

これを証明するには，両辺の差をとって，どんどん微分すればよい（高校までの知識で十分にできる；やったことがある人もいるかもしれない）．

6 月 17 日：今日は積分に入ります．
来週の水曜 6/24 の 4 限（通常の授業時間）に中間試験を行う予定です．場所は 2404 （6/17 の夜に 2404 に訂正）．範囲は大体，前回（6/10）の所までで，今週やる予定の「積分」は入りません．

――――――――先週のレポートの略解――――――――

問 13： できるだけ，手を抜いて（つまり，効率の良いやり方で）やりましょう．

$f(x)$ について．

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + O(t^7)$$

であるところに $t = x^2$ を代入して

$$\sin(t) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + O(x^{14})$$

が答え．

$g(x)$ について．
ともかく，$\tan(t)$ の展開を求めた上で，$t = x^3$ とおきましょう．

$$\tan(t) = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + O(t^7)}{1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + O(t^6)}$$

である．分母を扱うために $X = \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + O(t^6)$ として考えると，分母は

$$\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + O(X^3) = 1 + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^4}{4} + O(t^6) = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{5}{24}t^4 + O(t^6)$$

とわかる．従って

$$\tan(t) = \Big(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + O(t^7)\Big) \times \Big(1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{5}{24}t^4 + O(t^6)\Big) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + O(t^7)$$

が得られる．従って，

$$\tan(x^3) = x^3 + \frac{1}{3}x^9 + \frac{2}{15}x^{15} + O(x^{21})$$

が答え．

$h(x)$ について．
前回，

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$$

を得たので，$t = x^3$ として

$$\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + O(x^9)$$

を得る．

問 14： ともかく，分母子ともにテイラー展開しよう．どのくらいの次数までやるべきかは，やってみないとわからないが，まあ，x^6 や x^9 くらいまで見てみて，足りなかったらまた考える．

分母は

$$\tan(t) - \sin(t) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + O(t^7) - \left\{t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + O(t^7) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{8}t^5 + O(t^7)\right\}$$

より

$$\tan(x^2) - \sin(x^2) = \frac{1}{2}x^6 + O(x^{10}).$$

（分母，分子とも，ゼロでない最初の項まで見れば十分であるので，x^6 までをとった.）

分子も同様に，

$$\sqrt{1+x^3} + \sqrt{1-x^3} - 2 = 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + O(x^9) + \left\{1 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + O(x^9)\right\} - 2 = -\frac{1}{4}x^6 + O(x^9)$$

とわかる．従って，求める極限は

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4}x^6 + O(x^9)}{\frac{1}{2}x^6 + O(x^{10})} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{4} + O(x^3)}{\frac{1}{2} + O(x^4)} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

とわかる．

（注）闇雲にロピタルを使おうとすると，たいていの人は死ぬと思います...