実数の構成に関するノート*

原　隆　（九州大学数理学研究院）
hara@math.kyushu-u.ac.jp

Last updated: June 16, 2009

概 要

これは僕の微積の講義ノートの付録として，また「数学 II」の補助ノートとして，実数論の初歩を書いたものです．具体的には「有理数の切断」としての実数の構成を 2 章で，また「コーシー列の同値類」としての実数の構成を 3 章で論じた後，両者が基本的に同値なものである事を 4 章で述べました．そのあと，更に舞台を拡げて，実数の公理を満たす体は本質的に一つに決まることを簡単に 5 章で説明してあります．

（おことわり）当初（2006 年度）は 1 年生にも読める参考文献を僕が知らなかったので，このノートが講義の役に立てばと思って書き始めました．しかし，2006 年の学期の終わりにさしかかって疲れがでてきた上に，良い参考文献がたくさんあることに気づいたので，完結したノートとして完成させる根性がなくなってしまいました．一旦勢いがなくなると物事が進まなくなるのは世の常．という訳でいくつかの部分は不完全のママです．(例：切断による構成において加法がちゃんと定義できている事の証明は，先に乗法のものを書いてしまったので，書き直す気力がなくそのままに)．

（2008.06.15 記）初版から 2 年が経過しましたが，あまり改良はされていません．重要なミスは直した（特に第 2 章まで）つもりですが，細かいタイポはいくらでも隠れているとは思います（今日もいくつか見つけました）．気をつけてお使いください．

目 次

*九州大学 2006〜2008 年春学期「数学 II」への補足

1 はじめに

実数というのは有理数と無理数を合わせたものであること，無理数も有理数も無限個あること，などは高校でもやったはずだ．しかし，これでは無理数の個々の例（$\sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \pi, \ldots$）を挙げているだけで「無理数の全体」「実数の全体」がわからない（構成できていない）．このようなええ加減な態度では，微積分のもとになる「実数の連続性」が成り立つのか，全くわからない．実数の連続性がなければ中間値の定理も，有界単調数列の収束も，コーシー列の収束も，すべて言えなくなって非常に困る．

そこでこのノートでは有理数から出発して，「実数の全体」を構成するやり方を説明する．またその構成によって解析学には不可欠の「実数の連続性」がどのように証明されるか，またそれから「上限と下限の存在」がどのように出てくるか，も説明する．ただし，整数と有理数については既知のものとしてやっていく．（マニアックな「整数の構成」などには立ち入らない．）

実数の構成法にはいろいろな方法がある．一つは「デデキントの切断」を用いるやり方，もう一つは「コーシー列の同値類」として構成する方法，その他にも「区間縮小法」を用いる方法などがある．このうち，最も簡潔なのは デデキントの切断 を用いるやり方だろうから，以下の 2 章ではこれを解説する．一方，コーシー列の同値類 として定義する方法は実数のみならず，より高度な「完備な関数空間」の定義にも使え，現代解析学の大きな武器の一つとなっている．そこで，この方法を 3 章で解説する．（ただし，読者の大半が数学科ではない 1 年生である事を考慮し，「ノルム空間の完備化」については一切触れない．）続いて，この ２つの構成が同等 なものである（実質的に同じ実数の集合を定義する）ことを 4 章で解説する．最後に，実数は本質的に一通りに決まる事，つまり，実数の公理をみたす数の体系は本質的に一つに定まる事を 5 章で示す．5 章の内容がわかれば 4 章の内容は不要ということになるが，泥臭いやり方にも存在意義があろうと考えて 4 章も残しておく事にした．

なお，「区間縮小法」による構成はこのノートでは取り扱わないので，最後に掲げた参考文献などを適宜見られたい．

（お断り）

以下のノートは，非常に泥臭く，冗長である．かっこいい「飛び道具」はできるだけ避け，大学一年当時の僕が疑問に思ったところを，当時の僕が理解できたはずの言葉で丁寧に説明している[1]．より簡潔なやり方があることを僕が自覚している場合も，敢えて泥臭くやった部分もある．講義との密着性，読みやすさ，という点ではこのようなノートにも存在意義はあるだろうが，反面，数学としての簡明さ，美しさからはほど遠いものとなってしまった．

[1]実際，このノートの大半はできるだけ参考文献を見ないようにして，大学入学時の僕になったつもりで書きおろした．（もう少し正確に言うと，このノートは高木本 [7]，小平本 [6] を参考にしてこの２冊を補完するものとして書き始めた．しかしこれらの本では乗法や除法の前に極限を扱っており，これは講義の進め方とは異なる．そこで結局，大半は自分で書き下す事になった．2 章の前半が小平本に酷似しているのはそのせいである．）敢えて書下ろした理由は，既存の参考文献があまりに「かっこ良く」まとまり過ぎており，それに影響されて僕のノートも変に「かっこ良く」なってしまうのを恐れたためである —— そうなってしまえば，以下のノートの代わりに文献を読んでもらえば良いことになる．その他に，以下で挙げるような参考書が手に入ったのはこのノートをほとんど書き終えてからだった，という実際的な理由もある

従って，より簡潔な「かっこいい」解説を望む人はこのノートは無視して，最後にまとめて掲げた参考文献を参照される事を強く奨める．それにまた，簡潔な解説を読んで概要をつかんでから細部を考えるのは有効な戦略の一つでもあるから，その意味でも最後に掲げた参考文献を読む事が推奨される．ただし，これらの文献には格好よくまとまり過ぎたものが多く,「微積 A」や「数学 II」のレベルで読んでもらうのにはちょっと難しいかもしれない．これらの参考文献が難しいと感じられた人には，このノートも何らかの参考にはなるかもしれない．

(記号の約束)

- 部分集合の記号 $A \subset B$ とは，日本での慣習に従い，$A = B$ も含める事にする．
- $\mathbb{Z}$ は整数の全体，$\mathbb{Q}$ は有理数の全体，$\mathbb{R}$ は実数の全体（実数はこれから構成する）．
- $\mathbb{Q}_+ := \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > 0\}$（正の有理数の全体）である．
- 大体，$a, b, q, r, x, y, \alpha, \beta$ など普通の字体は有理数を表す．ただし，最後の 5 章ではこれらの約束にこだわらず，独自の表記法を用いる（その内容が他の章とは少し異なるので）．
- 一方，これから構成する実数は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ などと太字で表す．
- さらに有理数には主に a, b, q, r などを用い，実数には $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ などギリシャ文字を用いて区別を明確にするよう心がけるが，実数の列を考える場合には $\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ などと書く事もある．
- 上でも書いたが，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とは列 $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ のことである[2]．これを単に $\{a_n\}$ と書くこともある．
- なお,「溝畑本」「小平本」などは最後に掲げる溝畑茂，小平邦彦などの本をさす．

1.1 実数の公理

以下では実数を具体的に構成するが，その目標（最終到達点）を掲げておく．通常、実数というのは以下の公理を満たすもの（数）の集合をいう．

公理 1.1.1 (実数の公理) 「実数」の集合とは，以下をみたすような「数」の集合 K のことである.（なお，実数の集合は普通 $\mathbb{R}$ と書かれるが，この公理では抽象的な公理を満たす数の体のつもりで K とした.）

I) 四則演算に関する性質．

1. K の任意の 2 元 α, β に対して、その「和」$\alpha + \beta \in K$ が一意に定まる．
   - $\alpha + \beta = \beta + \alpha$（交換法則）が成り立つ．
   - $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ （結合法則）が成り立つ．
   - 特別な数 $0 \in K$ が存在して，任意の $\alpha \in K$ に対して $\alpha + 0 = \alpha$ をみたす（ゼロ元，つまり加法の単位元の存在）．
   - 任意の $\alpha \in K$ に対して，$\alpha + (-\alpha) = 0$ となる $-\alpha \in K$ が一意に存在する（加法の逆元の存在）．

   なお，$\alpha + (-\beta)$ を $\alpha - \beta$ と略記する．
2. K の任意の 2 元 α, β に対して、その「積」$\alpha\beta \in K$ が一意に定まる．
   - $\alpha\beta = \beta\alpha$（交換法則）が成り立つ．
   - $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ （結合法則）が成り立つ．
   - $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ （分配法則）が成り立つ．
   - 特別な数 $1 \in K$ が存在して，任意の $\alpha \in K$ に対して $\alpha 1 = \alpha$ をみたす（乗法の単位元の存在）．
   - 任意の $\alpha \in K, \alpha \neq 0$ に対して，$\alpha(1/\alpha) = 1$ となる $1/\alpha \in K$ が一意に存在する（逆数，つまり乗法の逆元の存在）．

   なお，$\alpha(1/\beta)$ を α/β と書く（除法の定義）．

   これで加減乗除が K 内で定義された．上の性質は K が「体」である事を示している．

II) 順序に関する性質．

[2] うるさいことをいうと，数学で $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ と書くと要素 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ を持った集合の事を指し，その要素の順序は問題にしない．でも数列を考える場合には要素の順序はもちろん、大事だ．だから，これは本来 $(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ と丸かっこを使って書くべきだ．しかし，慣習として { と } を使って書いている本が多いので，このノートでもそれに従う

1. K の任意の 2 元 α, β に対して，$\alpha < \beta$，$\alpha = \beta$，$\alpha > \beta$ のうちの 1 つだけが必ず成り立つ（全順序関係）.
    - $\alpha < \beta$ または $\alpha = \beta$ の時には $\alpha \le \beta$ と書く.
    - $\alpha \le \beta$ かつ $\beta \le \gamma$ ならば $\alpha \le \gamma$ である（推移律）. この意味で K は全順序集合である.
2. 四則演算と順序は両立している. つまり，
    - $\alpha \le \beta$ ならば $\alpha + \gamma \le \beta + \gamma$ である.
    - $\alpha \le \beta$ かつ $\gamma \ge 0$ ならば $\alpha\gamma \le \beta\gamma$ である.
3. $\alpha > 0$ のとき，α は正の数という. $\alpha < 0$ のとき，α は負の数という.
4. $\alpha \in K$ の絶対値 $|\alpha|$ を以下のように定義する：

$$|\alpha| := \begin{cases} \alpha & (\alpha \ge 0) \\ -\alpha & (\alpha < 0) \end{cases} \tag{1.1.1}$$

III) 連続性に関する公理：K の上に（下に）有界な部分集合 A には，かならず上限（下限）$\alpha = \sup A$ が K 内に存在する. なお，ここで使われている言葉の定義は以下の通り（上限について述べるが，下界がどうなるかは簡単に予想できるだろう）：

- $A \subset K$ に対して,「すべての $\alpha \in A$ に対して $\alpha \le x$」となるような $x \in K$ が存在すれば，この x を A の上界という.
- $A \subset K$ の上界がすくなくとも一つ存在するような場合，A は上に有界という.
- $A \subset K$ が上に有界の場合を考える. A の上界のうちで最小のもの，つまり任意の「A の上界」β に対して $\alpha \le \beta$ を満たすような A の上界が存在するなら，それを A の上限（$\sup A$）という.

実数の連続性の表現には同値なものがいろいろある. 上に掲げた「上限の存在」もその一つだが、その他に代表的なものとして

- デデキントの切断を用いて,「実数の切断には II 型か III 型しかない」とやるもの
- 「アルキメデスの公理」＋「区間縮小法の原理」をいうもの
- 「アルキメデスの公理」＋「コーシー列は必ず収束する」とやるもの

などがある. 通常はデデキントの切断によるものを連続性の公理とするようだが，微分積分学に直結しているものとして上限に関するものを書いた.「デデキントの切断」の性質から上の「上限」の公理を出すのは以下の 2.8 節で説明する. また，コーシー列による構成から上の「上限」の公理を出すのは以下の 3.7 節で説明する. また，コーシー列による構成とデデキントの切断による構成が同等である事は 4 章で示す.「上限の存在」からコーシー列の収束を示すのは通常の微積の講義での一つの山場だから，このノートでは省略するが，ともかくこのようにして「区間縮小法」以外の 3 つが同値である事は言える.（区間縮小法による構成ももちろん，同値だが，その証明についてはこのノートでは省略する.）

以下ではこのような公理をみたす集合 K の存在[3]，およびその一意性を証明する.

[3]与えられた公理系を満たすものが実際に存在する事の証明（その公理系が無矛盾であること）を馬鹿にしてはいけない.「(非常に美しい理論が展開できるという意味で）大変に素晴らしい公理系を提案したが，実はその公理系は矛盾を含んでおり，そのような公理系を満たすものがあり得ない事が後からわかった」という例は時々あるようである

2 実数の構成（デデキントの切断による）

この章では「デデキントの切断」の考えを用いて「実数」を構成する．また，その結果,「実数の連続性」がどのように実現されるのかも見る．

2.1 切断による実数の構成（定義）

この節では実数の集合を，有理数の集合から出発して定義する．有理数とはいうまでもなく，整数 p, q（ただし $q \neq 0$）によって p/q の形に書ける数のことである．有理数の集合の中では 加減乗除 が普通にできる（ただし，ゼロで割る事はできないけど）．また普通の 大小関係 も定義されている．この辺りは高校までの知識で十分なので，繰り返さない．

2.1.1 数の切断

実数の構成に向けての我々の出発点は以下の定義である．

定義 2.1.1 (数の切断) ある種類の数（例：有理数，整数など）の全体を 交わりがなく空集合でもない 二つの集合 A, A' に分け,「A に入っている数はすべて，A' に入っている数よりも小さい」とできたとき，この分け方 $\langle A, A' \rangle$ をその数の 切断 という．

切断という概念はすぐにはわかりにくいだろうから，整数と有理数ではどうなっているのかを見ておこう．

ア．整数の集合に切断 $\langle A, A' \rangle$ を導入すると，

(0 型) A の最大数，A' の最小数が共に存在する．(例：A は 0 以下の整数，A' は 1 以上の整数の集合；この事情は他のところでわけても同じである．また，上で「A' は 0 より大きい数」としてみたところで，0 より大きい整数は 1 以上だから，結局は A' の最小数 1 が存在してしまう.）

イ．有理数の集合に切断 $\langle A, A' \rangle$ を導入すると，

(I 型) A の最大数，A' の最小数がともに存在しない（例：$x > 0$ かつ $x^2 > 2$ なる有理数の集合を A' とし，$A = \mathbb{Q} \backslash A'$ とする．この例はもちろん，A は $\sqrt{2}$ より小さい有理数の集合，A' は $\sqrt{2}$ より大きい有理数の集合，のつもりだが，有理数だけで話を閉じさせるためにこのように回りくどく書いた.）．

(II 型) A の最大数は存在するけど，A' の最小数は存在しない（例：$x \leq 1$ なる有理数の全体を A，$x > 1$ なる有理数の全体を B）

(III 型) A の最大数は存在しないけど，A' の最小数は存在する（例：$x < 1$ なる有理数の全体を A，$x \geq 1$ なる有理数の全体を B）

の 3 通りがある．逆に整数の時の (0 型) はあり得ない！

これだけでも整数の全体と有理数の全体では，切断の実現のされ方が非常に異なっていることがわかる．また，上では形式論理から出る 4 つの可能性 (0)〜(III) がすべて現れていることにも注意しよう．

結論を先取りして書いておくと，実数に切断を導入すると (II), (III) のみになる．そして，(II), (III) の性質は「実数の連続性」そのものなのだ．というわけで，この付録の目標は，延々と実数を構成してから (II), (III) のみが起こることを証明する事にある．

では，実数の集合を実際に定義してみよう．

2.1.2 「有理数の切断」による実数の定義

「実数」の集合を以下のように構成（定義）する．

1．まず,「有理数の切断」$\langle A, A' \rangle$ を上の定義によって導入する．

２．A' の最小数が有理数として存在する場合，または A の最大数が有理数として存在する場合（上の (II 型),(III 型)），その最小数は有理数であるから，この切断 $\langle A, A'\rangle$ をその有理数と同じものとみなす（同一視）．もともとは切断として導入された $\langle A, A'\rangle$ をその境界の有理数と同じとみなす，というのには面食らうだろうし，これだけでは「数」のように見えないだろうが，これは追々，慣れて頂く．

２′．ただしこの際，同じ有理数 r に対して $A_1 = \{x \,|\, x \le r\}$ と $A_2 = \{x \,|\, x < r\}$ を考えると，$\langle A_1, A_1'\rangle$ と $\langle A_2, A_2'\rangle$ の２つの切断が存在する[4]．このどちらも，境界の値が r なので，同じ有理数 r を表すと思いたい．そこで上のような関係にある２つの切断は「同値」であるということにし，共に同じ有理数 r を表すものと以下では解釈する．なお，今までに考えてきた有理数 r がここで有理数の切断に格上げされたので，このように格上げされた（有理数の切断としての）有理数を $\boldsymbol{r}$ と太字で表す事にする．記号で書くと，$A_2 := \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q \le r\}$ と $A_3 := \{q \in \mathbb{Q} \,|\, q < r\}$ を定義したとき，$\boldsymbol{r} := \langle A_2, A_2'\rangle$ または $\langle A_3, A_3'\rangle$ ということである．

ともかく，今までは普通の数だった有理数を，このような「切断」と同一視するわけだ．

３．しかし，有理数の切断にはもう一つの可能性があった：A が最大数を持たず A' が最小数を持たない場合である（上の (I 型)）．この時は，$\boldsymbol{\alpha} := \langle A, A'\rangle$ そのものが新しい数（A と A' の境界として決まる無理数）を定義すると考える．例えば上の (I 型) の例，つまり $A := \{x \in \mathbb{Q} \,\big|\, x \le 0$ または $x^2 < 2\}$ によって作られる切断 $\langle A, A'\rangle$ は $\sqrt{2}$ という無理数を定義すると考える[5]．

３′．このような I 型の切断（A の最大数と A' の最小数が存在しないやつ）の全体を「無理数」の集合と定義する．

４．「有理数」と「無理数」を合わせた全体を「実数」の集合と定義する．

有理数の記法についての注意：我々は小学校以来，s/t（s, t は整数，$t \ne 0$）の形の割り算の結果として有理数を捉えてきたし，これが我々の集合 $\mathbb{Q}$ である．この「普通の」有理数は前にお約束した通り，r と書く．一方，上ではこの r に対応して２つの切断 $\langle A_2, A_2'\rangle, \langle A_3, A_3'\rangle$ が定義された．これは無理数を切断として定義するものと同じ思想にたったものであるが，ともかく，有理数には「普通の」有理数としての表し方 r と，上のように切断としての表し方 $\boldsymbol{r}$ の２通りが存在することになった．以下ではこのように，「普通の」有理数は r, s, t などと書き，これらに対応する切断（それぞれ II 型と III 型の２とおりあるのでひとまとめに考える）を $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ などと書く事にする．ただし，この区別を厳密にやるとかえって煩わしいので，本来 $\boldsymbol{r}$ と書くところを r とだけ書く事もある（例：この後で定義する「実数の順序」において，本来は切断として定義されたもの同士の比べ合いをするので $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r}$ と書くべきところを $\boldsymbol{\alpha} < r$ と書く，など．）

この段階では，「実数」とは有理数の切断としてのみ定義されていて，（ただし上でも注意したように，一つの有理数に対しては２つの切断が対応しているが），我々の知っているはずの四則演算などは全く定義されていない．また，順序関係も入っていない．これでは全然，「数」という感じがしないだろう．この問題を解決するのが，次の仕事である．

2.2 実数の順序

上のように構成した「実数」が我々の知っている（期待している）性質を満たしている事を，以下延々と示していく．まずこの節では順序を考える（小平「解析入門」の 1.2 節，b) に詳しい）．

上で実数とは有理数の切断 $\langle A, A'\rangle$ のことと定めた．そこでこの順序（大小）を以下のように定める．何をやってるのかわかりにくい人は図を書いて考えるのが良いだろう．ただしここで，実数は有理数の切断 $\langle A, A'\rangle$ のことだと言ってるけども，実際には A と A' の「境目」の数がその実数のつもりだと思えば，直感的にはわかりやすいと思う．

定義 2.2.1 (実数の大小を決める) ２つの実数（＝有理数の切断）$\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A'\rangle$ と $\boldsymbol{\beta} = \langle B, B'\rangle$ が与えられたとき

[4] 今，$\langle A_1, A_1'\rangle$ は有理数の切断だと言っているから，その定義から自動的に $A_1' := \mathbb{Q} \setminus A_1$ である．このように，切断を問題にするばあいは A または A' の片方のみを指定することが以下でもあるだろう

[5] 今までは A と A' の組だと思っていた $\langle A, A'\rangle$ が急に数に昇格するので非常に奇妙な感じがするだろうし，その直感は正しい．これが実際に「数」だと思えるためには，四則演算や大小関係など，様々なことをチェックする必要があり，実際にこの後の小節で延々と行って行く．この時点では「本当に数と思って良いかはわからないけど，そう思いたい」ととらえれば十分

その大小を

- 集合として $A \subset B$ ならば，実数として $\boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{\beta}$
- 集合として $A \supset B$ ならば，実数として $\boldsymbol{\alpha} \ge \boldsymbol{\beta}$
- 集合として $A = B$ なら，実数として $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$
- 集合として $A \subset B$ または $A \supset B$ であるが，切断 $\langle A, A' \rangle$ と $\langle B, B' \rangle$ が同じ有理数 r を表すとき（2.1.2 節の 2′）は有理数として $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} (= r)$

と定める．$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} (= r)$ のところがややこしくなったが，これは同じ有理数に２通りの切断が対応する事をきちんと書くために仕方ないだろう．更に，このように定めた大小について，

- $\boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{\beta}$ かつ $\boldsymbol{\beta} \le \boldsymbol{\alpha}$ ならば，$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$
- $\boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{\beta}$ であるけども $\boldsymbol{\beta} \le \boldsymbol{\alpha}$ ではないならば $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$
- $\boldsymbol{\beta} \le \boldsymbol{\alpha}$ であるけども $\boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{\beta}$ ではないならば $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$

と定める．

まあ，このように大小を定義したが，これが我々の知っている（望ましい）大小関係になっているかどうかは調べる必要がある．まず，有理数に相当する $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ に対しては，今までと同じ大小関係が成立することに注意しよう．（これは上の有理数の定義から，すぐに出る．）

これから，有理数とは限らない実数について，「大小関係」が持って欲しい性質をひとつずつ見ていく．

定理 2.2.2 (大小は必ず定まる；小平本の定理 1.1) ２つの実数 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ に対しては，以下の３つのうち一つだけが常に成立する：

$$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta} \tag{2.2.1}$$

（証明）$\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle$, $\boldsymbol{\beta} = \langle B, B' \rangle$ として，$A \subset B$ または $A \supset B$ の少なくとも一つが必ず成り立っていることを示そう．そのために，このどちらも成り立っていないと仮定する．これは $A \backslash B$ も $B \backslash A$ も共に空集合ではないことを意味する．つまり，$a \in A \backslash B$，$b \in B \backslash A$ となる a, b が存在する．

ところが，$a \in A \backslash B$ は特に $a \in B'$ を意味する（$\langle B, B' \rangle$ が切断だから）．同様に，$b \in B \backslash A$ は $b \in A'$ を意味する．しかし，$\langle A, A' \rangle$ が切断であるから，A の元は A' の元より小さくなければならない $\Longrightarrow a < b$ である．同様に，$\langle B, B' \rangle$ が切断だから、B の元は B' の元より小さい $\Longrightarrow b < a$ である．この２つは矛盾しているから，背理法によって $A \subset B$ または $A \supset B$ のどちらも成り立っていないことはあり得ない．

$A \subset B$ または $A \supset B$ が必ず成り立つなら，上の大小の定義から，(2.2.1) のどれか一つだけが必ず成り立つ事がすぐに言える．実際、$A \subset B$ かつ $A \supset B$ なら $A = B$ であるので，定義の３つ目の場合にあたる．残るは $A \subset B$ か $A \supset B$ のどちらか一つだけが成り立つ場合だが，これは上の定義 2.2.1 から，(1) $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ または (2) $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$ または (3) $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ が有理数，のどれか一つにあたることがわかる．いずれの場合も，(2.2.1) のどれか一つだけが必ず成り立っている． □

定理 2.2.3 (推移律；小平本の定理 1.2) 推移律が成り立つ：

$$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta} \text{ かつ } \boldsymbol{\beta} < \boldsymbol{\gamma} \qquad \text{ならば} \qquad \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\gamma} \tag{2.2.2}$$

（証明）$\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle, \boldsymbol{\beta} = \langle B, B' \rangle, \boldsymbol{\gamma} = \langle C, C' \rangle$ とする．$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ は $A \subsetneq B$，また $\boldsymbol{\beta} < \boldsymbol{\gamma}$ は $B \subsetneq C$ を意味するので，この２つから $A \subsetneq C$ がでる．これは $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\gamma}$ の大小の定義に戻って考えると，$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\gamma}$ を主張している． □

これくらいが成り立つ事を確かめれば，上で定義した大小関係が本当に我々の望むもの（通常，我々の使ってる「大小」と同じ）といって良いだろう．

後々のため，また直感を養うためにも，以下の事もここで証明しておく：

定理 2.2.4 ($\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle$ について，$\boldsymbol{\alpha}$ と A の関係；小平本の定理 1.3) 任意の無理数 $\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle$ に対して，

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\alpha}\}, \qquad A' = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, \boldsymbol{r} > \boldsymbol{\alpha}\} \tag{2.2.3}$$

が成り立つ．ここで $<$ などは定義 2.2.1 で導入された順序である．$\boldsymbol{\alpha}$ が有理数の場合は

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r < \alpha\}, \qquad A' = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \geq \alpha\} \tag{2.2.4}$$

または

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \leq \alpha\}, \qquad A' = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > \alpha\} \tag{2.2.5}$$

のどちらかが成り立っている（このどちらも同じ有理数を表すと考える事は既に約束した）．

（証明；この証明はかなり回りくどいが，書き直す気力がない．間違ってはいないと思うけど.）

α が有理数の場合は有理数 α を有理数の切断 $\boldsymbol{\alpha}$ と同一視する定義（A の最大数または A' の最小数が α そのもの）から，(2.2.4) か (2.2.5) がすぐにでる．よって，証明すべきは $\boldsymbol{\alpha}$ が無理数の場合である．

この定理の主張がアタリマエに見えて何を証明すべきなのかがわかりにくいかもしれないので，ちょっと丁寧に説明しておこう．

無理数 $\boldsymbol{\alpha}$ を考える．今までの進み方では，我々は無理数 $\boldsymbol{\alpha}$ とは単なる有理数の切断 $\langle A, A' \rangle$ だと思っている．思っているけども，ともかく定義 2.2.1 によって大小は定義した．そこで我々は

(1) A 中の任意の有理数 r を持ってきたとき，これが今定義した大小関係に従えば $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{\alpha}$ を満たすこと[6]

(2) A' 中の任意の有理数 r' を持ってきたとき，これが今定義した大小関係に従えば $\boldsymbol{r'} > \boldsymbol{\alpha}$ を満たすこと

を示したい．これはこの証明の最後の方で示す．

さて，(1) は $A \subset \{r \in \mathbb{Q} \,|\, \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\alpha}\}$ である[7]ことを主張する．また (2) は $A' \subset \{r' \in \mathbb{Q} \,|\, \boldsymbol{r'} > \boldsymbol{\alpha}\}$ を意味する．これだけではまだ定理の主張 (2.2.3) には遠いのだが，ここで $\langle A, A' \rangle$ が有理数の切断であったこと，つまり，$A \cup A' = \mathbb{Q}$ であったことを思い出すと，$A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\alpha}\}, A' = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, \boldsymbol{r} > \boldsymbol{\alpha}\}$ である事がわかる（証明は以下）．そのために，たとえば $A \subsetneqq \{r \in \mathbb{Q} \,|\, \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\alpha}\}$ だとして，矛盾を導こう．$A \subsetneqq \{r \in \mathbb{Q} \,|\, \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\alpha}\}$ であれば $\boldsymbol{r''} < \boldsymbol{\alpha}$ なる有理数で A の元でないものが存在することになるが，$\langle A, A' \rangle$ が有理数の切断だから $r'' \in A'$ ある．ところがこれは，すぐ上で示した $A' \subset \{r' \in \mathbb{Q} \,|\, \boldsymbol{r'} > \boldsymbol{\alpha}\}$（$A'$ の元はすべて $\boldsymbol{\alpha}$ よりも大きい）に矛盾するので，許されない．つまり背理法によって，$A \subsetneqq \{r \in \mathbb{Q} \,|\, \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\alpha}\}$ は許されないのである．同様に $A' \subsetneqq \{r \in \mathbb{Q} \,|\, \boldsymbol{r} > \boldsymbol{\alpha}\}$ も否定される．

では最後に，上の (1) と (2) を示そう．(1) と (2) はほとんど同じなので，(1) のみ示す．$r \in A$ として，$\boldsymbol{r} = \langle R, R' \rangle$, $\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle$ と表してみよう.（r の表現としては，(II) 型をとることにする.）切断の条件から，$s < r$ なる有理数 s はすべて A の元である．また，R は r 以下の有理数の全体である（有理数 r を切断 $\boldsymbol{r}$ と同一視する時の約束，2.1.2 節の２）．これから $R \subset A$ がわかる．後は $R \neq A$ を示せば，$R \subsetneqq A$ ということになって，証明が完成する．しかし，いまは無理数 $\boldsymbol{\alpha}$ を考えており，2.1.2 節での約束により，無理数とは A の最大数，A' の最小数が存在しないものであったから，$R = A$ はあり得ない.（R には最大数 r があるので，もし $A = R$ ならば $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{r}$ は有理数になってしまう.） □

定理 2.2.5 (有理数の稠密性；小平本の定理 1.4) 任意の２実数 $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ に対して，$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\beta}$ なる有理数 r が無数に存在する．

（証明）小平本のように奇麗にやるのが良いのだろうが，敢えて場合分けをして書いてみる．詳細に入る前に，$\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle, \boldsymbol{\beta} = \langle B, B' \rangle$ とすると，$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\beta}$ だから $A \subsetneqq B$ が成り立っていることに注意しておく．

(case-1) α, β 共に有理数のとき．この時は $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\alpha}$ として，$\alpha + \frac{\gamma j}{N}$ の形の数を考える（N は大きな整数，$0 < j < N$）．これは有理数であって，かつ α と β の間にある．N を大きくとればこのような有理数はいくらでも

[6] (2.2.3) でもここでも，$\boldsymbol{r}$ とは r を表す切断の組（お約束通り，II 型と III 型の２つある）のことである．始めの r は細いまま，後ろの r は太字になっているが，この意味するところは，前の細い r に対応する切断（の組）$\boldsymbol{r}$ を考えると，切断の大小の定義 2.2.1 に従って $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{\alpha}$ が成り立っている，ということだ

[7] 始めの r は細いまま，後ろの r は太字になっている理由は，上の脚注で説明した通りである

作れるから，$\alpha < r < \beta$ なる有理数は無数に存在する．(いまは α, β がともに有理数だから，j/N をかけたり，α を足したりする操作はすべて有理数の範囲での演算であり，問題はない.)

(case-2) α が有理数，$\boldsymbol{\beta}$ が無理数のとき．$\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle, \boldsymbol{\beta} = \langle B, B' \rangle$ とすると，$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ だから $A \subsetneq B$ であることは既に注意した．従って $B \backslash A$ は空集合ではない．ところが，$\boldsymbol{\beta}$ が無理数の場合は切断 $\langle B, B' \rangle$ は (I) 型であり，B の最大数は存在しない．空でない集合 $B \backslash A$ の最大数が存在しないので，その元は有限個ではあり得ない —— 有限個の要素からなる数の集合には必ず最大数が存在するから．つまり，$r \in B \backslash A$ となる有理数 r は無数に存在する．

ところで，定理 2.2.4 によると $B = \{ r \in \mathbb{Q} \,|\, \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\beta} \}$ であったから，$r \in B \backslash A$ となる有理数 r は $\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\beta}$ を満たす．よって，$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\beta}$ となる有理数は無数に存在する．

(case-3) $\boldsymbol{\alpha}$ が無理数，$\boldsymbol{\beta}$ が有理数のとき．上の (case-2) とほとんど同じなので，略.

(case-4) $\boldsymbol{\alpha}$ も $\boldsymbol{\beta}$ も無理数のとき．$\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle, \boldsymbol{\beta} = \langle B, B' \rangle$ とすると，$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ だから $A \subsetneq B$ であり，$B \backslash A$ は空集合でない．ところが，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ が無理数なので切断 $\langle A, A' \rangle, \langle B, B' \rangle$ は (I) 型であり，A, B の最大数は存在せず，$B \backslash A$ の最大数も存在しない．以下，(case-2) と同様に議論して，$\boldsymbol{\alpha} \leq \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\beta}$ となる有理数 r は無数に存在することが結論できる． □

定理 2.2.6 (実数は有理数でいくらでも精度良く近似できる；小平本の定理 1.5) 任意の実数 $\boldsymbol{\alpha}$ と任意の正整数 m に対して，$\boldsymbol{r} \leq \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r} + \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}$ となる有理数 r が存在する．

（証明）$\boldsymbol{\alpha}$ が有理数の時には $r = \alpha$ ととれば良いから，面白くない．以下では $\boldsymbol{\alpha}$ が無理数の時を考える．このとき，$\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle$ とすると，定理 2.2.4 により $A = \{ r \in \mathbb{Q} \,|\, \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\alpha} \}$ であった．そこで $r_0 \in A$ なる r_0 を好きなように決め，$r_j = r_0 + j/m$ を定義する（$j = 0, 1, 2, \ldots$）.

さて，十分大きな j では $r_j \in A'$ である．これを示すには，まず，$s \in A'$ なる有理数 s を一つ決める．すると，$j > m(s - r_0)$ では

$$r_j = r_0 + \frac{j}{m} > r_0 + s - r_0 = s \tag{2.2.6}$$

となるので，$r_j \in A'$ と結論できるのである．このような j の一つを J と書こう．

$r_0 \in A$ かつ十分大きい J で $r_J \in A'$，さらに $\langle A, A' \rangle$ が有理数の切断であった事から，0 と J の間のどこかの j では $r_j \in A$ しかし $r_{j+1} \in A'$ が成り立っているはずである．ここで定理 2.2.4 を思い出すと，これは

$$\boldsymbol{r_j} < \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r_{j+1}} \qquad \Longrightarrow \qquad r := r_j \text{ によって } \quad \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}} \tag{2.2.7}$$

を意味し，定理が証明された． □

次に，この大小関係を用いて，定義 2.1.1 に従って，実数の切断 を定義することができる．ただし，これは後々へ廻した方がきれいだと思うので，2.7 節に廻す（これは極限をやるまでは使わないから）.

2.3 実数の加減

先ほど，大小関係を定義し，それがうまく行ってる事を示した．今度は，加法と減法が定義できる事を示す（小平本の 1.3 節に詳しい）.

そのためにまず，有理数の集合 S, T に対して集合 $S + T$ を

$$S + T := \{ s + t \,|\, s \in S, t \in T \} \tag{2.3.1}$$

と定義する．すると有理数の切断 $\langle A, A' \rangle$ と $\langle B, B' \rangle$ が得られたとき，$S := A + B$ が定義できるから，これを用いて $S' := \mathbb{Q} \backslash S$ を定義し，更に組 $\langle S, S' \rangle$ を考えることができる．

ここで先走って $\langle S, S' \rangle$ と書いてしまったが，これが本当に有理数の切断になっている事をまずは証明しないといけない．この際に重要なことは「S に穴がないこと」つまり，$r \in S$ なら $r' < r$ なる任意の r' は S の元である事,

である．(これがないと，切断になってくれない)．しかしこれはすぐに言える[8]．よって，$\langle S, S'\rangle$ は有理数の切断であって，上の記号は正しく使われている．

さて，この S を用いて実数の加法を以下のように定義する．しつこいかもしれないが，今は「実数とは有理数の切断だ」との立場をとっている．従って，以下の加法も２つの「有理数の切断」から「加法」と呼ばれる演算で別の「有理数の切断」を定義する事，とする必要がある．

定義 2.3.1 (実数の和；小平本の定義 1.3) 任意の実数 $\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A'\rangle$ と $\boldsymbol{\beta} = \langle B, B'\rangle$ の和を，新しい有理数の切断

$$\sigma := \langle S, S'\rangle \qquad \text{ここで} \qquad S = A + B \tag{2.3.2}$$

によって，$\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{\sigma}$ と定義する．

（注意）上の加法の定義に倣って減法も $T := A - B$ という集合を用いて「切断」$\langle T, T'\rangle$ を $\alpha - \beta$ と定義したくなるが，これはダメである．実際，このように定義した T は有理数全体になってしまって定義にならない！減法は後で巧妙に定義する（定義 2.3.6）．

さて，加法の性質を調べる前に一つやるべきことがある．それは上の**加法がちゃんと定義できているのか**という問題だ．我々は有理数 r に対しては２通りの切断（II 型と III 型）が対応する事を既に知っているが，これらは同じ有理数を表すものと約束した．しかし足し算の定義で II 型と III 型のどちらを使っても，その結果がおなじ数になるかどうかは全く自明ではなく，これから確かめるべき事なのだ．

これは重要な問題で，その解決（証明）はかなり長くなる．本来はここにその証明を書くべきなのだが，和よりも積を先に考察した関係上，同様の問題を積の定義について考察したものが，既に定義 2.4.1 の後に長々と説明してある．そこで読者の方には申しわけないが，この問題については積についての同様の問題を考察した定義 2.4.1 の後の部分を読んで頂く事にしよう．

ともかく結論だけ書くと，有理数の表現が II 型と III 型の２通りあるにも関わらず，上で定義した和の結果は一通りに決まる．

以下，このように定義した和が我々の知っているものと同じであることを証明して行く．まず手始めに：

定理 2.3.2 (加法の結合則，交換則；小平本の定理 1.7) 加法について，結合則，交換則がなりたつ．つまり，任意の実数 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ に対して

$$\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\gamma) = (\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\gamma, \qquad \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha} \tag{2.3.3}$$

（証明）和の定義に従って，式の両辺がそれぞれどんな切断で表されるかを考えれば良い． □

更に，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ が有理数の時は，上の加法の定義は普通の有理数の足し算と一致する（小平本の p.19）．つまり，切断 $\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A'\rangle, \boldsymbol{\beta} = \langle B, B'\rangle$ が有理数 r, s を表している時は，新しい切断 $\langle S, S'\rangle$ はちゃんと（有理数の足し算として我々が知っている）$r + s$ を表している．

更に加法というからにはその単位元の存在をいう必要があるが，これは簡単である．

定理 2.3.3 (0 は加法の単位元) $\mathbf{0}$ は加法の単位元である：つまり任意の実数 $\boldsymbol{\alpha}$ に対し，$\mathbf{0} + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$

（証明）有理数 0 を表すはずの切断 $\mathbf{0} = \langle B, B'\rangle$ を導入して，実数を表す $\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A'\rangle$ との加法を上の定義に従って計算し，結果として上の式が成り立つ事を示せば良い． □

次に，加法の逆元 $-\boldsymbol{\alpha}$ を定義する：

定義 2.3.4 (加法の逆元の定義) 任意の実数 $\boldsymbol{\alpha}$ に対して $-\boldsymbol{\alpha}$ を

[8]実際，$r' < r$ で $r \in S = A + B$ であったとすると，てきとうな $a \in A$ と $b \in B$ を用いて $r = a + b$ と書けるはずである．そこで，$b' := b - (r - r')$ を考えると，$r - r' > 0$ であるので，$b' < b$ である．ところが $\langle B, B'\rangle$ が有理数の切断であったので，$b \in B$ ならば $b' \in B$ である．従って，$r' = a + b'$ は $a \in A$ と $b' \in B$ の和で書け，$r' \in A + B$ が結論できる

- $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{r}$（有理数）なら，$-\boldsymbol{\alpha} = -r$ （右辺は普通の有理数としての $-r$ に対応する切断）
- $\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle$ が無理数の場合は，

$$-\boldsymbol{\alpha} = \langle B, B' \rangle, \qquad B := \{-r \,|\, r \in A'\}, \quad B' := \{-r \,|\, r \in A\} \tag{2.3.4}$$

と定義する．

これは確かに加法の逆元になっている：

定理 2.3.5 (確かに加法の逆元；小平本の定理 1.8) $(-\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$

（証明）定義に従って計算してみせるだけである． □

これで $-\boldsymbol{\alpha}$ が加法の逆元になっている事が言えた．これで

定義 2.3.6 (減法の定義) 任意の実数 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ に対して $\boldsymbol{\alpha} + (-\boldsymbol{\beta})$ を $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$ と略記し，これを $\boldsymbol{\alpha}$ から $\boldsymbol{\beta}$ をひいたもの（減法の結果）と定義する．

定義 2.3.1 の後でも注意したように，減法はあくまで加法の逆演算として定義している．切断を直接使っているのではないことに注意．

更にいろいろの公式も出る（小平本の p.21）

$$-(-\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} \tag{2.3.5}$$

とかね．

最後に，加減と大小の重要な関係はチェックしておく必要がある：

定理 2.3.7 (加法は順序を保つ；小平本の定理 1.9)
(i) $\boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{\gamma}$ かつ $\boldsymbol{\beta} \le \boldsymbol{\delta}$ ならば $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \le \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\delta}$.
(ii) $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\gamma}$ かつ $\boldsymbol{\beta} \le \boldsymbol{\delta}$ ならば $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} < \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\delta}$.

段々と苦しくなってきたのでこの証明は省略する．とは言っても，切断を作っている A, B などの包含関係を地道に示せば良いだけだが．

この辺りまでやっておけば，後は高校までの知識でやれる．例えば，絶対値についての三角不等式 $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}| \le |\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|$ がでる．以上で加法と減法については話が完結した．

2.4 正の実数に乗法を入れる

これからいよいよ，実数の乗法と除法に入る．ところが，乗法や除法は正負の数を考えると非常にややこしい．つまり，正の数同士なら簡単なのだが，「正と負をかけると負」「負と負をかけると正」などと符号がコロコロ変わって大変．

これは嫌なので，これからの数小節は 正の実数の間での乗法と除法を考える．正負が入り交じった場合の乗法や除法は，単純にその絶対値同士の乗法や除法の符号を適当に変えれば良いから，最後の方で考え直す事にする．

正の実数だけを考える ことに対応して，切断は 正の有理数の切断 を新たに考える．正の有理数の切断 $\langle A, A' \rangle_+$ とは，

> 正の有理数からなる，空でない集合 A, A' があって，$A \dot{\cup} A' = \mathbb{Q}_+$ が成り立ち[9]，更に A の元は A' のすべての元よりも小さい

[9] $A \dot{\cup} B$ とは，$A \cap B = \varnothing$ のときに $A \cup B$ を表す記号である．要するにここでは $A \cup A' = \mathbb{Q}_+$ かつ $A \cap A' = \varnothing$ がなりたつ，と言っている

となっているもののことをいう．こうすると今までの「有理数の切断」との関係が気になると思うが，これは以下の考察から大丈夫である．

正の実数を考えている限り，正の有理数の切断 $\langle A, A'\rangle_+$ と通常の有理数の切断 $\langle A, A'\rangle$ には 1 対 1 の関係がつけられる．つまり，与えられた $\langle A, A'\rangle_+$ に対して，$B' = A'$ かつ $B := A \cup \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \leq 0\}$ を定義すると，$\langle A, A'\rangle_+$ の全体と正の実数に対応する $\langle B, B'\rangle$ の全体が 1 対 1 対応する.（要するに非正の実軸部分を A に足すと B になるわけ.）したがって，この 1 対 1 を利用して，これまでの「実数は有理数の切断である」を「正の実数は正の有理数の切断である」と読み替えて話を進める事にする．

なお，正の有理数を表す正の有理数の切断は今までと同じく 2 通り（II 型と III 型）あり得る．そこでここも今までと同じく，2 通りの切断を同一視して，同じ有理数を表すものと解釈する．

2.4.1 正の実数に乗法を入れる

正の有理数の集合 S, T の「積」を表す集合として（積集合ではない）

$$ST := \{st \,|\, s \in S, t \in T\} \tag{2.4.1}$$

と定義する．そして正の有理数の切断（＝正の実数）$a = \langle A, A'\rangle_+$ と $b = \langle B, B'\rangle_+$ に対して集合 $S = AB$ を定義した上で，$S' := \mathbb{Q}_+ \backslash S$ および，組 $\langle S, S'\rangle_+$ を考える．

先走って $\langle S, S'\rangle_+$ と書いてしまったが，これが実際に正の有理数の切断になっていることは確かめる必要がある．言うべきは加法の時に $A + B$ を定義したのと同様で,「$S = AB$ に穴があいてない」こと，つまり,「$r \in S$ ならば，r より小さい正の有理数はすべて S に入ってる」ことである．これがいえれば，$S' = \mathbb{Q}_+ \backslash S$ とすると $\langle S, S'\rangle_+$ は切断の条件を満たすので，実際に切断だといえる．さて，これは以下のようにして言える（$A + B$ を考えた時と本質的に同じである）．

（証明）$r \in S$ と仮定すると $r = st$（$s \in A, t \in B$）と書けている．任意の $0 < r' < r$ に対して，$r' \in S$ を言いたい．そこで $s' = r'/t$ を定義してみる．すると，$s' < r/t = s$ であり，$\langle A, A'\rangle_+$ が正の有理数の切断だったので（A には穴がなく）$s' \in A$ である．よって，この r' が $r' = s't$（$s' \in A, t \in B$）と書ける事が言えた．よって，S には穴がなく，$\langle S, S'\rangle_+$ は確かに正の有理数の切断になっている． □

これで $\langle S, S'\rangle_+$ が正の有理数の切断だと言えたので，これを用いて積を定義しよう．

定義 2.4.1 (正の実数の積) 正の実数 $\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A'\rangle_+$ と $\boldsymbol{\beta} = \langle B, B'\rangle_+$ の積を，新しい有理数の切断

$$\boldsymbol{\sigma} := \langle S, S'\rangle_+ \qquad \text{ここで} \qquad S := AB, \quad S' := \mathbb{Q}_+ \backslash S \tag{2.4.2}$$

によって，$\boldsymbol{\alpha\beta} = \boldsymbol{\sigma}$ と定義する．

これから積の性質を調べるが，その前に確かめるべきは積がちゃんと定義できているのか，である．すなわち，

> 有理数に対応する正の有理数の切断が 2 とおりあるが，積を作った奴は同じ数を表してくれるのか？

という問題だ．この小節の残りではこの問題を取り扱う．

問題にすべきは $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ が有理数の場合に何通りかの表し方があったので，それらがすべて同じ結果に導くかどうかという事である．つまり，2.1.2 節で約束した事（の「正の有理数の切断」バージョン）によれば

> $r \in \mathbb{Q}_+$ に対して $A_1 = \{x \,|\, 0 < x \leq r\}$ と $A_2 = \{x \,|\, 0 < x < r\}$ を考えると，$\langle A_1, A_1'\rangle_+$ と $\langle A_2, A_2'\rangle_+$ の 2 つの切断が共に同じ有理数 r を表すものと解釈する．

となるので，上で作った $\langle S, S'\rangle_+$ のいろんなバージョンがこれで同じ実数を表すといえるかどうかを調べる事が必要だ．

a, b 共に有理数，および a, b の片方だけ有理数，の両方を順次やっていこう．

(case-1) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 共に有理数の場合からやってみよう.(もちろん,積 $\boldsymbol{\alpha\beta}$ は有理数になる事を予想している.)$\boldsymbol{\alpha}$ の表現として $\langle A_1, A_1' \rangle_+$ と $\langle A_2, A_2' \rangle_+$ の 2 通りがあり,$\boldsymbol{\beta}$ のほうも $\langle B_1, B_1' \rangle_+$ と $\langle B_2, B_2' \rangle_+$ の 2 通りがある.積 $A_i B_j$ がどのような集合かを考えよう.

- $A_1B_1 = \{st \,|\, s \in A_1, t \in B_1\} = \{st \,|\, 0 < s \le \alpha, 0 < t \le \beta\} = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, 0 < r \le \alpha\beta]\}$ である.これはなぜかというと,
  - $s = \alpha, t = \beta$ があるので,$\alpha\beta$ というのは積 A_1B_1 に入っており
  - $0 < s \le \alpha, 0 < t \le \beta$ なので,$0 < r = st \le \alpha\beta$ である.上と合わせて A_1B_1 の最大数は $\alpha\beta$ と言えた.また,A_1B_1 の元は正の有理数である.
  - 更に「A_1B_1 には穴がない」,つまり「$\alpha\beta$ 以下のすべての有理数が A_1B_1 に入っている」事をいう必要があるが,これは $\alpha\beta \in S$ を用いると,積の定義の前に既に証明した.

  という訳である.
- $A_2B_1 = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, 0 < r < \alpha\beta\}$ である.これはなぜかというと,
  - $0 < s < \alpha, 0 < t \le \beta$ なので,$0 < r = st < \alpha\beta$ は絶対成り立つ.
  - 更に「A_2B_1 には穴がない」つまり「$\alpha\beta$ より小さいすべての有理数が A_2B_1 に入っている」事をいう必要がある.このためには任意の $0 < r < \alpha\beta$ を一つ固定して,$s = r/\beta$ を 考える.$0 < s < \alpha$ であるので,A_2 に穴がないことから,$s \in A_2$ である.もともと $\beta \in B_1$ であったので,この $0 < r < \alpha\beta$ は A_2 と B_1 の元の積で書けることがわかった.$0 < r < \alpha\beta$ は任意だったので,$\alpha\beta$ より小さいすべての有理数が A_2B_1 に入っている.(この場合は上の A_1B_1 と異なって,$\alpha\beta$ が S に入っていないために「既にやった」とは言えず,上のように議論すべし.)
- $A_1B_2 = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, 0 < r < \alpha\beta\}$ は上と同じだから略.
- $A_2B_2 = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, 0 < r < \alpha\beta\}$ である.これはなぜかというと,
  - $0 < s < a, 0 < t \le b$ なので,$0 < r = st < \alpha\beta$ は絶対成り立つ.
  - 更に「A_2B_2 には穴がない」つまり「$\alpha\beta$ より小さいすべての有理数が A_2B_2 に入っている」事をいう必要がある.ともかく,任意の $0 < r < \alpha\beta$ を一つ固定して,これが積で書けている事をいおう.今度は $\beta \notin B_2$ なので上の A_2B_1 の議論は使えない.使えないのだが,**有理数の稠密性**から,b にいくらでも近い有理数が B_2 中にある事は保証されている.そこで,$r/(\alpha\beta) = 1 - \epsilon$ と書いて,$\beta' \in B_2$ を $(1 - \epsilon/2)\beta \le \beta' < \beta$ となるようにとる(**有理数の稠密性**から,このような β' は絶対にある).そして,$s = r/\beta'$ を考える.すると,上の β' の取り方から,

$$s = \frac{r}{\beta'} \le \frac{r}{(1-\epsilon/2)\beta} = \frac{\alpha\beta(1-\epsilon)}{(1-\epsilon/2)\beta} = \alpha\frac{1-\epsilon}{1-\epsilon/2} < \alpha \tag{2.4.3}$$

    が保証される.またもちろん,$s > 0$ である.つまり,$s \in A_2$ および $\beta' \in B_2$ であり,この $r = s\beta' < ab$ は A_2 と B_2 の元の積で書けた,よって $\alpha\beta$ より小さいすべての正の有理数が A_2B_2 に入っている.

  という訳だ.

以上で 4 通りを見たが,結果としてできた切断は $S_1 = \{r \in \mathbb{Q}_+ \,|\, 0 < r \le \alpha\beta\}$ または $S_2 = \{r \in \mathbb{Q}_+ \,|\, 0 < r < \alpha\beta\}$ のどちらかであった.これは 2.1.2 節でのお約束 有理数 $\alpha\beta$ を境にしての 2 通りの切断 そのものである.よってこれらは同じ有理数 $\alpha\beta$ を表す.メデタシメデタシ.

(case-2) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ の片方だけ有理数の場合に進む.$\boldsymbol{\alpha}$ が有理数,$\boldsymbol{\beta}$ が無理数として考える.この時は $\boldsymbol{\alpha}$ の切断の 2 通りだけを考えれば良いが,ほとんど上の場合(の $\langle B_2, B_2' \rangle_+$)と同じだ.ただし,無理数の場合のかけ算はちゃんとやっていないので,やっぱりちゃんとやりましょう.

この場合,$A_1 := \{s \in \mathbb{Q} \,|\, 0 < s \le \alpha\}$ および $A_2 := \{s \in \mathbb{Q} \,|\, 0 < s < \alpha\}$ に対応する切断 $\langle A_i, A_i' \rangle_+$ がそれぞれある($i = 1, 2$).また $\boldsymbol{\beta}$ の方は($\boldsymbol{\beta}$ と書いてしまうのがちょっと適切ではないが)切断 $\langle B, B' \rangle_+$ があって,B の最大数も B' の最小数も存在していない.

それでともかく,積を作るために $A_iB := \{st \,|\, s \in A_i, t \in B\}$ を考えるわけだ.$A_1B \supset A_2B$ であることは $A_1 \supset A_2$ からすぐにわかる.問題は両者が等しいかどうかなのであって,結論としては差がない,と言いたいから以下のように議論する.

もし両者に差があると，それは A_1 と A_2 の差の α から来るはずであるから，$r = \alpha t$（$t \in B$）の形のものを見れば十分だ．我々はこれが $r = s't'$（$0 < s' < \alpha$, $t' \in B$）の形で書け，従って，$r \in A_2B$ だと主張したい．(こんな形の任意の $r = \alpha t$ についてこれを証明するので，結局 A_1 と A_2 の差がないことになる．)

そのためにまず，B の最大数は存在しなかった（仮定より）ことに注意．最大数が存在しないのだから，もちろん，t は最大数ではなく，t より少し大きい数が B 内に存在する．そんな奴の一つを t' としよう（$t' \in B$ かつ $t' > t$）．この t' を用いて，$s' = r/t' = (\alpha t)/t'$ を定義する．s' は有理数であって，かつ $t' > t$ から $s' < \alpha$ である．またもちろん，$s' > 0$ でもある．つまり，$s' \in A_2$ だ．従って上の r は実は $s' \in A_2$ と $t' \in B$ を用いて $r = s't'$ と書けること，つまり $r \in A_2B$ が証明できた．よって A_1B が A_2B より真に広いことはないのである！

ということで２通りある積の集合 A_iB は同じ事だとわかった．

次に，このどちらかから $S = A_1B$，および $S' = \mathbb{Q}_+ \backslash S$ として作られる組 $\langle S, S' \rangle_+$ が正しく正の有理数の切断になっている事を示す必要がある．しかしこれは既に（１）でやったことである．

従って，この場合も $S = A_1B = A_2B$ から決まる切断 $\langle S, S' \rangle_+$ は，たった一つの実数（じつは有理数）を決めるといえる．

(case-3) 最後に両方とも無理数の場合だが，この場合は一通りだけなので，やることは残っていない．

以上から，乗法が（有理数に関しても unique に）定義できることが確かめられた．

2.4.2 正の実数に乗法を入れたもの単位元

今度はこのように定義した乗法が望ましい性質を持っているか（分配則とか，交換則とか，乗法の単位元とか）を調べるべし．

まずは単位元から．

定理 2.4.2 (1 は乗法の単位元である) 有理数 1 は正の実数における乗法の単位元である．つまり，任意の $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{1} = \mathbf{1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \tag{2.4.4}$$

（証明）正の実数は正の有理数の切断だから，具体的に計算する．まず $\mathbf{1}$ のほうは

$$B := \{r \in \mathbb{Q}_+ \,|\, r \le 1\} \qquad \text{を用いて} \qquad \mathbf{1} = \langle B, B' \rangle_+ \tag{2.4.5}$$

と書ける．正の実数は正の有理数の切断 $\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle_+$ で表されている．それでこいつらの掛け算をやるが，かけ算の定義に従って AB を計算すると定義から

$$AB = \{r1 \,|\, r \in A\} = \{r \,|\, r \in A\} = A \tag{2.4.6}$$

である．よって，$S = AB = A$ を用いた切断 $\langle S, S' \rangle_+ = \langle A, A' \rangle_+$ によって定義される実数はもともとの $\boldsymbol{\alpha}$ に等しい． □

2.4.3 正の実数に乗法を入れたものの交換，結合，分配法則

さて，今度は乗法と加減のいろいろな法則を調べよう．証明したいのは

定理 2.4.3 (乗法の法則) 任意の $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}_+$ に対して

(i) $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}$

(ii) $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\gamma}$

(iii) $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\gamma}$

（証明）それぞれの実数を表す正の有理数の切断を $\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle_+$，$\boldsymbol{\beta} = \langle B, B' \rangle_+$，$\boldsymbol{\gamma} = \langle C, C' \rangle_+$ と書く．

(i) の証明

積 $\boldsymbol{\alpha\beta}$ と $\boldsymbol{\beta\alpha}$ を表す切断を作ってみれば良い．定義から $\boldsymbol{\alpha\beta}$ は $S = AB$ から作った切断 $\langle S, S'\rangle_+$ で表されるし，$\boldsymbol{\beta\alpha}$ は $T = BA$ から作った切断 $\langle T, T'\rangle_+$ で表される．ところがその定義から

$$S := \{st \,|\, s \in A, t \in B\}, \qquad T := \{st \,|\, s \in B, t \in A\} \tag{2.4.7}$$

であって，有理数の乗法の交換則から両者はアタリマエに等しい．従って，$S = T$ だから $\boldsymbol{\alpha\beta} = \langle S, S'\rangle_+ = \langle T, T'\rangle_+ = \boldsymbol{\beta\alpha}$. □

(ii) の証明

$\boldsymbol{\beta\gamma}$ は $S = BC$ によって作られる切断 $\langle S, S'\rangle_+$ で表されるので，$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta\gamma})$ は $T = AS$ で作られる切断 $\langle T, T'\rangle_+$ で表される．そこでこの T がどんな集合か考えると，これは

$$T = AS = A(BC) = \{abc \,|\, a \in A, b \in B, c \in C\} \tag{2.4.8}$$

であることがわかる．

ここのところをちゃんとやるには，上の等式の両方の向きの inclusion を示せば良い．念のためにやっておくと，以下のようになる．
（1）$T \supset \{abc \,|\, a \in A, b \in B, c \in C\}$ の証明．任意の $a \in A, b \in B, c \in C$ を持ってくると，BC の定義から，$bc \in BC = S$ である．従って，今度は AS の定義から $a(bc) \in AS = T$ である．
（2）$T \subset \{abc \,|\, a \in A, b \in B, c \in C\}$ の証明．T の任意の元 $t \in T$ を持って来よう．$T = AS$ の定義から，この t は $t = as$（$a \in A, s \in S$）と分解できるはずである．次にこの s は $S = BC$ の定義から，$s = bc$ （$b \in B, c \in C$）と分解できるはずである．これをあわせると $t = as = abc$ と分解できる事がわかった．つまり，T は右辺の部分集合である．

同様に，$(\boldsymbol{\alpha\beta})\boldsymbol{\gamma}$ を表す切断 U は

$$U = (AB)C = \{abc \,|\, a \in A, b \in B, c \in C\} \tag{2.4.9}$$

であるとわかり，結局 $T = U$ である．従って，両者から作られる正の有理数の切断も同じで，両者は同じ実数を表す． □

(iii) の証明

これも両辺を表す正の有理数の切断を構成してやろう．$\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$ のほうは

$$S := B + C = \{b + c \,|\, b \in B, c \in C\} \tag{2.4.10}$$

が表す切断だから，これから

$$T := AS = \{as \,|\, a \in A, s \in S\} \tag{2.4.11}$$

を作ると，切断 $\langle T, T'\rangle_+$ が表す実数が $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$ である．ところがこれは

$$T = \{ab + ac \,|\, a \in A, b \in B, c \in C\} \tag{2.4.12}$$

と書けるのだ．

ここのところをちゃんとやるには，$T = A(BC)$ の時と同様にやればよいが，有理数の普通の数のかけ算の問題だから，大丈夫だよね．要するに $as = a(b + c) = ab + ac$ であって a, b, c が任意であることを用いればよろし．

同様に議論すると，$\boldsymbol{\alpha\beta} + \boldsymbol{\alpha\gamma}$ の方は

$$U := AB + AC = \{ab + ac \,|\, a \in A, b \in B, c \in C\} \tag{2.4.13}$$

から作られる正の有理数の切断 $\langle U, U'\rangle_+$ で表されるが，$T = U$ であるから，両者は等しい． □

2.5 正の実数に除法を入れる

さて，今度は除法だ．除法は $\boldsymbol{\alpha/\beta := \alpha(1/\beta)}$ と定義するので，本質は逆数 $\boldsymbol{1/\beta}$ の定義だ．そこで，ある正の実数（＝正の有理数の切断）$\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle_+$ に対して，$\boldsymbol{1/\alpha}$ を定義する事を試みたい．(まだこの節でも正の実数のみ考える.)

2.5.1 正の実数に「逆数」を定義

まずは正の実数に対して「逆数」を定義しよう．

定義 2.5.1 (乗法) 正の実数 $\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle_+$ の逆数 $\boldsymbol{1/\alpha}$ は以下のように定義する．

- 正の有理数の集合 A に対して $1/A := \{1/r \,|\, r \in A\}$ と定義する．
- $S' = 1/A, S = \mathbb{Q}_+ \backslash S'$ として，組 $\langle S, S' \rangle_+$ を作る．
- （$\langle S, S' \rangle_+$ が正の有理数の切断になっている事は以下で示すので）$\langle S, S' \rangle_+$ の表す正の実数が $\boldsymbol{1/\alpha}$ である．

示すべき事は

（1）これが正しく正の有理数の切断になっている（従って正の実数を表している）

（2）有理数の 2 とおりの表し方が問題なく吸収される

（3）こうやって作ったのはマジで乗法の逆演算になっている（これは次の小節）

（4）上に関連して，分配則とかいろいろ大丈夫（これもあとの小節）

である．ひとつずつ行きますね．

（1）について

これはほとんど乗法と同じやね．つまり，$r \in S' = 1/A$ の時，$r' > r$ も S' の元である，と言えばよろし．(このように S' が連結と言えたら，S も連結で O.K.）でもこれは，$s = 1/r$ と $s' = 1/r'$ を考えると，$r \in 1/A$ から $s \in A$ がわかるけど，$s \in A$ なら $0 < s' < s$ なる任意の $s' \in A$ だから，$r' = 1/s' \in 1/A$ である． □

（2）について

有理数 α を $\langle A_1, A_1' \rangle_+$ と $\langle A_2, A_2' \rangle_+$ の様に二通りに表して（$A_1 \ni \alpha$ と $A_2' \ni \alpha$），どちらも同じ逆数を定義する事を示す．

まず，A_1 のほうが簡単で，$S_1' = 1/A_1 = \{r \in \mathbb{Q}_+ \,|\, r \geq 1/\alpha\}$ である．なぜなら，

- $s \in A_1$ ならば $0 < s \leq \alpha$ だから，$1/s \geq 1/\alpha$ であり，
- また $1/\alpha$ が $1/A_1$ の元であるので，$1/A_1$ の最小数は $1/\alpha$.
- $\langle S_1, S_1' \rangle_+$ が切断になる事は既に（1）で言ったので，$r \geq 1/\alpha$ なるすべての r が S_1' に入っている．

次に A_2 のほうである．このときは $S_2' = 1/A_2 = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r > 1/\alpha\}$ である．なぜなら，

- $s \in A_2$ ならば $0 < s < \alpha$ だから，$1/s > 1/\alpha$ である．
- 次に，$r > 1/\alpha$ なる任意の r が $1/A_2$ の元である事をいう．実際，$s = 1/r$ を考えると，$0 < s < \alpha$ であるので $s \in A_2$ であり，従って $r > 1/\alpha$ は $s \in A_2$ でもって $1/s$ と書けることが言えた．

以上から，２つの切断から $1/A_i$（$i = 1, 2$）を作ると，対応する切断は同じ有理数 $1/\alpha$ を表す「正の有理数の切断」に対応している事が証明できた． □

ともかく，上で「逆数」がきちんと定義できた．これが本当に乗法の逆元かどうかを以下で調べる．

2.5.2 「逆数」は本当に乗法の逆元か

（3）について

上で定義した「逆数」が本当に乗法の逆元かどうかを調べるべし．

逆演算になっているということは，切断 $\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle_+$ があった場合に，$B' = 1/A, B = \mathbb{Q}_+ \backslash B'$ によって $\boldsymbol{\beta} = \langle B, B' \rangle_+$ を作ると，$\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle_+$ の表す実数と $\boldsymbol{\beta} = \langle B, B' \rangle_+$ の表す実数が互いに逆数の関係にある，ということで，要するにこの２つをかけて１になることを示せば良い．このためには，$AB = \{r \in \mathbb{Q}_+ \,|\, 0 < r \le 1\}$，または $AB = \{r \in \mathbb{Q}_+ \,|\, 0 < r < 1\}$ が言えれば（必要）十分だ．さてと，

$$AB := \{st \,|\, s \in A,\ t \in B\} \tag{2.5.1}$$

であるが，B' のほうは良くわかってるわねえ．

$$B' := \{1/s \,|\, s \in A\} \tag{2.5.2}$$

そこで $t \in B$ という条件を吟味すると，まず B' が「穴がない」のは（１）で言ってある．そこで $t \in B$ ということは t は B' の任意の元よりも小さい，わけだから，必要条件として，任意の $t' \in B'$ に対して $t < t'$ が成立している．ところが上の B' の定義から $t' = 1/s'$ と書けている（$s' \in A$）．よって，任意の $s' \in A$ に対して $t < t' = 1/s'$ が成り立っている．

これから，（任意の $s \in A, t \in B$ に対して）$st < st' = s/s'$ が任意の $s' \in A$ に対して成立する，と言える．「任意の」だから特に $s' = s$ ととっても良く，これから $st < 1$ がいつでも成り立つと言える．また，$st > 0$ はもともとの s, t が正だからアタリマエだ．

次に，AB がギリギリ１まで行ける，ことを言いたい．そのためには，B と B' の境目辺りをよく見る必要がある．そこで，t として B の上限（はまだ定義してないけどそのつもり）に近いものをとるつもりで，まず A の境界の辺りから s をとって来よう．つまり，有理数の稠密性から，

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists s \in A, \quad \exists s' \in A', \qquad s' - s < \epsilon \qquad (\text{つまり}\ \ s' < s + \epsilon) \tag{2.5.3}$$

とできることにまず，注目しよう．このとき，B' の作り方から，$t = 1/s \in B'$ である．また，$t' = 1/s' \notin B'$，つまり $t' = 1/s' \in B$ である.（なぜなら，もし $t' \in B'$ だとすると，t' の逆数をとると，$s' \in A$ が結論されてしまい，そもそもの s, s' の選び方に反する.）従って，$st' \in AB$ であるが，この値は

$$st' = \frac{s}{s'} > \frac{s}{s + \epsilon} \tag{2.5.4}$$

である．つまり AB 中には $\frac{s}{s+\epsilon}$ より大きい元が存在している．ところが，$\epsilon > 0$ は任意であった．また上の s は ϵ に依存する可能性が高いが，ϵ を小さくするほどかえって s は大きくなる．従って．$\epsilon > 0$ を十分小さくとる事によって，この値をいくらでも１に近づけることができる．

すなわち，AB の中にはいくらでも１に近い元が存在する．以上から $AB = \{r \in \mathbb{Q}_+ \,|\, 0 < r < 1\}$ であることがわかった．これは $S = AB$ から作られる「正の有理数の切断」$\langle S, S' \rangle_+$ が有理数の１を表していることを示す．つまり，$\boldsymbol{\alpha\beta} = \mathbf{1}$ であって，望み通り逆演算になっている． □

2.5.3 正の実数における除法の定義

これで漸く，正の実数に対する除法を定義できる．つまり，

定義 2.5.2 (正の実数に於ける除法) 正の実数 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ に対して，その商 $\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{\beta}$ を，乗法と逆数を用いて，

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\alpha}\,\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\beta}} \qquad \left(= \boldsymbol{\alpha}\ \text{と}\ \frac{1}{\boldsymbol{\beta}}\ \text{の積}\right) \tag{2.5.5}$$

として定義する．

（注）これで正の実数に関しては大体のものがでるはず．例えば，乗法の結合則と交換則から，

$$\boldsymbol{\beta}\,\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}\Big(\boldsymbol{\alpha}\,\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\beta}}\Big) = \boldsymbol{\beta}\Big(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\beta}}\,\boldsymbol{\alpha}\Big) = \Big(\boldsymbol{\beta}\,\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\beta}}\Big)\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}\,\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \tag{2.5.6}$$

この辺りは既に切断がどうのこうの，ではなくて，通常の代数の問題である．

2.6 実数に乗法と除法を入れる

今までで正の実数には乗法と除法を問題なく入れた．これから，これをゼロ及び負の実数に拡げる．ここはややこしい事は考えず，できる限り代数的に話を進める．(多分，完全に代数の話であって，有理数の切断などは全く使う必要がないと思う．要するに，正負全体で加減が定義され，正の部分で乗除が定義されているとき，矛盾なく乗除を負まで拡張しなさい，という問題だから，代数の範囲でできているはずだ．僕は代数が得意でないので，この節の内容はあまり効率の良いものではないだろう．ともかく参考までにつけておく.)

2.6.1 実数に乗法を入れる

定義 2.6.1 (ゼロによる掛け算) 任意の実数 $\boldsymbol{\alpha}$ と実数 $\mathbf{0}$ に対して，その積を，

$$\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{0} = \mathbf{0}\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \tag{2.6.1}$$

と定義する．

ゼロによる掛け算は今まで全く定義して来なかったから，今の時点では好きなように決めて良い．ただし，もちろん，変に決めると「有理数とゼロの掛け算」や「分配法則」で困ることになるから，上の決め方しかない訳だが，ともかく，現時点では論理のワッカはできてない．

以前に実数 $\boldsymbol{\alpha}$ に対して，$-\boldsymbol{\alpha}$ を定義した（定義 2.3.4）．これと「$-\mathbf{1}$ をかける」ことが矛盾しないようにさえ注意すれば，後は簡単である．

定義 2.6.2 ($-\mathbf{1}$ による掛け算) 任意の実数 $\boldsymbol{\alpha}$ と整数 $-\mathbf{1}$ に対して，その積を，

$$\boldsymbol{\alpha}\,(-\mathbf{1}) = (-\mathbf{1})\,\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha} \tag{2.6.2}$$

と定義する．この右辺は定義 2.3.4 で定義したものである．

この準備の下に，負の実数についての乗法を定義する．

定義 2.6.3 (乗法) ゼロでない実数 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ の乗法は以下のように定義する（ゼロのは定義 2.6.1）．

- $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 共に正なら，2.4 節の通りに．
- $\boldsymbol{\alpha} > 0, \boldsymbol{\beta} < 0$ の場合は $\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} := -(\boldsymbol{\alpha}\,|\boldsymbol{\beta}|)$
- $\boldsymbol{\alpha} < 0, \boldsymbol{\beta} > 0$ の場合は $\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} := -(|\boldsymbol{\alpha}|\,\boldsymbol{\beta})$
- $\boldsymbol{\alpha} < 0, \boldsymbol{\beta} < 0$ の場合は $\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\beta} := |\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|$

要するに，絶対値部分の積と符号の積を別々にやって掛けたら良い，という規則にする．

右辺には正の数の掛け算と「マイナスをつける」しか出てきてないから，右辺の量はもちろん well-defined である．

また，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ が有理数の場合は，いつもの掛け算と同じである事も大丈夫である．

最後に気になるのは，このような定義といろいろな規則（特に結合則，分配則）との兼ね合いである．しかしこれは大丈夫やと思う...

- 交換則については，上の定義からして明らかに成り立っている．

- 結合則ですが，$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\gamma}$ を言いたい．ただし，ここで $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ は負でも良い．（どれかがゼロなら両辺ともゼロなので，ゼロの場合は考えなくて良い.）例えば $\boldsymbol{\alpha}$ のみが負の場合は，
$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}) = -|\boldsymbol{\alpha}|\,(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}) = -|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma} \tag{2.6.3}$$
であり，
$$(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\gamma} = \big(-(|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta})\big)\boldsymbol{\gamma} = -\big((|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\gamma}\big) = -|\boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma} \tag{2.6.4}$$
で等しい．２つ以上負のものがあっても同じである．
- 分配則も同じと思うが，しんどなってきたので後で考えよう．多分，この辺りは代数の人なら簡単にやるんでしょうなあ...

2.6.2 実数に除法を入れる

除法の方は「負の数の逆数」をちゃんと定義すれば良いだろう．

定義 2.6.4 (負の数の逆数) 実数 $\boldsymbol{\alpha}$ の逆数 $\boldsymbol{1}/\boldsymbol{\alpha}$ は以下のように定義する．

- $\boldsymbol{\alpha} > 0$ の逆数は定義 2.5.1 通りに定義する．
- 0 の逆数は定義しない．
- $\boldsymbol{\alpha} < 0$ の場合は $\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\alpha}} := -\dfrac{\boldsymbol{1}}{|\boldsymbol{\alpha}|}$

上の定義が実際に乗法の逆元を定義している事は（正の実数については既に見ているけども）$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{0}$ の場合も，
$$\Big(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\alpha}}\Big)\boldsymbol{\alpha} = \Big(-\frac{\boldsymbol{1}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\Big)\,(-|\boldsymbol{\alpha}|) = \bigg(\Big(-\frac{\boldsymbol{1}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\Big)\,(-\boldsymbol{1})\bigg)\,|\boldsymbol{\alpha}| = \frac{\boldsymbol{1}}{|\boldsymbol{\alpha}|}\,|\boldsymbol{\alpha}| = \boldsymbol{1} \tag{2.6.5}$$
となって，O.K. である．

負の数の逆数も定義したから，除法は単純に
$$\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\alpha}\,\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\beta}} \tag{2.6.6}$$
とすれば良いだろう．結合則なども O.K. だと思うよ（要するに符号部分と絶対値部分が別々にやれるように入ってるからね）．正直，疲れてきました．ちょっと手抜きです．

2.7 デデキントの定理：実数の連続性

小平本にあるように，この節の内容は実数に順序を入れておけば十分であって，2.2 節の後にすぐ続ける事は可能である．ただ，先に実数を全部構成した方が良いと思うので，そうしました．

2.7.1 実数の切断の定義

定義 2.7.1 (実数の切断) 実数の全体を交わりがなく空集合でもない二つの集合 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}'$ に分け,「$\boldsymbol{A}$ に入っている数はすべて，$\boldsymbol{A}'$ に入っている数よりも小さい」とできたとき，この分け方 $\langle\!\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \rangle\!\rangle$ を実数の 切断 という．

ここで注意すべきは有理数の切断と実数の切断の区別である．言うまでもなく，有理数の切断 $\langle A, A' \rangle$ では現れる集合 A, A' はともに有理数の集合である．一方，実数の切断 $\langle\!\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \rangle\!\rangle$ では $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}'$ はともに実数の集合（もとはと言えば,「有理数の切断」の集合）なのである．２つの区別をつけるため，有理数の切断に現れる集合 A は普通の字体で，実数の切断に現れる集合 $\boldsymbol{A}$ は太字で，書くことにした．

2.7.2 デデキントの定理

今までやってきた実数の構成から，以下が言える．これで漸く，予告していた実数の切断の性質が示せた．

定理 2.7.2 (実数の切断の性質；小平本の定理 1.6) $\langle\!\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \rangle\!\rangle$ が実数の切断のとき，

- (II 型) $\boldsymbol{A}$ の最大数が存在するが，$\boldsymbol{A}'$ の最小数は存在しない．
- (III 型) $\boldsymbol{A}$ の最大数は存在しないが，$\boldsymbol{A}'$ の最小数が存在する．

のどちらか一つが常に実現されている．つまり，(0 型),(I 型) は実数ではあり得ない．

証明 $A := \boldsymbol{A} \cap \mathbb{Q}$，$A' := \boldsymbol{A}' \cap \mathbb{Q}$ と定義し，組 $\langle A, A' \rangle$ を考えてみる．もともと $\langle\!\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \rangle\!\rangle$ が実数の切断だったので $\boldsymbol{A} \dot{\cup} \boldsymbol{A}' = \mathbb{R}$ である[10]．従って $A \dot{\cup} A' = (\boldsymbol{A} \cap \mathbb{Q}) \dot{\cup} (\boldsymbol{A}' \cap \mathbb{Q}) = (\boldsymbol{A} \dot{\cup} \boldsymbol{A}') \cap \mathbb{Q} = \mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ が成り立っている．また，$\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A}'$ よりも左にあるから，($\cap \mathbb{Q}$ をとって) A が A' よりも左にあるといえる．つまり，$\langle A, A' \rangle$ は有理数の切断になっている．

有理数の切断では 3 つの可能性（I, II, III）があることはずっと前に見た．以下，$\langle A, A' \rangle$ がこのどれであるかによって場合分けをして考えよう．

Case-II. A の最大数（もちろん有理数）が存在するとき：この最大数を α と書くと，$\boldsymbol{A}$ の最大数も $\boldsymbol{\alpha}$ である[11]．

> なぜなら，もし $\boldsymbol{A}$ に（実数の範囲で探した）最大数がないなら，$\boldsymbol{\beta} > \boldsymbol{\alpha}$ かつ $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{A}$ なる実数 $\boldsymbol{\beta}$ が存在することになる．ところが，有理数の稠密性から，$\boldsymbol{\beta}$ に任意に近い有理数 r で，$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\beta}$ を満たすものが存在する．この $\boldsymbol{r}$ は $\boldsymbol{A}$ の元でありかつ有理数であるので，(対応する有理数 r は）$A = \boldsymbol{A} \cap \mathbb{Q}$ の元であるべきだ．しかし，そうすると，これは A の（有理数の範囲で探した）最大数が α であることに矛盾する．

また，この場合，$\boldsymbol{A}'$ の最小数 $\boldsymbol{\gamma}$ は存在しない．なぜなら，もし存在したら $\frac{\alpha+\gamma}{2}$ が $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}'$ の間に宙ぶらりんに存在してしまうから．従って，この場合は $\langle\!\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \rangle\!\rangle$ は (II) 型である．

Case-III. A' の最小数（もちろん有理数）が存在するとき：上と同じような議論により，$\langle\!\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \rangle\!\rangle$ は (III) 型であると言える．

Case-I. A の最大数も A' の最小数も存在しないとき[12]：この時も $\langle A, A' \rangle$ は有理数の切断であるから，「実数＝有理数の切断」によれば，これは一つの実数を表すはずである．そこでこれを $\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle$ と書こう．我々は $\boldsymbol{\alpha}$ が $\boldsymbol{A}$ の最大数か $\boldsymbol{A}'$ の最小数であることを示したい．

ともかく $\boldsymbol{\alpha}$ は実数であり，また $\langle\!\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \rangle\!\rangle$ が実数の切断であるから（つまり，すべての実数は $\boldsymbol{A}$ か $\boldsymbol{A}'$ のどちらかには入るから），$\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A}$ または $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A}'$ のどちらか一方だけが成り立っている．そこで，$\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A}$ だったとすると，$\boldsymbol{\alpha}$ は $\boldsymbol{A}$ の最大数である．

> なぜなら，$\boldsymbol{\alpha}$ が $\boldsymbol{A}$ の最大数でなかったとすると，$\boldsymbol{\beta} > \boldsymbol{\alpha}$ かつ $\boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{A}$ なる実数 $\boldsymbol{\beta}$ が存在することになるが，有理数の稠密性から，$\boldsymbol{\beta}$ に任意に近い有理数 r で，$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\beta}$ を満たすものが存在してしまう．これは $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{A}$ を意味し，$r \in A = \boldsymbol{A} \cap \mathbb{Q}$ も成り立ってしまう．これは r が有理数の切断面 $\boldsymbol{\alpha}$ よりも大きいことを意味し，$r \in A$ と矛盾する．

つまり，この場合，$\langle\!\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \rangle\!\rangle$ は (II) 型なのである．同様に，$\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A}'$ だったとすると，$\boldsymbol{\alpha}$ は $\boldsymbol{A}'$ の最小数であると言える（この場合，$\langle\!\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \rangle\!\rangle$ は (III) 型）．

以上から，いずれの場合も $\langle\!\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \rangle\!\rangle$ は (II) または (III) 型であることがわかった． □

---

[10] 前にも書いたかもしれないけど，$A \dot{\cup} B = C$ とは，$A \cap B = \varnothing$ かつ $A \cup B = C$ ということ

[11] A の最大数とは，A が有理数の集合だから，有理数の範囲で探した場合の最大数である．一方，$\boldsymbol{A}$ の最大数とは，$\boldsymbol{A}$ が実数の集合だから，実数の範囲で探した場合の最大数である．この２つを区別しないと絶対に混乱するから良く注意の事．なお，ここで $\boldsymbol{A}$ の最大数が $\boldsymbol{\alpha}$ と書かれているのは，実数（＝有理数の切断）としては α に相当する切断 $\boldsymbol{\alpha}$ をここで出すべきだから

[12] これは**有理数の切断としては**最大数も最小数も存在しない，と言ってるのだ．**実数の切断として**見れば，これから示すように最大数か最小数がある．くれぐれも混同しないように

2.8 上限と下限

これで解析に必要な実数の性質，つまり上限と下限の存在に入る事ができる．

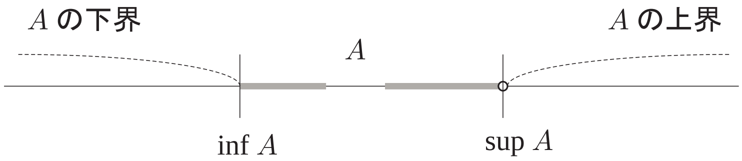
予備知識なしでも読めるように，上界（下界）と上限（下限）の概念から話を始める．

定義 2.8.1 (上界と下界) A を実数の集合とする．ある数 N があって，A の任意の元 $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{a} \leq N$ を満たすとき，A は上に有界（bounded from above）といい，N を A の 上界（upper bound）という．同様に，ある数 M があって，A の任意の元 $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{a} \geq M$ を満たすとき，A は下に有界（bounded from below）といい，M を A の 下界（lower bound）という．A が上にも下にも有界な場合は単に 有界（bounded）という．

定義からわかるように，上界や下界はギリギリの数でなくても良い．例えば，A を区間 $[0, 1]$ とした場合には，-1 や -10 や -2345 はすべて A の下界である．同様に 1 や 123 や 33556 は A の上界である．でもこの定義では A がどこまで広がっているのかがわからない．そこで，A の端と端を決める（ギリギリの数にする）つもりで,「上限」と「下限」を定義する．：

定義 2.8.2 (上限と下限) A を実数の集合とする．A が上に有界のとき，A の上界の最小値 を A の上限（supremum）と定義し，$\sup A$ と書く．同様に A が下に有界のとき，A の下界の最大値 を A の下限（infimum）と定義し，$\inf A$ と書く．

（注）上限と上界は間違いやすいから，注意する事.（正直，僕は日本語だとどっちがどっちだったかすぐにわからなくなる.）



（注意！）上では「A の上界の最小値」や「A の下界の最大値」があたかも存在するかのような書き方をしたが，これは以下の定理 2.8.3 で証明する．だから，論理の順序を重んじるなら，まず下の定理を証明してから，上の定義で上限や下限を定義すべきなのだ（微積の教科書（田島一郎「解析入門」ではちゃんとそう書いている）．しかしその順序ではかえってわかりにくいと思ったので、敢えて上の順序で書いた．下では［$\cdots$］の中はそれぞれ置き換えて読むべし．

定理 2.8.3 (上限と下限の存在) 実数の集合 S が上に［下に］有界ならば S の上界 [下界] の最小値 [最大値] が存在する．上の定義の用語を使うと，S が上に［下に］有界ならば S の上限 [下限] が存在する．

定理 2.8.3 の証明

S が上に有界と仮定して「S の上界の最小値」の存在を証明する．S の上界の全体からなる集合を $\boldsymbol{A'}$ とし，それ以外の数の集合を $\boldsymbol{A}$ と書こう．すると，$\langle\!\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A'} \rangle\!\rangle$ は実数の切断になっている（切断になるための条件をすべて確かめれば，わかる）．

従って，実数の連続性（Dedekind の定理）から，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A'}$ の境界の数 $\boldsymbol{\alpha}$ が一意に定まる．この $\boldsymbol{\alpha}$ が「S の上界の最小値」になっている事を証明しよう．そのために，またもや Dedekind の定理を使う．

この定理によると $\boldsymbol{\alpha}$ は $\boldsymbol{A}$ の最大数であるか，$\boldsymbol{A'}$ の最小数であるか，のどちらかである．しかし，$\boldsymbol{\alpha}$ が $\boldsymbol{A}$ の最大数であることはあり得ない（次の段落で示す）．従って，$\boldsymbol{\alpha}$ は $\boldsymbol{A'}$ の最小数であることが示された．ところで $\boldsymbol{A'}$ は S の上界の全体からなる集合だったから，これは $\boldsymbol{\alpha}$ が S の上界の最小値である事を意味する．よって,「S の上界の最小値」の存在が証明された．

（$\boldsymbol{\alpha}$ が $\boldsymbol{A}$ の最大数ではないことの証明；背理法）$\boldsymbol{\alpha}$ が $\boldsymbol{A}$ の最大数だとすると，$\boldsymbol{\alpha}$ は S の上界にはなれない（上界になれる数はすべて $\boldsymbol{A'}$ に押し込めたから）．よって，$\boldsymbol{\alpha}$ よりも大きく，でも S に属するような数 $\boldsymbol{\beta}$ が存在するはずである．そこで，この両者の中間，$\frac{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}{2}$ を考えると，当然，$\boldsymbol{\alpha} < \frac{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}{2} < \boldsymbol{\beta}$ となっている．ところが，$\boldsymbol{\beta} \in S$

で $\frac{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}{2} < \boldsymbol{\beta}$ であるから，$\frac{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}{2}$ は S の上界ではない．つまり，$\frac{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}{2} \in \boldsymbol{A}$ のはずである．しかしこれは「$\boldsymbol{\alpha}$ は $\boldsymbol{A}$ の最大数」であったことに矛盾する．つまり，$\boldsymbol{\alpha}$ が $\boldsymbol{A}$ の元ということはありえない． □

上の証明でもわかるように，また今までも散々強調したように，考えている数の集合が実数であって，それが連続性を持っている事が本質的である．連続性のない数の集合（有理数）なら上限，下限が存在しない事は，$x^2 < 2$ である有理数の集合を S としてみればわかる．(実数の範囲で考えれば上限は $\sqrt{2}$，下限は $-\sqrt{2}$ である．しかしこれらは有理数ではないので，有理数の範囲で探したら，上限も下限も存在しない．)

これで漸く，解析に必要な実数の性質をすべて導く（途中，ちょっとごまかしたところもあるけど）ことができた．

3 実数の構成ふたたび（有理数の完備化による）

2 章では「デデキントの切断」によって実数を定義した．また,「実数のコーシー列」を定義し，数列の収束と数列がコーシー列であることは同値であると見た．

ここではこの逆を行いたい．すなわち，今までの実数はすべて忘れて,「有理数のコーシー列の同値類」として実数を定義し直すのである．最後の 4 章で，コーシー列による構成とデデキントの切断による構成が結局は同じものを作っていることを示す．

3.1 同値類と商集合

暫く抽象的な定義が続くが我慢して頂きたい．

定義 3.1.1 (同値関係) 集合 A において，以下を満たす関係 $\sim$ を 同値関係 という．

- A の任意の 2 元 x, y に対して，$x \sim y$ か $x \not\sim y$ のどちらか一方が成り立つ．
- $x \sim x$
- $x \sim y$ ならば $y \sim x$
- $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$

この同値関係を用いて，集合 A の要素を分類する事ができる．$x \in A$ に対して，x と同値な $y \in A$，つまり $y \sim x$ となる $y \in A$ の全体を x の同値類 といい，$[x]$ と書く．数式で書けば

$$[x] := \{y \in A \,|\, y \sim x\} \tag{3.1.1}$$

である．また，$y \in [x]$ となっている時，y を $[x]$ の 代表元 という．

この概念を用いて，まず $x \in A$ を適当に選んでその同値類 $[x]$ を作り，次に $z \in A \backslash [x]$ を選んでその同値類 $[z]$ を作り，次に $w \in A \backslash ([x] \cup [z])$ を選んでその同値類を作り... とやって，最終的に A の元が残らなくなるまで続ける．$\sim$ が同値関係である事から，このようにすると A をいくつか（1 個かもしれないし無限個かもしれないが）の，互いに交わらない部分集合にわけることができる.（部分集合のそれぞれは $[x]$ のような同値類の一つである.）

この同値類を集めたものを $A/\sim$ と書き，集合 A を同値関係 $\sim$ で「割った」商集合という：

$$A/\sim \; := \big\{ [x] \,\big|\, x \in A \big\} \tag{3.1.2}$$

念のため：この商集合の元は上で定義した同値類，つまり A の部分集合である．同値類や商集合を考える事で，もとの x や A よりも一段とレベルが上がった形になっている事に注意．

このような同値類や商集合を考える状況は，大体，以下のようなものである．いま，集合 A がたくさんの元を持っており，更に，その元の多くは，我々の目的からすれば同じように見えるとしよう．つまり，我々の関心のない細部では異なっているので異なる元ではあるのだが，我々が見たい部分では同じ，ということ．このような場合,「同じように見える」ものを一塊にして,「関心のない部分の際は無視する」ことにすればすっきりする．上で導入した $\sim$（同値関係）は「同じように見えるもの同士」を定義する関係である．それで同値類というのが,「同じように見えるものの一塊」に相当するのだ．

3.2 コーシー列による実数の定義

以上の考え方を使って，実数を定義しよう．

定義 3.2.1 (有理数のコーシー列) 各項が有理数である数列 $\{x_n\}$ は，以下の条件を満たすとき「有理数のコーシー列」または「有理コーシー列」であるという：

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \qquad \Big(m, n > N(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |x_m - x_n| < \epsilon \Big) \tag{3.2.1}$$

（注）上では明記しなかったが，ここではまだ無理数を定義していないので，上の定義にでてくる数はすべて有理数（と整数）である．そのため，x_n なども普通の字体（太字でない）で書いてある．なお，このコーシー列の定義は ϵ などが有理数である事以外は実数のコーシー列と同じものである．

以下,「有理コーシー列の全体」を A と書く事にする：

$$A := \left\{ \{x_n\} \,\middle|\, \{x_n\} \text{ は有理数のコーシー列 } \right\} \tag{3.2.2}$$

これが前節の A の役割を果たす．次に，同値関係 $\sim$ であるが，これは A の２つの元 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$（どちらも有理数のコーシー列である）に対して，

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \qquad \text{とは} \qquad \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0 \quad \text{となること} \tag{3.2.3}$$

と定義する（上の極限はすべて，有理数の範囲で，通常の ϵ-N で定義できている）．もちろん，これが本当に同値関係になっているのかどうかは証明すべきであるが，以下が成り立つ：

命題 3.2.2 ($\sim$ は同値関係) 上の同値関係 $\sim$ は確かに同値関係になっている．

（証明）$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ を有理コーシー列とする．$\{a_n\} \sim \{b_n\}$ とは $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$ という事だったので,「$\{a_n\} \sim \{a_n\}$」および「$\{a_n\} \sim \{b_n\}$ ならば $\{b_n\} \sim \{a_n\}$」は明らかであろう．問題は推移律であるが，これはコーシー列の定義から

$$|a_n - c_n| \le |a_n - b_n| + |b_n - c_n| \tag{3.2.4}$$

の両辺で $n \to \infty$ とすれば，右辺がゼロに行くので，左辺の極限もゼロだとわかる．つまり，$\{a_n\} \sim \{c_n\}$ が証明される． □

この準備の下に

定義 3.2.3 (実数の定義) 上の A と同値関係 $\sim$ を用いて，実数の集合を $A/\sim$ と定義する．すなわち，実数とは，有理数のコーシー列を $\sim$ の同値関係で割って作られる同値類のことである．

（補足）このように定義した２つの実数 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ はそれを表す同値類が一致するときのみ「等しい」と定義される．

この定義によれば，実数とはコーシー列（の同値類）なのである．通常，我々が数だと思ってるものはどこかに行ってしまい，代わりに数列（の同値類）が実数だという事になってしまった．デデキントの切断の時も「実数は有理数の切断だ」となって奇妙な感じがしたのだが，今回も同様である —— いや，無限項もある数列が実数だということになったので，事態はより深刻かもしれない．

ではあるが，もちろん，心配するには及ばない．これから段々と，この一見奇妙に見える定義が我々の知っている実数を定義することを見ていく．この際にキーになるのは「同値類」の概念である．以下ではこの「同値類」のお陰で，この定義がうまく行っている事を見るだろう．なお，デデキントの切断による定義との比較（一致）は章を改めて行う事にしよう．

（注）上では実数をコーシー列の同値類と定義したわけだが，この狙いは以下の通りである．いま，$\boldsymbol{\alpha} = [\{a_n\}]$，つまり $\boldsymbol{\alpha}$ とは代表元が $\{a_n\}$ というコーシー列であるような「コーシー列の同値類」であるとしよう．実のところ，ここでは

$$\boldsymbol{\alpha} \text{ “}=\text{” } \lim_{n\to\infty} a_n \tag{3.2.5}$$

を狙っているのである．つまり,「実数は有理コーシー列の同値類」とは言ったけども，実際には「実数はその有理コーシー列の極限」と定義したいのだ．しかし，今は実数を定義している途中であるから，考えているコーシー列は有理数の中に極限を持つとは限らない．(いや，正直，有理数の中に極限を持たないコーシー列の方が濃度の意味で多い.）これでは上の極限を使った定義はできない．仕方ないので，頭の中では「この数列の極限が実数なんだよ」と思いつつ,「この数列の同値類が実数」と言っているのである．実際，以下で実数の四則演算などを定義する際，結局は「この数列の極限」にしか興味のない定義になっている事がわかるだろう．

（注）上で用いた同値関係 (3.2.3) は何を狙っているのかというと，数列 $\{x_n\}$ と数列 $\{y_n\}$ の極限が等しい，ことを狙っているのだ．ただし，上に書いたように，有理数の範囲では「極限」が存在しないことがほとんどだから，実数を定義するまでは極限を全面に出す訳には行かない．仕方ないので，このようにややこしい書き方になっている．

以下では上の定義が実際に我々の欲しい実数を定義している事を見ていこう．ある程度ややこしい事も行うが，大事なのは「我々はコーシー列の『極限』に興味があり，この『極限』がどうふるまうべきかを考えてすべての定義や計算を行いたい」ということである．これを念頭に置いて頂くと，以下でやる事の意味が分かりやすいだろう．

3.2.1 有理数の表し方

まず，今まで我々の知っている有理数が，この新しい定義 3.2.3 でどうなるのか，チェックしておこう．有理数 r については，この r に収束するコーシー列の例として $x_n = r$（すべての n で）というものが挙げられる．つまり，「有理コーシー列の同値類」としての我々の実数の定義によれば，有理数は上の $\{r, r, r, \ldots\}$ という数列の同値類，ということになる．切断の時と同じく，「普通の」有理数を r と書くとき，この同値類 $[\{r, r, r, \ldots\}]$ を $\boldsymbol{r}$ で表す事にする．

この場合は有理数の範囲でも極限がきちんと定義できるから，上で述べた注意（我々は極限にのみ興味がある）が文字通り実現できる．ただし，以下で定義する四則演算や実数の順序について，普通の有理数の演算や性質が再現されているのかは以下でチェックする．

3.2.2 同値類の実際の形

同値類がよく見えないという人もいると思うので，ちょっと余分なことを書いておく．まず，上のお約束に従って，ゼロを表す同値類を考える：

$$\mathcal{N} := [\{0\}] := \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \,\middle|\, \{a_n\} \text{ は有理コーシー列で } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\} \tag{3.2.6}$$

ある有理コーシー列 $\{b_n\}$ と同値な有理コーシー列 $\{b'_n\}$ は $\lim_{n\to\infty} |b_n - b'_n| = 0$ を満たす．このとき，$b'_n - b_n$ も有理コーシー列であるので，$b'_n - b_n \in \mathcal{N}$ であると言える．

逆に，$\{b_n\}$ が有理コーシー列の時，$\{a_n\} \in \mathcal{N}$ を持ってきて $b'_n := b_n + a_n$ を考えると，この $\{b'_n\}$ は有理コーシー列でかつ，$\{b'_n\}$ は $\{b_n\}$ と同値だと言える．

以上から，ある有理コーシー列 $\{b_n\}$ の同値類は

$$[\{b_n\}] = \left\{ \{b_n + a_n\} \,\middle|\, \{a_n\} \in \mathcal{N} \right\} \tag{3.2.7}$$

と書ける事がわかる（$\{a_n + b_n\}$ とは第 n 項が $a_n + b_n$ である数列を表す）．つまり，ある代表元に $\mathcal{N}$ に入っている数列を足したもの全体が，同値類になっているのだ．

3.3 実数の四則演算

以下，上のようにして構成した実数の性質を調べていく．今回はデデキントの切断による構成とは順序を変えて，まずは加減乗除の四則演算を定義し，そのあとで実数の順序や絶対値を考えるのが都合がよい．順番に見ていくが，議論のキーポイントは以下の 3 つであることを念頭におこう．

- まず，適当な代表元を用い，コーシー列の各項に対する加減乗除から，実数の加減乗除を「定義」する．
- この際，この「定義」がきちんと定義になっていること，及びこれが代表元によらない事を確かめる．
- 最後に，定義された加減乗除が望ましい性質（例：結合則，分配則）を満たす事を示す．

3.3.1 四則演算の定義

実数の四則演算は以下のように定義する．**ただし，以下の定義が本当に意味を持つのか は個別に確かめる必要があり，確かめた後で初めて定義として成立する**のであるが，これでは話が回りくどい．そこで，論理的順序は少しおろそかにしてでも全体像をつかみやすくするために，まず「定義」を書くことにする．

定義 3.3.1 (実数の四則)
(i) 2つの実数 $\boldsymbol{\alpha} = [\{a_n\}]$ と $\boldsymbol{\beta} = [\{b_n\}]$ の和 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ は，有理コーシー列 $c_n := a_n + b_n$ の定める同値類 $\boldsymbol{\gamma} := [\{c_n\}]$ と定義する．また，差 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$ は，有理コーシー列 $d_n := a_n - b_n$ の定める同値類 $\delta := [\{d_n\}]$ と定義する．同値類を前面に押し出して書けば

$$[\{a_n\}] + [\{b_n\}] := [\{a_n + b_n\}], \qquad [\{a_n\}] - [\{b_n\}] := [\{a_n - b_n\}] \tag{3.3.1}$$

ということである．
(ii) 2つの実数 $\boldsymbol{\alpha} = [\{a_n\}]$ と $\boldsymbol{\beta} = [\{b_n\}]$ の積 $\boldsymbol{\alpha\beta}$ は，コーシー列 $e_n := a_n b_n$ の定める同値類 $\boldsymbol{\gamma} := [\{e_n\}]$ と定義する．同値類で書けば

$$[\{a_n\}]\,[\{b_n\}] := [\{a_n b_n\}] \tag{3.3.2}$$

ということである．
(iii) 実数 $\boldsymbol{\alpha} = [\{a_n\}]$ とゼロでない実数 $\boldsymbol{\beta} = [\{b_n\}]$ の商 $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}$ は，数列 $f_n := \begin{cases} a_n/b_n & (b_n \neq 0) \\ a_n & (b_n = 0) \end{cases}$ の定める同値類 $\boldsymbol{\gamma} := [\{f_n\}]$ と定義する．同値類で書けば（数式がややこしくなるので $b_n = 0$ の場合の調整は書いてない），

$$\frac{[\{a_n\}]}{[\{b_n\}]} := \Bigl[\Bigl\{\frac{a_n}{b_n}\Bigr\}\Bigr] \tag{3.3.3}$$

である．

（注意）除法に関しては $\boldsymbol{1/\beta}$ を先に定義し，後から $\boldsymbol{\alpha/\beta} := \boldsymbol{\alpha(1/\beta)}$ と定義した方がよほど見通しが良い（実際，切断を考えたときは 2.5 節でそうした）．しかしここでは,「代表元に対する演算を自然に同値類に拡張する」立場を尊重して，敢えて回りくどい方法でやってみる．

（注意）四則を通して論理的順序をおろそかにしているのは以下の２点である（和を例にとって説明する）．

- $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ の「和」は新しい数列 $\{c_n\}$ の同値類として定義されたが，この同値類が定義できるためには，そもそも $\{c_n\}$ が有理コーシー列であることが必要だ．本当に $\{c_n\}$ は有理コーシー列なのか？
- 数列 $\{c_n\}$ の定義は $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ の代表元の取り方に依存する．このとき,「和」の結果は代表元の取り方に依存しないのか？

更に，除法については $b_n = 0$ の時の扱いが何だか変であるので，これが問題ない事も示す必要がある．

以下ではこれらの定義がちゃんと意味を持つ事，つまり上の２つの疑問は問題なく解決される事，をしめす．そのあとで四則の満たす性質を調べよう．

3.3.2 四則演算の定義が定義になっていること

以上の疑問を順次，見ていこう．まずは「和」と「差」について，以下の定理が成り立つ事に注意する．

命題 3.3.2 (加減の定義への補足)
(i) 有理数のコーシー列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ から新しい有理数列 $c_n := a_n + b_n$ と $d_n := a_n - b_n$（$n = 1, 2, 3, \ldots$）を定義すると，これらはコーシー列である．
(ii) 有理数のコーシー列 $\{a_n\}, \{a'_n\}, \{b_n\}, \{b'_n\}$ があり，$\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ かつ $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$ であるとする．このとき，新しい有理数列 $c_n := a_n + b_n$ と $c'_n := a'_n + b'_n$（$n = 1, 2, 3, \ldots$）を定義すると，$\{c_n\} \sim \{c'_n\}$ である．(i) のように和を差に変えて d_n と d'_n を定義すると $\{d_n\} \sim \{d'_n\}$ でもある．

（証明）差の方も同様にできるので，和の方（c_n, c'_n についての性質）だけ証明する．
(i) これは簡単だ．$\{a_n\}, \{b_n\}$ が有理コーシー列であることの定義は

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_1 \qquad \Bigl(m, n > N_1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a_m| < \epsilon \Bigr) \tag{3.3.4}$$

及び

$$\forall\epsilon>0\quad\exists N_2\qquad\Bigl(m,n>N_2\quad\Longrightarrow\quad|b_n-b_m|<\epsilon\Bigr)\tag{3.3.5}$$

であるから，$m,n>\max\{N_1,N_2\}$ では $|a_n-a_m|<\epsilon$ かつ $|b_n-b_m|<\epsilon$ が成り立っている．従って，$m,n>\max\{N_1,N_2\}$ では

$$|c_n-c_m|=|(a_n+b_n)-(a_m+b_m)|\le|a_n-a_m|+|b_n-b_m|<\epsilon+\epsilon=2\epsilon\tag{3.3.6}$$

が成り立つ．ϵ は任意だったので，これは $\{c_n\}$ がコーシー列であることを示す．

(ii) 直接 $\{c_n\}$ と $\{c'_n\}$ を比べても良いが，中間に挟むものとして $c''_n:=a_n+b'_n$ を考えよう．$\{c_n\}\sim\{c''_n\}$ および $\{c''_n\}\sim\{c'_n\}$ を証明すれば（$\sim$ が同値関係だから推移律から）$\{c_n\}\sim\{c'_n\}$ が結論できる．以下では $\{c_n\}\sim\{c''_n\}$ を示す（$\{c''_n\}\sim\{c'_n\}$ も同様である）．

さて，

$$|c_n-c''_n|=|(a_n+b_n)-(a_n+b'_n)|=|b_n-b'_n|\tag{3.3.7}$$

であるので，両辺で $n\to\infty$ とすると，右辺は $\{b_n\}\sim\{b'_n\}$ の定義からゼロに行く．従って左辺の極限もゼロであって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|c_n-c''_n|=0$ が証明できた．これは定義から $\{c_n\}\sim\{c''_n\}$ に他ならない． □

上の命題 3.3.2(i) によれば，定義中の $\{c_n\},\{d_n\}$ はコーシー列であり，これらのコーシー列の同値類 $[\{c_n\}],[\{d_n\}]$ はちゃんと定義されている．また，命題 3.3.2(ii) は上の和や差が代表元の取り方によらないことを保証する（なぜなら，別の代表元 $\{a'_n\},\{b'_n\}$ を用いて和を計算しても，$\{c_n\}\sim\{c'_n\}$ なので，結果は同じ同値類になるから）．この意味で定義 3.3.1 の加法と減法の定義は well-defined である．

次に乗法を考えよう．

命題 3.3.3 (乗法の定義への補足)
(i) 有理数のコーシー列 $\{a_n\},\{b_n\}$ から定義された有理数列 $e_n:=a_nb_n$（$n=1,2,3,\ldots$）はコーシー列である．
(ii) 有理数のコーシー列 $\{a_n\},\{a'_n\},\{b_n\},\{b'_n\}$ があり，$\{a_n\}\sim\{a'_n\}$ かつ $\{b_n\}\sim\{b'_n\}$ であるとする．このとき，新しい有理数列 $e_n:=a_nb_n$ と $e'_n:=a'_nb'_n$（$n=1,2,3,\ldots$）を定義すると，$\{e_n\}\sim\{e'_n\}$ である．

（証明）命題 3.3.2 の証明とほとんど同じである．

(i) これは簡単だ．コーシー列は有界な数列なので，ある大きな M が存在してすべての n で $|a_n|,|b_n|<M$ が成り立つ（各自，チェックする事）．また，$\{a_n\},\{b_n\}$ がコーシー列であることの定義 (3.3.4) と (3.3.5) によって，$m,n>\max\{N_1,N_2\}$ では $|a_n-a_m|<\epsilon$ かつ $|b_n-b_m|<\epsilon$ が成り立っている．従って，このような m,n では

$$|e_n-e_m|=|(a_n-a_m)b_n+a_m(b_n-b_m)|\le|a_n-a_m|\,|b_n|+|a_m|\,|b_n-b_m|<\epsilon M+M\epsilon=2M\epsilon\tag{3.3.8}$$

が成り立つ．ϵ は任意だったので，これは $\{c_n\}$ がコーシー列であることを示す．

(ii) 中間に挟むものとして $e''_n:=a_nb'_n$ を考えよう．$\{e_n\}\sim\{e''_n\}$ および $\{e''_n\}\sim\{e'_n\}$ を証明すれば $\{e_n\}\sim\{e'_n\}$ が結論できるので，以下では $\{e_n\}\sim\{e''_n\}$ を示す（$\{e''_n\}\sim\{e'_n\}$ も同様）．

$\{b_n\}\sim\{b'_n\}$ を数式で書いてみると，

$$\forall\epsilon>0\quad\exists N(\epsilon)>0\qquad\Bigl(n>N(\epsilon)\quad\Longrightarrow\quad|b_n-b'_n|<\epsilon\Bigr)\tag{3.3.9}$$

となっている．従って，$n>N(\epsilon)$ では

$$|e_n-e''_n|=|a_n(b_n-b'_n)|\le M|b_n-b'_n|<M\epsilon\tag{3.3.10}$$

が成り立つ．$\epsilon>0$ は任意だったので，これは $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|e_n-e''_n|=0$ を意味し，$\{e_n\}\sim\{e''_n\}$ である． □

上の命題 3.3.3(i) によれば，定義 3.3.1 中の $\{e_n\}$ はコーシー列である．よってこのコーシー列の同値類 $[\{e_n\}]$ はちゃんと定義されている．また，命題 3.3.3(ii) は上の和が代表元の取り方によらないことを保証する（なぜなら，別の代表元 $\{a'_n\},\{b'_n\}$ を用いて積を計算しても，$\{e_n\}\sim\{e'_n\}$ なので，結果は同じ同値類になるから）．このように，定義 3.3.1 の乗法の定義は well-defined である．

最後に割り算を考える．

命題 3.3.4 (割り算の定義への補足)
(i) ゼロには収束しない有理数のコーシー列 $\{b_n\}$ から新しい有理数列 $c_n := 1/b_n$ （$n = 1, 2, 3, \ldots$）を定義すると（$b_n = 0$ の場合は，その n での $c_n := 1$ と定義），これもコーシー列である．
(ii) ゼロには収束しない有理数のコーシー列 $\{b_n\}, \{b'_n\}$ があり，$\{b_n\} \sim \{b'_n\}$ であるとする．このとき，新しい有理数列 $c_n := 1/b_n$ と $c'_n := 1/b'_n$ （$n = 1, 2, 3, \ldots$）を定義すると，$\{c_n\} \sim \{c'_n\}$ である．(分母の b_n や b'_n がゼロになるところでは (i) と同じ定義にする.)
(iii) ゼロには収束しない有理数のコーシー列 $\{b_n\}$ と有理数のコーシー列 $\{a_n\}$ から新しい有理数列 $c_n := a_n/b_n$ （$n = 1, 2, 3, \ldots$）を定義すると（$b_n = 0$ の場合は，その n での $c_n := 1$ と定義），これもコーシー列である．
(iv) ゼロには収束しない有理数のコーシー列 $\{b_n\}, \{b'_n\}$ があり，$\{b_n\} \sim \{b'_n\}$ であるとする．また，有理数のコーシー列 $\{a_n\}, \{a'_n\}$ があり，$\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ であるとする．このとき，新しい有理数列 $c_n := a_n/b_n$ と $c'_n := a'_n/b'_n$ （$n = 1, 2, 3, \ldots$）を定義すると，$\{c_n\} \sim \{c'_n\}$ である．(分母の b_n や b'_n がゼロになるところでは (iii) と同じ定義にする.)

（注）$\{b_n\}$ がゼロに収束しないコーシー列の場合，$b_n = 0$ となる n は有限個しかないから，その有限個を上の命題のように変えても，同値類などの定義には関係ない．

証明：
命題 3.3.2 の証明とほとんど同じである．
(i) $\{a_n\}$ がゼロに収束しないので，

$$\exists\delta > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \qquad |a_n| > \epsilon \tag{3.3.11}$$

となっている．また，$\{a_n\}$ がコーシー列なので，上の δ に対して N' があって，

$$m, n > N' \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n - a_m| < \frac{\delta}{2} \tag{3.3.12}$$

も成り立つ．そこで N' よりも大きく，かつ (3.3.11) の結論が成り立つような n を一つ固定すると，$m > N'$ では

$$|a_m| > |a_n| - \frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{2} \tag{3.3.13}$$

が成り立つ．つまり，このように大きな m では，a_m はゼロではないのであって，$c_m := 1/a_m$ も普通に定義できている．さらにこの評価を用いると，$m, \ell > N'$ では

$$|c_m - c_\ell| = \frac{|a_m - a_\ell|}{|a_m|\,|a_\ell|} \le \frac{|a_m - a_\ell|}{(\delta/2)^2} \tag{3.3.14}$$

が成立する．そこで，$\{a_n\}$ がコーシー列であることをもう一度使うと，

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N'' > 0 \qquad \Bigl(m, \ell > N'' \quad \Longrightarrow \quad |a_m - a_\ell| < (\delta/2)^2 \epsilon \Bigr) \tag{3.3.15}$$

が成り立っている事がわかる．従って，この ϵ に対して $m, \ell > \max\{N', N''\}$ では

$$|c_m - c_\ell| \le \frac{|a_m - a_\ell|}{(\delta/2)^2} < \epsilon \tag{3.3.16}$$

が成立する．$\epsilon > 0$ は任意であったから，これは数列 $\{c_n\}$ がコーシー列であることを意味する．
(ii) $\{a_n\}$ と $\{a'_n\}$ に対して (i) と同じ議論を行うと，ある $\delta > 0$ とおおきな N' があって，$m > N'$ では $|a_m| > \delta'$ かつ $|a'_m| > \delta'$ が成立していることがわかる．
一方，$\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ を数式で書いてみると，

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) > 0 \qquad \Bigl(n > N(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a'_n| < \epsilon \Bigr) \tag{3.3.17}$$

となっている．従って，$n > \max\{N(\epsilon), N'\}$ では

$$|c_n - c'_n| = \frac{|a_m - a'_m|}{|a_m|\,|a'_m|} \le \frac{\epsilon}{(\delta')^2} \tag{3.3.18}$$

が成り立つ．$\epsilon > 0$ は任意だったので，これは $\lim_{n\to\infty} |c_n - c''_n| = 0$ を意味し，$\{c_n\} \sim \{c''_n\}$ である．

(iii) (iv) 上の (i) (ii) に更に $\boldsymbol{\alpha}$ との積（a_n との積）が加わっただけであり，同様にできるので略． □

定義 3.3.1 での除法に話を戻す．$\boldsymbol{\beta} \neq 0$ という事はその代表元 $\{b_n\}$ がゼロに収束しないということである．この場合，上の命題 3.3.4 によって，上の $\{c_n\}$ は有理数のコーシー列になっている事，および $\{c_n\}$ の定義する同値類は代表元 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の取り方によらない事が保証されている．従って，定義 3.3.1 により除法は一意に定義できた．

3.3.3 四則演算の性質

四則演算の性質をみていこう．まず手始めに：

命題 3.3.5 (有理数に対する四則演算) 上で定義した四則演算を $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ が有理数の時に行うと，その結果は我々が普通に有理数の四則演算をやったものに等しい．

この命題のいいたいところは以下のとおりである（加法を例にとって説明する）．いま，α, β が有理数のとき，今までの構成法によってコーシー列の同値類 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ を作る．次に $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ を定義 3.3.1 によって定義したとする．するとその結果は「普通に有理数の足し算 $\alpha + \beta$ を行ったものから作られるコーシー列の同値類」に等しいということだ．（普通に有理数の足し算をするというのは，$\alpha = p/q, \beta = s/t$ と分数の形で表しておいて，小学校以来の方法で通分して足し算する，ということ．）我々が定義した四則演算は，少なくとも有理数に対しては普通のものであって欲しいから，これはアタリマエに近いけども重要な性質である．

証明 これはほとんど自明だが，念のために説明しておこう．$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ が有理数の時には，これらを表す代表元として $a_n \equiv \alpha, b_n = \beta$（各項がいつも α, β）となっているものをとればよい[13]．定義 3.3.1 による和は $c_n := a_n + b_n = \alpha + \beta$（各項がいつも $\alpha + \beta$）による同値類 $[\{c_n\}]$ のことと定義される（和が代表元の取り方によらないことは定義 3.3.1 の下で注意した）．しかし，この $\{c_n\}$ の表す実数は有理数 $\alpha + \beta$ に他ならない（ここでの $+$ は普通の有理数の和である）． □

では，次に加法のいくつかの性質を見ていこう．まずは：

定理 3.3.6 (加法の結合則，交換則) 加法について，結合則，交換則がなりたつ．つまり，任意の実数 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ に対して

$$\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma}, \qquad \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} \tag{3.3.19}$$

また減法もまざると

$$\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\gamma} \tag{3.3.20}$$

もなりたつ．

（証明）和の定義に従って，式の両辺がそれぞれどんな数列で表されるかを考えれば良い．$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ の代表元をそれぞれ $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ とすると，$\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}$ は $d_n := b_n + c_n$ で定義される有理数のコーシー列 $\{d_n\}$ を代表元とする同値類であり，$\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$ は $f_n := a_n + d_n$ によって定義されるコーシー列 $\{f_n\}$ を代表元とする同値類である．しかし定義によると，$f_n := a_n + d_n = a_n + b_n + c_n$ であるので，結局，$\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma})$ はこの数列を代表元とする同値類である．

これは既に a, b, c の順序によらない形をしているから証明は終わったようなものだが，念のためにやっておくと，$(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma}$ も同じ数列 $\{f_n\}$ を代表元とする同値類であることがわかる．従って，$\boldsymbol{\alpha} + (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\gamma}$ である．

加法の交換法則や減法の方も全く同様にしてできるので略． □

[13] そろそろ忘れているかもしれないから，記号の注意．α, β などは普通の有理数を表す．一方，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ はこれらから作ったコーシー列の同値類を表す

更に加法というからにはその単位元の存在をいう必要があるが，これは簡単である．

定理 3.3.7 (0 は加法の単位元) $\mathbf{0}$ は加法の単位元である．つまり，任意の実数 $\boldsymbol{\alpha}$ に対して，$\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$

（証明）和が代表元にはよらない事を既に言ってあるから，都合の良いものをとって示せば良い．有理数 0 を表すコーシー列としては当然,「すべての項がゼロ」である数列 $\{0,0,0,\ldots\}$ を用いよう．$\boldsymbol{\alpha}=[\{a_n\}]$ であれば，$\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}$ の代表元は，第 n 項が $a_n+0=a_n$ である数列である．でもこれはもとの $\{a_n\}$ と全く同じ数列だから，$\{a_n\}$ と同じ同値類に属する．従って，$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$. □

次に，加法の逆元 $-\boldsymbol{\alpha}$ は：

定義 3.3.8 ($-\boldsymbol{\alpha}$ の定義) 実数 $\boldsymbol{\alpha}$ に対して $\mathbf{0}-\boldsymbol{\alpha}$ を，$-\boldsymbol{\alpha}$ と略記する．

（注）$-\boldsymbol{\alpha}$ を $-\mathbf{1}$ と $\boldsymbol{\alpha}$ の積と定義する事もできるが，ここでは $\mathbf{0}-\boldsymbol{\alpha}$ と定義した．両者が等しい事は後の命題 3.3.13 が保証する．

すると

命題 3.3.9 (加法の逆元) $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ は実数とする．
(i) 上で定義した $-\boldsymbol{\alpha}$ は加法の逆元である．つまり，$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=(-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ である．
(ii) $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$ である．

（証明）(i) 結合法則によって

$$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}+(\mathbf{0}-\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0})-\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha} \tag{3.3.21}$$

がなりたつが，この右辺は $\boldsymbol{\alpha}$ の代表元 $\{a_n\}$ を用いて計算すると $c_n=a_n-a_n=0$ の同値類ということになる．これはもちろん，ゼロに他ならない．

(ii) 結合法則 (3.3.20) と 0 が加法の単位元であることから，

$$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}+(\mathbf{0}-\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0})-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta} \tag{3.3.22}$$

□

では乗法に進もう．まずは交換則や分配則など：

定理 3.3.10 (乗法の法則) 任意の $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{R}$ に対して
(i) $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}$
(ii) $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\gamma}$
(iii) $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\gamma}$

（証明）すべて加法の時と同様である．つまり，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ の代表元を $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ として，(i, ii, iii) の両辺の代表元が同じものである事を示せば良い．例えば (i) なら，$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$ と $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}$ の代表元はともに $d_n:=a_nb_n$ によって定義される $\{d_n\}$ であって，$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}$ がなりたつ．

同様に，(ii) の両辺の代表元は共に $e_n:=a_nb_nc_n$ によって定義される $\{e_n\}$ であるし，(iii) の両辺の代表元は共に $f_n:=a_n(b_n+c_n)$ によって定義される $\{f_n\}$ である．(以上、アタリマエのように見えるかも知れないが，代表元が同じである事は，有理数の満たす交換則や結合則から保証されている.) □

次に，乗法の単位元.

定理 3.3.11 (1 は乗法の単位元である) 実数 $\mathbf{1}$ は正の実数における乗法の単位元である．つまり，任意の $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}$ に対して

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{1}=\mathbf{1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha} \tag{3.3.23}$$

（証明）加法の時と同様に，$\mathbf{1}$ の代表元として各項が 1 の数列 $\{1,1,1,\ldots\}$ をとってきて，$\boldsymbol{\alpha}$ の代表元 $\{a_n\}$ との掛け算を計算すれば良い．結果は全く同じ数列 $\{a_n\}$ の表す同値類ということになるので，積の結果は基と同じ $\boldsymbol{\alpha}$ である． □

命題 3.3.12 (ゼロによる掛け算) 任意の実数 $\boldsymbol{\alpha}$ と実数 $\mathbf{0}$ に対して，その積は

$$\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{0} = \mathbf{0}\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \tag{3.3.24}$$

を満たす．

（証明）代表元をとって計算するだけだ． □

以前に実数 $\boldsymbol{\alpha}$ に対して，$-\boldsymbol{\alpha}$ を定義した（定義 3.3.8）．これと「$-\mathbf{1}$ をかける」ことは矛盾しない：

命題 3.3.13 ($-\mathbf{1}$ による掛け算) 任意の実数 $\boldsymbol{\alpha}$ を考える．
(i) 定義 2.3.4 で定義した $-\boldsymbol{\alpha}$ は $-\mathbf{1}$ と $\boldsymbol{\alpha}$ の積でもある．
(ii) $-(-\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$ である．

（証明）(i) $\boldsymbol{\alpha}$ の代表元を $\{a_n\}$ とすると，$\mathbf{0} - \boldsymbol{\alpha}$ の代表元は $b_n := 0 - a_n = -a_n$ で定義される $\{b_n\}$ である．一方，$(-\mathbf{1}) \times \boldsymbol{\alpha}$ の代表元は $c_n := (-1) \times a_n = -a_n$ で定義される $\{c_n\}$ であるが，$b_n \equiv c_n$ であるから，両者は同じ実数を定義する．
(ii) $\boldsymbol{\alpha}$ の代表元を $\{a_n\}$ とすると，$-(-\boldsymbol{\alpha})$ の代表元は $b_c := 0 - (0 - a_n) = a_n$ で決まる $\{b_n\}$ であるが，$b_n \equiv a_n$ だから，これは $\boldsymbol{\alpha}$ と同じ実数を表す． □

逆数と除法に進む．まず，逆数を定義する．

定義 3.3.14 (逆数) ゼロでない実数 $\boldsymbol{\alpha} = [\{a_n\}]$ の逆数 $\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}}$ は，割り算 $\mathbf{1}/\boldsymbol{\alpha}$ の結果として定義する．

これは実際に逆数になっている：

命題 3.3.15 (逆数) 上で定義した逆数 $\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}}$ は，実際に逆数である．つまり，

$$\boldsymbol{\alpha}\,\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}}\,\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1} \tag{3.3.25}$$

証明：

要するに乗法を実行して $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{1}/\boldsymbol{\alpha}) = 1$ を示せば良い．乗法の結果は代表元によらない事は既に言ってあるから，今までと同じく，計算しやすい代表元を用いて行えば充分である．
$\boldsymbol{\alpha}$ の代表元を $\{a_n\}$ とする．この a_n を用いて $b_n := 1/a_n$ を定義すると —— ただし，$a_n = 0$ のところでは $b_n = 1$ とする —— $\{b_n\}$ の定義する同値類が $\mathbf{1}/\boldsymbol{\alpha}$ であることは割り算の定義そのものである．
さて，定義により掛け算は代表元同士をかければ良いから，その結果は $c_n := a_n b_n = 1$ の表す同値類になる．これは実数 $\mathbf{1}$ に他ならない．つまり，(3.3.25) が証明された． □

以上で見たように，加減乗除が望ましい性質を持っている事は割合簡単に証明できる．順序（大小関係）の方はちょっと大変だ．切断の場合と異なり，$\boldsymbol{\alpha}$ の代表元の各項と $\boldsymbol{\alpha}$ の大小が一定ではないため，定義などが煩雑になってしまう．大小関係は次節で考える．

3.4 実数の順序（大小）と絶対値

まず，２つの実数（＝コーシー列の同値類）がどのような時に等しいのかから確認しておこう．定義 3.2.3 の下でも注意したように，２つの実数 $\boldsymbol{\alpha} = [\{a_n\}]$ と $\boldsymbol{\beta} = [\{b_n\}]$ はそれぞれの代表元が同値の時にのみ、等しいと考え

る．つまり，

$$[\{a_n\}] = [\{b_n\}] \quad \iff \quad a_n \sim b_n \quad \iff \quad \lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0 \tag{3.4.1}$$

となるとき，かつそのときにのみ，$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ ということにしている．

では，実数の順序（大小関係）を導入しよう．何度もくり返しているように「我々は本当はコーシー列の極限にのみ興味があるのだ（だから同値類を考えている）」ことを念頭に置けば，$[\{a_n\}] = \boldsymbol{\alpha}$ と $[\{b_n\}] = \boldsymbol{\beta}$ の大小は，これらのコーシー列の極限の大小がどうなるかを見越して定義しておくのが良い．

まず準備として，以下の命題を証明しておく．

命題 3.4.1 (実数の大小に関する準備) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ を実数（＝有理数のコーシー列）とする．以下の３つの条件はすべて同値である．(以下では $\{a_n\}$ は $\boldsymbol{\alpha}$ の代表元，$\{b_n\}$ は $\boldsymbol{\beta}$ の代表元のこと．)

A. すべての代表元 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について，$|a_n - b_n|$ は $n \to \infty$ ではゼロには収束しない．
更に，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ をうまく選ぶと，$a_n \le b_n$（$n = 1, 2, 3, \ldots$）がなりたつようにできる．

B. $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ をうまく選ぶと，正の有理数 ϵ と N が存在して「すべての $n > N$ に対して $a_n + \epsilon < b_n$」となるようにできる．

C. 代表元 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に依存しない正の有理数 ϵ が存在し，任意の代表元 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して
正の整数 $N(\{a_n\}, \{b_n\})$ が存在して，$n > N(\{a_n\}, \{b_n\})$ ならば $a_n + \epsilon < b_n$ が成り立つ．

同様に，以下の３つの条件もすべて同値である．

A′. すべての代表元 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について，$|a_n - b_n|$ は $n \to \infty$ ではゼロには収束しない．
更に，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ をうまく選ぶと，$a_n \ge b_n$（$n = 1, 2, 3, \ldots$）がなりたつようにできる．

B′. $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ をうまく選ぶと，正の有理数 ϵ と N が存在して「すべての $n > N$ に対して $a_n > b_n + \epsilon$」となるようにできる．

C′. 代表元 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に依存しない正の有理数 ϵ が存在し，任意の代表元 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して
正の整数 $N(\{a_n\}, \{b_n\})$ が存在して，$n > N(\{a_n\}, \{b_n\})$ ならば $a_n > b_n + \epsilon$ が成り立つ

（注）B では特定の（うまく選んだ）$\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して $\epsilon > 0$ が存在して... と言っている．それに対して C ではすべての代表元に共通の $\epsilon > 0$ が存在して... と言っている．もちろん，この ϵ は $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ には依存する．(先走ると $\epsilon \approx |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|$ のつもりだ．)

この命題の証明は後回しにして，この命題に基づいた $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ などの定義を書いておこう．

定義 3.4.2 (実数の大小) ２つの実数（＝有理数のコーシー列）$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ の大小は以下のように定める．

- （復習）$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ の代表元をそれぞれ $\{a_n\}, \{b_n\}$ とする．$\{a_n\} \sim \{b_n\}$ つまり $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$ の時，かつそのときに限り，$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ と定める．
- 命題 3.4.1 の A, B, C のいずれかが成り立つとき，かつそのときに限り，$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ と定める．
- 命題 3.4.1 の A′, B′, C′ のいずれかが成り立つとき，かつそのときに限り，$\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$ と定める．

命題 3.4.1 の証明

A′, B′, C′ と A, B, C は不等号の向きを除けばほとんど同じだから，A, B, C の同値性を証明する．

$C \Longrightarrow B$ の証明

C の方が B よりも条件がきついから（C はすべての代表元の取り方について，B はある特定の代表元の取り方について），$C \Longrightarrow B$ である．

$B \Longrightarrow C$ の証明

B が特定の代表元 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して成り立つとする．このとき，他の代表元 $\{a'_n\}, \{b'_n\}$ を勝手にとったとき，

$$\text{正の整数 } N(\{a'_n\}, \{b'_n\}) \text{ が存在して，} n > N(\{a_n\}, \{b_n\}) \text{ ならば} \quad a_n + \frac{\epsilon}{2} < b_n \quad \text{が成り立つ} \tag{3.4.2}$$

ことを証明しよう．これは C そのものなので．メデタシメデタシである．

(3.4.2) を示すため，$\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ かつ $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$ であることを数式で書いてみよう．$\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ は $\lim_{n\to\infty} |a_n - a'_n| = 0$ ということだったから，

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N'(\epsilon) \qquad \Bigl(n > N'(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a'_n| < \frac{\epsilon}{4} \text{ かつ } |b_n - b'_n| < \frac{\epsilon}{4} \Bigr) \tag{3.4.3}$$

がなりたつ．そこで，B の N と (3.4.3) の N' の両方より大きい n では

$$b'_n > b_n - \frac{\epsilon}{4} > a_n + \epsilon - \frac{\epsilon}{4} > a'_n - \frac{\epsilon}{4} + \epsilon - \frac{\epsilon}{4} = a'_n + \frac{\epsilon}{2} \tag{3.4.4}$$

が成り立つ．つまり，(3.4.2) が成立する事が証明された．

<u>$B \Longrightarrow A$ の証明</u>

また，B が成り立っておれば，このような a_n, b_n をひとつ持ってきて，新しい数列 $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ を，$n > N$ ではもとの a_n, b_n のまま，$n \le N$ では $\tilde{a}_n = 0, \tilde{b}_n = 1$ とでも定義する．すると，この $\tilde{a}_n, \tilde{b}_n$ は $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ の代表元であり，かつすべての $n \ge 1$ で $\tilde{a}_n \le \tilde{b}_n$ を満たすので，A の後半の条件が満たされている．この数列が $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$ を満たさないのは明らかなので（各自チェック），A の前半も満たされる．従って，$B \Longrightarrow A$ が証明できた．

<u>$A \Longrightarrow B$ の証明</u>

最後に「A ならば B」を示せば証明は完結する．以下，A に出てくる代表元を $\{a_n\}, \{b_n\}$ と書く．

まず,「$\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$ ではない」ということを書いてみると，

$$\exists\epsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \qquad |a_n - b_n| > \epsilon \tag{3.4.5}$$

となる．ところが，すべての n で $a_n \le b_n$ であるから，上のは

$$\exists\epsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \qquad b_n - a_n > \epsilon \tag{3.4.6}$$

を意味する．つまりこの $\{a_n\}, \{b_n\}$ を使って B が成立する．

以上で A, B, C が同値である事が証明された． □

（注） この章の前提条件をすべて無視して以前に習ったコーシー列の性質などをすべて認め，かつ「$\boldsymbol{\alpha} = [\{a_n\}]$ というのは実は $\boldsymbol{\alpha} = \lim_{n\to\infty} a_n$ を狙っているのだ」とまで思えば，上の定義はまさに $\boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{\beta}$ や $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ の必要充分条件になっていることを各自，納得しておこう．特に，$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ であっても，代表元 a_n, b_n の取り方によっては，小さい n では $a_n > b_n$ かもしれないし，$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ の場合はいつまでたっても $a_n > b_n$ という事もあり得る．このような事情を反映して，上の定義では「代表元をうまく選ぶと○○が実現される」という表現になっている．

以上を基にして，この大小が我々の望む性質を持っている事を証明していこう．大小の定義には A, B, C のうち，都合の良いものを用いる．まず，

定理 3.4.3 (大小は必ず定まる) 2つの実数 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ に対しては，以下の 3 つのうち一つだけが常に成立する：

$$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta} \tag{3.4.7}$$

（証明）$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ の代表元を $[\{a_n\}], [\{b_n\}]$ としよう．もし $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$ ならば定義により $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ である．よって，$\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$ ではない場合に $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ か $\boldsymbol{\beta} < \boldsymbol{\alpha}$ のどちらか一方だけが成り立つ事を示せば良い．

$\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$ ではない場合，以前にもやったように

$$\exists\epsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \qquad |a_n - b_n| > \epsilon \tag{3.4.8}$$

が成り立っているが，ここで N を十分大きくとると，$a_n - b_n$ の符号は一定になる事が以下のように示される．なぜなら，もし符号が一定にならないならば，いくらでも大きい n, m がとれて，

$$a_n - b_n > \epsilon \quad \text{かつ} \quad a_m - b_m < -\epsilon \tag{3.4.9}$$

が両立することになる．ところが，これは a_n, b_n が共にコーシー列であることに矛盾する．実際，

$$\forall\epsilon' > 0 \quad \exists N' \qquad \Bigl(n, m > N' \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a_m| < \epsilon' \text{ かつ } |b_n - b_m| < \epsilon' \Bigr) \tag{3.4.10}$$

であるはずなので，(3.4.9) と (3.4.10) を両方満たしている m, n に対しては，

$$a_n > b_n + \epsilon > b_m - \epsilon' + \epsilon > a_m + \epsilon - \epsilon' + \epsilon \tag{3.4.11}$$

となるはずであるが，この不等式の両辺は $\epsilon' = \epsilon/2$ などの時に，$|a_n - a_m| < \epsilon'$ に矛盾している．これで N が十分大きい時に (3.4.8) に現れる $a_n - b_n$ の符号が一定になることが証明できた．

従って，N を十分大きくとると，(3.4.8) から

$$\exists\epsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \qquad a_n - b_n > \epsilon \tag{3.4.12}$$

または

$$\exists\epsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \qquad a_n - b_n < -\epsilon \tag{3.4.13}$$

のどちらかが一方のみが成り立つ事がわかった．しかし，定義 3.4.2 によれば，(3.4.12) は $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$ を意味するし，(3.4.13) は $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ を意味する． □

定理 3.4.4 (推移律) 推移律が成り立つ：

$$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta} \text{ かつ } \boldsymbol{\beta} < \boldsymbol{\gamma} \qquad \text{ならば} \qquad \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\gamma} \tag{3.4.14}$$

（証明）定義 3.4.2 によれば，十分大きな N_{ab} と N_{bc} を持ってくると，正の ϵ_{ab} と ϵ_{bc} が存在して，$n > N_{ab}$ では $a_n < b_n - \epsilon_{ab}$ および $n > N_{bc}$ では $b_n < c_n - \epsilon_{bc}$ がなりたつようにできる．従って，$n > \max\{N_{ab}, N_{bc}\}$ では $a_n < c_n - (\epsilon_{ab} + \epsilon_{bc})$ がなりたつ．定義 3.4.2 の B によれば，これは $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\gamma}$ を意味する． □

これくらいが成り立つ事を確かめれば，上で定義した大小関係が本当に我々の望むもの（通常，我々の使ってる「大小」と同じ）といって良いだろう．

定理 3.4.5 (有理数の稠密性) 任意の 2 実数 $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ に対して，$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\beta}$ なる有理数 r が無数に存在する．

(注) 以前からのお約束の通り，普通の有理数 r に対して，$\boldsymbol{r} := [\{r, r, r, \ldots\}]$ と定義してある．上の不等式 $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r} < \boldsymbol{\beta}$ は，定義 3.4.2 による同値類の大小関係の意味で不等式が成り立っている，ということである．

（証明）$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ とし，それぞれの代表元を $\{a_n\}, \{b_n\}$ と書く．定義 3.4.2 によれば，$\epsilon > 0$ が存在して，十分大きな N をとると，

$$n > N \qquad \Longrightarrow \qquad a_n + \epsilon < b_n \tag{3.4.15}$$

が成立する．一方，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はコーシー列なので，この $\epsilon > 0$ に対して N' が存在して，

$$n, m > N' \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{10} \text{ かつ } |b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{10} \tag{3.4.16}$$

も成立する．以下，N, N' の両方よりも大きな m を一つ固定して考える．

m を固定して n を動かして (3.4.16) を見ると，a_n は a_m のまわり $\pm\epsilon/10$ の範囲に存在する事，および b_n は b_m のまわり $\pm\epsilon/10$ の範囲に存在する事がわかる．つまり，$n > N'$ では

$$a_n < a_m + \frac{\epsilon}{3} \quad \text{かつ} \quad b_n > b_m - \frac{\epsilon}{3} \tag{3.4.17}$$

なのである．ところが，a_m と b_m は $m > N$ ならば $a_m + \epsilon < b_m$ を満たしているので，上の $\alpha' := a_m + \frac{\epsilon}{3}$ と $\beta' := b_m - \frac{\epsilon}{3}$ の間には少なくとも $\frac{\epsilon}{3}$ のギャップが空いている．いま，m は固定して考えることにしたので，α' と β' は有理数直線上の固定された有理数であって，$n > \max\{N, N'\}$ では $a_n < \alpha'$ かつ $b_n > \beta'$ であることが結論された．

さて，α', β' は有理数であって、この間には無数の有理数が存在する．例えば，M を大きな整数，$j = 1, 2, 3, \ldots, M-1$ として $\gamma^{(M,j)} := \alpha' + \frac{(\beta'-\alpha')j}{M}$ を考えると，これらはすべて α' と β' の間の有理数である．そこで，すべての項が $\gamma^{(M,j)}$ である数列を考えるとこれはコーシー列であるから，我々の新しい実数の定義にあっており，かつ有理数である．しかもこれは $n > \max\{N, N'\}$ では $a_n + \epsilon'' < \gamma_n^{(M,j)}$ および $\gamma_n^{(M,j)} + \epsilon''' < b_n$ を満たしており $(\epsilon'' := \gamma^{(M,j)} - \alpha' > 0, \epsilon''' := \beta' - \gamma^{(M,j)} > 0)$，定義 3.4.2 によって $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\gamma}^{(M,j)} < \boldsymbol{\beta}$ が結論できる[14]．

というわけで，M を大きくすれば $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ の間にある有理数が無数に存在する事が，具体的に有理数を構成する事により証明できた． □

定理 3.4.6 (実数は有理数でいくらでも近似できる) 任意の実数 $\boldsymbol{\alpha}$ と任意の正整数 m に対し $\boldsymbol{r} \le \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r} + \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}$ となる有理数 r が存在する．

（証明）証明の骨子は上のものと似ている．$\boldsymbol{\alpha}$ の代表元を $\{a_n\}$ とすると，これはコーシー列なので，$\epsilon = (2m)^{-1}$ に対して $N(\epsilon)$ が存在して，

$$n, \ell > N(\epsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n - a_\ell| < \epsilon \tag{3.4.18}$$

が成り立つ．そこで，以下ではこのような $\ell > N(\epsilon)$ を一つ固定して，$r = a_\ell - \epsilon$ とおき，これが定理の結論を満たす事を示そう．

さて，このように固定した ℓ を用いると，$n > N(\epsilon)$ では (3.4.18) から

$$r = a_\ell - \epsilon < a_n < a_\ell + \epsilon = r + 2\epsilon = r + \frac{1}{m} \tag{3.4.19}$$

が成り立っている事が保証される．しかしこれは定義 3.4.2 によれば，$\boldsymbol{r} \le \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{r} + \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{m}}$ を意味している． □

加減と大小の重要な関係はチェックしておく必要がある：

定理 3.4.7 (加法は順序を保つ)
(i) $\boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{\gamma}$ かつ $\boldsymbol{\beta} \le \boldsymbol{\delta}$ ならば $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \le \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\delta}$.
(ii) $\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\gamma}$ かつ $\boldsymbol{\beta} \le \boldsymbol{\delta}$ ならば $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} < \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\delta}$.

証明はやはり，代表元を使って計算すれば良い． □

以上で大小関係は大体終わったので，実数 $\boldsymbol{\alpha}$ の「絶対値」$\|\boldsymbol{\alpha}\|$ に進もう．有理数の絶対値と区別するため，これから定義する実数の絶対値を $\|\cdot\|$ で表す．

命題 3.4.8 (絶対値への準備) 実数 $\boldsymbol{\alpha}$ の代表元を $\{a_n\}$ とするとき，新しい数列 $b_n := |a_n|$ を定義すると，
(i) この $\{b_n\}$ は有理数のコーシー列である．
(ii) $\boldsymbol{\alpha}$ の他の代表元 $\{a'_n\}$ から $b'_n := |a'_n|$ を定義すると，$\{b_n\} \sim \{b'_n\}$ である．

（証明）$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ であるかないかで分けて議論する．もし $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ の場合は $\{a_n\}$ も $\{a'_n\}$ もゼロに収束する事はすぐにわかる．従って，この場合は (i)(ii) ともに成り立つ．以下では $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ではない場合を考える．

(i) 「$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ ではない」ことから，(3.4.12) 付近のように議論すれば，「十分大きな N をとれば，すべての $n > N$ では a_n の符号が一定になる（n によらなくなる）」ことが結論できる．従って $n, m > N$ では以下の式で $|a_n|$ などの絶対値を外して

$$|b_m - b_n| = \bigl|\, |a_m| - |a_n| \,\bigr| = \bigl|\, a_m - a_n \,\bigr| \tag{3.4.20}$$

が成り立っている．しかし $\{a_n\}$ がコーシー列であるため，任意の $\epsilon > 0$ に対して $N'(\epsilon)$ がとれて，$m, n > N'(\epsilon)$ に対しては上の右辺が ϵ より小さくなる．これは $\{b_n\}$ がコーシー列であることを示している．

(ii) (i) でも用いたように，十分大きな n では a_n と a'_n の符号が同じで，かつ n によらなくなる．そこでこのように大きな n では

$$|b_n - b'_n| = \bigl|\, |a_n| - |a'_n| \,\bigr| = \bigl|\, a_n - a'_n \,\bigr| \tag{3.4.21}$$

[14] 今までのお約束通り，ここの $\boldsymbol{\gamma}^{(M,j)}$ とは，「普通の」有理数 $\gamma^{(M,j)}$ の同値類としての実数を表す

が成り立つが，右辺は $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$ なので $n \to \infty$ でゼロに収束する．つまり，$\{b_n\} \sim \{b'_n\}$ である． □

以上の準備の下に，絶対値を定義する．

定義 3.4.9 (絶対値) 実数 $\boldsymbol{\alpha} = [\{a_n\}]$ の絶対値 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ を，「$b_n := |a_n|$ で定まる有理数列 $\{b_n\}$ の同値類」と定義する．

命題 3.4.8 が (i) 上の $\{b_n\}$ はコーシー列になっていること，(ii) 上の定義は代表元の取り方によらないこと，の 2 つを保証しているので，この定義は well-defined である．

通常，絶対値の定義は「$\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$ なら $\|\boldsymbol{\alpha}\| := \boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha} < \mathbf{0}$ なら $\|\boldsymbol{\alpha}\| := -\boldsymbol{\alpha}$」とやるが，これももちろん、成り立つ：

命題 3.4.10 (絶対値の別の定義) 実数 $\boldsymbol{\alpha}$ の絶対値は以下をみたす：

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} & (\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}) \\ \mathbf{0} & (\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}) \\ -\boldsymbol{\alpha} & (\boldsymbol{\alpha} < \mathbf{0}) \end{cases} \tag{3.4.22}$$

（証明）代表元を使って同等性を証明すれば良い．大小の定義から，$\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$ の場合はその代表元 $\{a_n\}$ として $a_n \geq 0$ を満たすものがとれるし，$\boldsymbol{\alpha} < \mathbf{0}$ の場合には $a_n \leq 0$ を満たすものがとれる．従って，$\|\boldsymbol{\alpha}\|$ の代表元である $b_n := |a_n|$ は $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$ の時には $b_n = a_n$，$\boldsymbol{\alpha} < \mathbf{0}$ の時には $b_n = -a_n$ を満たす．従って，$\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$ なら $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \boldsymbol{\alpha}$ であるし，$\boldsymbol{\alpha} < \mathbf{0}$ ならば $\|\boldsymbol{\alpha}\| = -\boldsymbol{\alpha}$ である（後者については命題 3.3.13(i) などを用いた）．

最後に $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ の場合であるが，$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ というのは $\boldsymbol{\alpha}$ の代表元 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たす事であった．この際，$b_n := |a_n|$ の極限もゼロであるから，$\{b_n\}$ の表す実数，つまり $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ もゼロである． □

この絶対値の良いところは，これがその中身がゼロであるか否かの判定に使えることだ．つまり（上の命題と少し重なるけど）

命題 3.4.11 (絶対値は $\mathbb{R}$ のノルムである) 実数 $\boldsymbol{\alpha}$ について常に $\|\boldsymbol{\alpha}\| \geq \mathbf{0}$ である．また，

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|\boldsymbol{\alpha}\| = \mathbf{0} \tag{3.4.23}$$

がなりたつ．さらに，２つの実数 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ について，

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}| = \mathbf{0} \tag{3.4.24}$$

および三角不等式

$$\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\| \tag{3.4.25}$$

がなりたつ．

（証明）$\|\boldsymbol{\alpha}\|$ を定義する数列 b_n が $b_n \geq 0$ を満たしているので，定義 3.4.2 によって，$\|\boldsymbol{\alpha}\| \geq 0$ である．

次に (3.4.23) と (3.4.24) のどちらも，左から右はすぐに出るので証明は略．そこで以下では (3.4.23) の右から左を示そう．((3.4.24) は (3.4.23) の書き直しに過ぎない.）その定義から，$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \mathbf{0}$ とはこれを定義する数列 $b_n := |a_n|$ がゼロに収束する事であるが，これは $\{a_n\}$ 自身がゼロに収束する事を意味する．つまり，$\{a_n\}$ は各項がゼロの数列 $(0, 0, 0, \ldots)$ と同値であって，$[\{a_n\}]$ はゼロを表している．つまり，$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

三角不等式の証明は，命題 3.4.10 を使って $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ の正負で場合分けするのが一番簡単だろう．もちろん，定義 3.4.9 にもどって，代表元の各項に対して成り立つ三角不等式 $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|$ から議論する事も可能である． □

3.5 実数における極限の定義

以上で実数体を大体構成した．これで漸く，普通の極限の話に戻れる．極限の定義などは通常のように行うのだが,「実数」そのものが「有理数のコーシー列」だと定義されているので，ちょっと変な感じがするかもしれない．少し丁寧に見ていく事にする．

記号のお約束：これからは実数 $\boldsymbol{\alpha}$ とその代表元（有理コーシー列）$\{a_n\}$ を同時に扱う必要がある．更にすぐ後で，各項が実数であるような「コーシー列」も定義して用いる．$\{a_n\}$ の添字 n は実数の代表元である有理コーシー列の添字だったが，実数の作る列を考える際の添字はこれとは全く別である．そこで両者を区別するため，今まで通り,「下付きの添字は実数の代表元であるところの有理コーシー列の各項を区別する添字」とし，主に m, n, p を用いる（例：$\boldsymbol{\alpha}$ の代表元 $\{a_n\}$ の第 n 項は a_n）．一方で，実数の列を考える際の添字は上つきの括弧に入れて表し，主に ℓ, ℓ' などを用いる（例：$x^{(\ell)}$）．

更に，考えている数が実数か，それとも実数の代表元の有理数か，が解りやすいように，実数には主に $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ や $\boldsymbol{x}^{(\ell)}, \boldsymbol{y}^{(\ell)}$ などを用い，有理数にはこれまで通り a_n, b_n などを用いる．唯一の例外は ϵ であって，これは実数の場合も，有理数に限定した場合も同じ記号を用いる．ϵ は「任意の ϵ」の文脈で登場するので，有理数に限定しても，実数に拡げて考えても差が生じないから，こうすることにした．

また，有理数の絶対値は今まで通り $|a_n|$ などと表し，実数の絶対値は区別して $\|\boldsymbol{\alpha}\|$ と書く事にする．

まず，極限そのもの $\displaystyle\lim_{\ell\to\infty} \boldsymbol{x}^{(\ell)} = \boldsymbol{\alpha}$ の定義は今まで通り，ϵ-N で行う.（実数を構成していた前節まではすべて有理数の範囲で極限を議論し，ϵ なども有理数に限定していたが，今は ϵ-N に出てくる ϵ も実数だと思って良い.）つまり以下のように定義する．

定義 3.5.1 (実数列の極限) 実数列 $\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ （各 $\boldsymbol{x}^{(\ell)}$ が実数である列）の $\ell \to \infty$ での極限が実数 $\boldsymbol{\alpha}$ であるとは，以下が成り立つ事である：

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) > 0 \qquad \Bigl(\ \ell > N(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad \|\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \boldsymbol{\alpha}\| < \epsilon\ \Bigr) \tag{3.5.1}$$

ここに出てくる ϵ は実数と思っても，有理数に制限しても構わない．また，$\|\cdot\|$ は実数の絶対値である．

上の定義に出てくる量は実数だけであり，かつすべての操作（$\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \boldsymbol{\alpha}$ における引き算や絶対値をとること）は実数の代表元の取り方にはよらないことは既に見てある．従って，この定義はもちろん，実数の代表元の取り方には左右されない．

また，任意の実数 ϵ には，それに限りなく近く $\epsilon' \le \epsilon < \epsilon''$ をみたす有理数 ϵ', ϵ'' が存在する．従って，(3.5.1) での $\epsilon > 0$ は有理数に限っても良いことのである．

この定義に出てくる実数を有理数のコーシー列の代表元で書いておくと後々便利だからやっておこう．$\boldsymbol{\alpha}$ の代表元は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書き，$\boldsymbol{x}^{(\ell)}$ の代表元は $\{x_n^{(\ell)}\}_{n=1}^{\infty}$ と書くと，$\|\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \boldsymbol{\alpha}\| = \bigl[\{|x_n^{(\ell)} - a_n|\}_{n=1}^{\infty}\bigr]$ なので，$\|\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \boldsymbol{\alpha}\| < \epsilon$ は

$$\bigl[\{|x_n^{(\ell)} - a_n|\}_{n=1}^{\infty}\bigr] < \epsilon \tag{3.5.2}$$

ということである．コーシー列の同値類に関する大小の定義から，これは十分大きな $M > 0$ が存在して，$n > M$ では $|x_n^{(\ell)} - a_n| < \epsilon$ が成り立つ事を意味する．従って (3.5.1) は

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) > 0 \quad \forall\ell > N(\epsilon) \quad \exists M(\epsilon, \ell) > 0 \quad \forall n > M(\epsilon, \ell) \quad |x_n^{(\ell)} - a_n| < \epsilon \tag{3.5.3}$$

と同じ事である．

3.5.1 有理数を表す有理コーシー列の収束先

今まで何度も,「有理コーシー列の表す実数とは，実はこの有理コーシー列の収束先のことである」とくり返してきた —— ただ,「まだ収束を定義していないからそのような書き方はできないけど」との注釈付きで．

しかし今では収束の定義を行ったのだから，上に述べた事が本当かどうか，少しは確かめることができる．とは言っても，無理数に収束するはずのものは行き先の無理数を「有理コーシー列の同値類」としてしか定義していないから，これ以上は何も言えない．しかし，有理数を表しているはずの有理コーシー列については，それを実数列と見た場合に，お目当ての有理数に収束しているかどうかを問題にする事はできるはずだ．この小節ではこの問題を考えてみよう．

もう少し正確に問題を定式化すると以下のようになる．まず，有理数 a を一つ決める．この有理数を表す有理コーシー列の同値類 $\boldsymbol{a}$ の代表元としては今までも散々やったように $\{a, a, a, \ldots\}$（どの項も a）というものが挙げられ，この有理コーシー列と同値なもの全体（同値類）がこの a を実数と見た場合の $\boldsymbol{a}$ であった．そこで，$\boldsymbol{a}$ の任意の代表元をとってきて，それを $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ としてみよう．各 a_i は有理数であるから，もちろん，実数ともみなせる．すると $\boldsymbol{a}^{(\ell)} := a_\ell$ と定義する事により，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列 $\{\boldsymbol{a}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ とみなす事も可能だ．そこで問題は、この実数列の収束先は a なのか？つまり

$$\lim_{\ell\to\infty} \boldsymbol{a}^{(\ell)} = \boldsymbol{a} \qquad (??) \tag{3.5.4}$$

ということである．

さて長々と書いたが，これが成り立つ事は以下のようにしてすぐにわかる．まず，収束の定義に出てくるのは $\|\boldsymbol{a}^{(\ell)} - \boldsymbol{a}\|$ という実数の絶対値であるが，絶対値は代表元の取り方によらないので，$\boldsymbol{a}$ の代表元としては各項が a のものをとり，$\boldsymbol{a}^{(\ell)}$ の代表元としては各項が a_ℓ であるものをとると，$\|\boldsymbol{a}^{(\ell)} - \boldsymbol{a}\| = [\{|a_\ell - a|\}_{n=1}^{\infty}]$ となる．これは n によらないから，$\|\boldsymbol{a}^{(\ell)} - \boldsymbol{a}\|$ は単なる有理数 $|a_\ell - a|$ を表していることがわかった．

ところが，$\{a_\ell\}$ と $\{a, a, a, \ldots\}$ が同値であるので，$\displaystyle\lim_{\ell\to\infty} |a_\ell - a| = 0$ が成り立っているはずである．つまり，任意の $\epsilon > 0$ に対して $N(\epsilon) > 0$ が存在して，$\ell > N(\epsilon)$ では $|a_\ell - a| < \epsilon$ がなりたつ．ここで $|a_\ell - a| = \|\boldsymbol{a}^{(\ell)} - \boldsymbol{a}\|$ であることを思い出すと，これは

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) > 0 \qquad \forall\ell > N(\epsilon) \qquad \|\boldsymbol{a}^{(\ell)} - \boldsymbol{a}\| < \epsilon \tag{3.5.5}$$

を意味する．これは $\displaystyle\lim_{\ell\to\infty} \boldsymbol{a}^{(\ell)} = \boldsymbol{a}$ の定義そのものである． □

3.6 コーシー列の収束証明

普通の実数の四則演算ができたので，このような普通の定義でかなりの部分の話はうまく進む．うまく進まない可能性があるのは，実数の連続性とコーシー列に関連した話題だ．

コーシー列から実数を構成した今の流れでは，まずは「コーシー列の収束性」を示してから「実数の連続性」「上限・下限の存在」などに進むのが良い．コーシー列の定義は今まで通り，

定義 3.6.1 (実数のコーシー列) 実数列 $\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ がコーシー列であるとは，以下が成り立つ事である：

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \quad \forall\ell > N(\epsilon) \quad \forall\ell' > N(\epsilon) \quad \|\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \boldsymbol{x}^{(\ell')}\| < \epsilon \tag{3.6.1}$$

ここの $\|\cdot\|$ は実数の絶対値を表す．

(3.5.3) と同じように噛み砕いてみると，(3.6.1) は以下と同値である：

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) > 0 \quad \forall\ell, \ell' > N(\epsilon) \quad \exists M(\epsilon, \ell, \ell') > 0 \quad \forall n > M(\epsilon, \ell, \ell') \quad |x_n^{(\ell)} - x_n^{(\ell')}| < \epsilon \tag{3.6.2}$$

さて，我々の主要目標はこのように定義した「実数のコーシー列」が定義 3.5.1 の意味で極限をもつこと，つまり，今まで我々が構成してきた「有理数のコーシー列の同値類としての実数の集合」$\mathbb{R}$ のなかで，極限をもつことである．これを正確に書くと次の重要な定理になる：

定理 3.6.2 (コーシー列は収束する) 定義 3.6.1 で定義された実数のコーシー列 $\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ は，定義 3.5.1 の意味で極限をもつ．すなわち，$\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ に応じて実数 $\boldsymbol{\alpha}$ が一つ定まり，(3.5.1) が成立する．

これはアタリマエに思えるかもしれないが，決してアタリマエではない．もし，$\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ の各項が有理数なら，アタリマエだ[15]．しかし，$\boldsymbol{x}^{(\ell)}$ のすべて，または一部分が実数であれば，これは今まで考えてきた「有理数のコーシー列」の範疇には入っていず,「有理数のコーシー列」よりもずっとたくさんある．そのようにたくさんあるものの極限が，より少ない「有理数のコーシー列」になってしまうのは全く自明ではない．

実際,「有理数のコーシー列」の場合はその（有理数の意味での）極限が存在しなかったので，その極限（同値類）を新たな数として認める方向で無理数を定義してきた．今回も同じ事 —— つまり，実数のコーシー列の同値類を新しい数として加える事 —— が必要になるかもしれない訳だが，上の定理はそれが必要ないことを保証しているのである．

もし実数のコーシー列の同値類を新たな数として加える必要が生じるならば，その新たな数のコーシー列が新たに定義され，その同値類がまた新たな数を産み... といつまでたっても話が閉じなくなる可能性がある．これは大変に困る訳であるが，我々の定義してきた実数に関してはそのような新たな数は全く必要ない，と言っているのだ．

以下，この重要な定理を段階を追って証明する．なお,「コーシー列の収束」さえいえれば，後の性質（上限・下限の存在，有界単調列の収束）などは通常の方法で出てくるので，以下ではくり返さない．

3.6.1 コーシー列に関する注意

本題に入る前に，コーシー列について，いくつかの補足を行う．これらは単なる技術に見えるかもしれないが，後で非常に役に立つことである．

補題 3.6.3 (コーシー列の部分列)
(i) 有理数のコーシー列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられたとき，これから勝手に作った部分列を $\{\tilde{a}_m\}_{m=1}^{\infty}$ と書くと，$\{a_n\} \sim \{\tilde{a}_n\}$ である．つまり，この２つは同じ実数 $[\{a_n\}] = [\{\tilde{a}_n\}]$ を定める．
(ii) 更に，$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ を満たす，非負で単調減少な関数 $g(x)$ に対し，(i) のような部分列をうまく選んで，

$$|\tilde{a}_m - \tilde{a}_n| < g(m \wedge n) \qquad (\text{すべての自然数 } m, n \text{ に対して}) \tag{3.6.3}$$

を満たさせる事ができる．特に $g(x) = 2^{-x}$ ととることにより，

$$|\tilde{a}_m - \tilde{a}_n| < 2^{-(m\wedge n)} \qquad (\text{すべての自然数 } m, n \text{ に対して}) \tag{3.6.4}$$

を満たさせる事ができる．

（証明）(i) $\{a_n\}$ がコーシー列なので

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > N(\epsilon) \quad \forall n > N(\epsilon) \qquad |a_m - a_n| < \epsilon \tag{3.6.5}$$

が成り立っている．$\epsilon > 0$ と N を上のように固定して $n > N$ に対して $|a_n - \tilde{a}_n|$ を考えてみよう．$\tilde{a}_n\}$ は $\{a_n\}$ の部分列だから，各 n に対応して $m(n) \geq n$ が存在して，$\tilde{a}_n = a_{m(n)}$ と書けているはず．従って，$|a_n - \tilde{a}_n| = |a_n - a_{m(n)}|$ なのである．$m(n) \geq n$ なので上の差は (3.6.5) で押さえられる事を考慮すると，

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \qquad |a_n - \tilde{a}_n| < \epsilon \tag{3.6.6}$$

が成り立つことがわかる．これは $\lim_{n\to\infty} |a_n - \tilde{a}_n| = 0$ を意味し，$\{a_n\} \sim \{\tilde{a}_n\}$ が示された．

(ii) 次に (3.6.3) をみたすような $\tilde{a}_n$ を具体的に構成しよう．コーシー列の定義 (3.6.5) を眺めて，以下の手順で a_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) を決めていく：

1. (3.6.5) の $\forall\epsilon > 0$ の後の部分，つまり $\exists N(\epsilon)\ \forall m > N(\epsilon)\ \forall n > N(\epsilon)\ |a_m - a_n| < \epsilon$ を $\epsilon = g(1)$ で成り立たせるような $N_1 = N(g(1))$ を探し，$\tilde{a}_1 := a_{N_1+1}$ と決める．
2. (3.6.5) を $\epsilon = g(2)$ で成り立たせるような $N_2 = N(g(2))$ を探し，$\tilde{a}_2 := a_{N_2+1}$ と決める．

[15] $\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ の各項が有理数なら，これは有理数のコーシー列である．すると「実数＝有理数のコーシー列の同値類」との定義によって、これはひとつの実数を表す．従って，その実数を $\boldsymbol{\alpha} := [\{x^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}]$ とおくと (3.5.1) が成立する

3. 以下同様に，(3.6.5) を $\epsilon = g(\ell)$ で成り立たせるような $N_\ell = N(g(\ell))$ を探し，$\tilde{a}_\ell := a_{N_\ell+1}$ と決める（$\ell = 3, 4, 5, \ldots$）．

作り方から (3.6.3) が成り立つのは明らかだろう． □

実は上の補題 3.6.3 の (3.6.3) の証明は，より一般のコーシー列についてもなりたつ．これは「実数のコーシー列」について後で使うので定式化しておこう．まず，一般のコーシー列とは

定義 3.6.4 (一般のコーシー列) 線形空間 X とその上のノルム $\|\cdot\|$ が与えられているとき，次を満たす X の点列 $\{\boldsymbol{x}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$（$\boldsymbol{x}^{(n)} \in X$）を X のノルム $\|\cdot\|$ に関するコーシー列という：

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) > 0 \qquad \forall m > N(\epsilon) \quad \forall n > N(\epsilon) \quad \|\boldsymbol{x}^{(m)} - \boldsymbol{x}^{(n)}\| < \epsilon \tag{3.6.7}$$

と定義されるものである．このとき，

補題 3.6.5 (コーシー列の部分列) 上の定義 3.6.4 のもとで，$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ を満たす，非負で単調減少な関数 $g(x)$ に対し，コーシー列 $\{\boldsymbol{x}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ から適当に部分列 $\{\boldsymbol{y}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ をとって，すべての $m, n > 0$ に対して

$$\|\boldsymbol{y}^{(m)} - \boldsymbol{y}^{(n)}\| < g(m \wedge n) \tag{3.6.8}$$

を満たすようにできる．特に，$g(x) = 2^{-x}$ ととって

$$\|\boldsymbol{y}^{(m)} - \boldsymbol{y}^{(n)}\| < 2^{-(m\wedge n)} \tag{3.6.9}$$

を満たすようにできる．

（$\boldsymbol{x}^{(n)}$ の部分列だから $\tilde{\boldsymbol{x}}^{(n)}$ と書くべきだが，あまり~が出てくるとかえってややこしいので $\boldsymbol{y}^{(m)}$ とした.）この証明は補題 3.6.3(ii) の証明と全く同一であるので略． □

ついでに、後で使う補題を示しておく：

補題 3.6.6 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ を実数，$\{a_n\}, \{b_n\}$ を，(3.6.4) を満たすようにとった $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ の代表元とする．このとき

$$|a_n - b_n| \le 2^{1-n} + \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\| \tag{3.6.10}$$

がなりたつ．ここで $\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\|$ は実数の絶対値を表す．

（しつこいけど注）(3.6.10) では $\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\|$ は実数，その他の量は有理数であるので，この式はそのままでは意味をなさず，本当は

$$\bigl(|a_n - b_n| \text{ の同値類}\bigr) \le \bigl(2^{1-n} \text{ の同値類}\bigr) + \|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\| \tag{3.6.11}$$

と書くべきである．実際，今までは r と $\boldsymbol{r}$ を区別するなどして，できる限り (3.6.11) と同じ正確さを保とうとしてきた．しかしこの節の内容に対しては，これではあまりに冗長である．そこで仕方なく，(3.6.10) のように手を抜いた書き方をした．**以下でも同様の手抜きをする事があるので，注意されたい．**

（証明）定義により，

$$\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\| := \Bigl[\,\bigl\{\, |a_n - b_n| \,\bigr\}_{n=1}^\infty\Bigr], \tag{3.6.12}$$

つまり，$c_n := |a_n - b_n|$ で定められる数列 $\{c_n\}$ の同値類（であるところの実数）が $\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\|$ なのであった．

さて，(ある有理数 r があって）$[\{c_n\}] < \boldsymbol{r}$ であるとき，c_n と r の関係について考えてみよう．実数の大小の定義によると，これは充分に大きい n では $c_n < r$ が成り立つ事を意味する．従って

$$\exists M > 0 \qquad \forall p > M \qquad |a_p - b_p| < r \tag{3.6.13}$$

が成立する．上の $p > \max\{M, n\}$ を一つ固定すると $|a_n - b_n|$ を以下のように評価する事ができる：

$$|a_n - b_n| \le |a_n - a_p| + |a_p - b_p| + |b_p - b_n| \le 2^{-(n\wedge p)} + r + 2^{-(p\wedge n)} = 2^{1-n} + r \tag{3.6.14}$$

（真ん中の３つの項のうち，最初のものと最後のものは (3.6.4) による.）任意の実数に対して，それをいくらでも精度良く近似する有理数が存在するから，上の r を $\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|$ を近似するようにとると，

$$|a_n - b_n| \le 2^{1-n} + \|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\| \tag{3.6.15}$$

が得られる（もし $|a_n - b_n| > 2^{1-n} + \|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|$ だとすると (3.6.14) と矛盾するから）. □

3.6.2 極限の候補の構成

これから，実数のコーシー列 $\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ が与えられたとき，その極限 $\boldsymbol{\alpha}$ を具体的に構成し，(3.5.1) がなりたつことを証明しよう．この小節ではその極限の候補を構成する．これが実際に極限になっている事は後の小節で示す．

この極限の候補を構成するため，それぞれの実数を表す同値類の代表元としては (3.6.4) を満たすものをとることにする（そのような代表元がとれることは，補題 3.6.3 により保証されている）．つまり，実数 $\boldsymbol{x}^{(\ell)}$ の代表元を $\{x_n^{(\ell)}\}_{n=1}^{\infty}$ とすると

$$|x_n^{(\ell)} - x_m^{(\ell)}| < 2^{-(n\wedge m)} \qquad \text{（すべての } m,n \ge 1 \text{ にて）} \tag{3.6.16}$$

となるように代表元をとることにしておく．上の差が ℓ には無関係に，m,n だけに依存する形で押さえられるようにとったのがミソである.

更に，行き先の $\boldsymbol{\alpha}$ をつくるために，もう一つのお約束をする．上の補題 3.6.5 によると $\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ の適当な部分列 $\{\boldsymbol{y}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ をとって，

$$\|\boldsymbol{y}^{(\ell)} - \boldsymbol{y}^{(\ell')}\| < 2^{-(\ell\wedge\ell')} \tag{3.6.17}$$

を満たすようにできるので，このように $\{\boldsymbol{y}^{(\ell)}\}$ をとる（もちろん，ここの $\|\cdot\|$ は実数の絶対値を表す）．次に，それぞれの $\boldsymbol{y}^{(\ell)}$ の代表元を，上のお約束の通り，

$$|y_m^{(\ell)} - y_n^{(\ell)}| < 2^{-(m\wedge n)} \tag{3.6.18}$$

を満たすようにとる．以下では $y_n^{(\ell)}$ はこのように選んだものとして断りなしに使う.

これだけの準備の下に， $\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ の極限の候補 $\boldsymbol{\alpha}$ を定義する事ができる．すなわち，有理数の数列 $\{a_n\}$ を，

$$a_n := y_n^{(n)} \tag{3.6.19}$$

と定義する．ちょっと先走ると，すぐ後でこれが有理数のコーシー列になっていることを示すので，今までのお約束からこの $\{a_n\}$ の同値類は実数とみなせる．この実数 $\boldsymbol{\alpha} := [\{a_n\}]$ が $\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ の極限の候補である.

3.6.3 極限の候補は実数を表す（有理数のコーシー列である）こと

今の段階ではこのような数列 $\{a_n\}$ を定義しただけであって，これが実数を定義する事（つまりこれが有理数のコーシー列になっていること）すら自明ではない．そこでまず，この $\{a_n\}$ が有理数のコーシー列であることを証明しよう.

補題 3.6.7 上で定義した $\{a_n\}$ は有理数のコーシー列である．特に，

$$|a_m - a_n| < 2^{2-(m\wedge n)} \tag{3.6.20}$$

がなりたつ.

証明：

まず，$y_m^{(\ell)}$ はすべて有理数だから，a_n も有理数であって，この数列が有利数列であることは保証されている．問題はこれがコーシー列かどうかという事だが，まず $m > n$ なら

$$|a_m - a_n| = |y_m^{(m)} - y_n^{(n)}| = |\,(y_m^{(m)} - y_m^{(n)}) + (y_m^{(n)} - y_n^{(n)})\,| \le |y_m^{(m)} - y_m^{(n)}| + |y_m^{(n)} - y_n^{(n)}| \le |y_m^{(m)} - y_m^{(n)}| + 2^{-n} \tag{3.6.21}$$

がなりたつことに注意しよう（最後の不等式は (3.6.18) による）.

右辺の第一項は我々のお約束 (3.6.17)，$\|\boldsymbol{y}^{(\ell)} - \boldsymbol{y}^{(\ell')}\| < 2^{-(\ell\wedge\ell')}$ と補題 3.6.6 から

$$|y_m^{(m)} - y_m^{(n)}| \le 2^{1-n} + \|\boldsymbol{y}^{(\ell)} - \boldsymbol{y}^{(\ell')}\| < 2^{1-n} + 2^{-n} \tag{3.6.22}$$

を満たす事がわかる．これを (3.6.21) と併せると，$m > n$ で

$$|a_m - a_n| \le 2^{1-n} + 2^{-n} + 2^{-n} = 2^{2-n} \tag{3.6.23}$$

がなりたつことがわかる．これで $\{a_n\}$ がコーシー列であることが証明された． □

以上から，$\{a_n\}$（の同値類）は確かにある実数 $\boldsymbol{\alpha}$ を表すことが保証された．

3.6.4 極限に収束する事

ではいよいよ，$\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{\alpha}$ に収束する事を証明しよう．収束の定義から

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) > 0 \quad \forall\ell > N(\epsilon) \quad \|\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \boldsymbol{\alpha}\| < \epsilon \qquad (??) \tag{3.6.24}$$

を示せば良い．本来，上の $\epsilon > 0$ は条件をみたすすべての実数であるべきだが，任意の実数は有理数でいくらでも良く近似でき，かつ上の $\epsilon > 0$ は任意だったから，上の ϵ は有理数に限定して考えても同じ事である．よって以下では ϵ を有理数に限定して考える.（こうすると有理数だけを扱って議論できるから楽.）

さて，$\|\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \boldsymbol{\alpha}\| < \epsilon$ を代表元を用いて書くと，上の目標は

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) > 0 \quad \forall\ell > N(\epsilon) \quad \exists M(\epsilon,\ell) > 0 \quad \forall n > M(\epsilon,\ell) \quad |x_n^{(\ell)} - y_n^{(n)}| < \epsilon \qquad (??) \tag{3.6.25}$$

となる．ここで $\boldsymbol{\alpha}$ の代表元 $\{a_n\}$ は (3.6.19) で定義した事を用いた．また，お約束に従い，$\boldsymbol{x}^{(\ell)}$ の代表元 $\{x_n^{(\ell)}\}_{n=1}^{\infty}$ は

$$|x_m^{(\ell)} - x_n^{(\ell)}| < 2^{-(m\wedge n)} \tag{3.6.26}$$

を満たすようにとってあるものとする．

(3.6.25) がなりたつことを証明するため，まず，有理数 $\epsilon > 0$ を固定する．次に ℓ, n を固定し（ℓ, n の満たすべき条件は後述），$|x_n^{(\ell)} - y_n^{(n)}|$ を解析しよう．十分大きな p を持ってきて（p の取り方も後述）以下のように評価する：

$$|x_n^{(\ell)} - y_n^{(n)}| \le |x_n^{(\ell)} - x_p^{(\ell)}| + |x_p^{(\ell)} - y_p^{(n)}| + |y_p^{(n)} - y_n^{(n)}| \tag{3.6.27}$$

最後の項 $|y_p^{(n)} - y_n^{(n)}|$ は代表元の取り方のお約束により，$2^{-(p\wedge n)}$ より小さい．p は n より大きくとる事にすれば，これは 2^{-n} である．同様に，最初の項も代表元の取り方のお約束から，2^{-n} より小さい．

問題は真ん中の項 $|x_n^{(\ell)} - y_p^{(n)}|$ であるが，$y^{(n)}$ は $\{\boldsymbol{x}^{\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ の部分列を作る過程で定義された事に注意しよう．つまり，n より小さくない n' があって，$\boldsymbol{y}^{(n)} = \boldsymbol{x}^{(n')}$ だったのである．したがって，真ん中の項は

$$|x_p^{(\ell)} - y_p^{(n)}| = |x_p^{(\ell)} - x_p^{(n')}| \tag{3.6.28}$$

と書けている．この右辺は補題 3.6.6 から評価することができる．つまり $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}^{(n)}, \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{x}^{(n')}$ と思って補題を用いると，

$$|x_p^{(\ell)} - x_p^{(n')}| \le 2^{1-p} + \|\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \boldsymbol{x}^{(n')}\| \tag{3.6.29}$$

となる．以上から（p は十分大きければ任意だったので $p > n + 1$ くらいにとることにして）

$$|x_n^{(\ell)} - y_n^{(n)}| \le 2 \times 2^{-n} + 2^{1-p} + \|\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \boldsymbol{x}^{(n')}\| < 2^{2-n} + \|\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \boldsymbol{x}^{(n')}\| \tag{3.6.30}$$

が成立することがわかった．

さてここで，いろんな ℓ, n などを以下のように選ぶ．まず，$\epsilon > 0$ を任意に固定する．次に，$\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ が実数のコーシー列だった条件から，この $\epsilon > 0$ に対して

$$\forall \ell > N_1(\epsilon) \qquad \forall \ell' > N_1(\epsilon) \qquad \|\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \boldsymbol{x}^{(\ell')}\| < \epsilon \tag{3.6.31}$$

となるような $N_1(\epsilon)$ が存在するので，このように $N_1(\epsilon)$ を決める．また，$N_2(\epsilon)$ を $2^{2-N_2(\epsilon)} < \epsilon$ となるように決めて，$N(\epsilon) := \max\{N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)\}$ と定める．すると，$\ell > N(\epsilon)$ および $n > N(\epsilon)$ を満たす n, ℓ に対しては，($n' \geq n > N_1(\epsilon)$ なので）(3.6.31) から，$\|\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \boldsymbol{x}^{(n')}\| < \epsilon$ が保証される．したがって，(3.6.30) から，

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists N(\epsilon) \qquad \forall \ell > N(\epsilon) \qquad \forall n > N(\epsilon) \qquad |x_n^{(\ell)} - y_n^{(n)}| < 2\epsilon \tag{3.6.32}$$

が証明された．$\boldsymbol{\alpha}$ の代表元 $\{a_n\}$ は $a_n := y_n^{(n)}$ と決めてあったので

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists N(\epsilon) \qquad \forall \ell > N(\epsilon) \qquad \forall n > N(\epsilon) \qquad |x_n^{(\ell)} - a_n| < 2\epsilon \tag{3.6.33}$$

とも書ける．ところが後半の

$$\forall n > N(\epsilon) \qquad |x_n^{(\ell)} - a_n| < 2\epsilon \tag{3.6.34}$$

の部分はこの ℓ に対して $\|\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \boldsymbol{\alpha}\| \leq 2\epsilon$ であることを意味するから，結局 (3.6.33) は

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists N(\epsilon) \qquad \forall \ell > N(\epsilon) \qquad \|\boldsymbol{x}^{(\ell)} - \boldsymbol{\alpha}\| \leq 2\epsilon \tag{3.6.35}$$

を意味する．これは $\displaystyle\lim_{\ell\to\infty} \boldsymbol{x}^{(\ell)} = \boldsymbol{\alpha}$ の定義に他ならない．

以上から，$\{\boldsymbol{x}^{(\ell)}\}_{\ell=1}^{\infty}$ が我々の作った極限の候補 $\boldsymbol{\alpha}$ に収束する事が証明できた． □

3.7 実数の連続性（上限の存在）

最後に，以上のコーシー列の性質から，始めに掲げた実数の公理の「上限の存在」（公理 1.1.1 の III）が導かれる事を簡単に見ておこう．$\mathbb{R}$ の部分集合で，上に有界なものを任意に固定し，これを B とする．B の上界の全体のなす集合を S としよう．S 内にその行き先が S の最小限（$= B$ の上限）になっているようなコーシー列を構成してみよう．

> 以下は普通の微積入門の話であって，今までにやってきた「コーシー列による構成法」は全面には出て来ない．また，有理数，無理数の区別もいらない．ええ加減，太字を書くのに疲れたので，この節では実数を普通のフォントで x, y, a, b などと表す．

S の元（$= B$ の上界）の一つを x_1 とする．また，B の元のひとつを y とする．x_1 が上界だから $y_1 \leq x$ である．

さて，$y = x_1$ ならば x_1 は S の最小値である．なぜなら，$z < x_1$ なる任意の z を持ってきても $z < y \in B$ なので，この z は S には入れないから．また，$y \in S$ ならば上と同じ理由で y が S の最小値になる．いずれの場合も S の最小値の存在が言えてしまってメデタシメデタシ．

従って以下では $y < x_1$，かつ $y \not\in S$ の場合を考察する．この場合，$n \geq 2$ と $0 \leq j \leq 2^n$ に対し，

$$x_n^{(j)} := x_1 - \frac{j}{2^n}(x_1 - y) \tag{3.7.1}$$

を定義する．各 n に対して，これは j について単調減少であり，$x_n^{(0)} = x_1 \in S, x_n^{(2^n)} = y_1 \not\in S$ であるので，2^n より小さい j_n が存在して，「j_n 以下では $x_n^{(j)}$ は S の元，j_n より大きい j では $x_n^{(j)}$ は S の元ではない」となる．そこで，$x_n := x_n^{(j_n)}$ と定義する．

さてこの x_n は定義から常に S の元である．さらに，$x_{n+1}^{(2j)} = x_n^{(j)}$ の関係があるため，$x_n^{(j_n)} \in S$ ならば $x_{n+1}^{(2j_n)} \in S$ である．一方，j_n の定義から $x_n^{(j_n+1)} \not\in S$ であるから，$x_{n+1}^{(2j_n+2)} \not\in S$ でもある．従って，その定義から x_{n+1} は $x_{n+1}^{(2j_n)}$ または $x_{n+1}^{(2j_n+1)}$ のどちらかだと言える．これから

$$0 \leq x_n - x_{n+1} \leq 2^{-n-1}(x_1 - y) \tag{3.7.2}$$

が結論できる．つまり，$\{x_n\}$ は広義単調減少なコーシー列なのである[16]．

従って，このコーシー列の極限 $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ は存在する．各 x_n は B の上界であったので，任意の $y \in B$ に対して $x_n \ge y$ であった．この両辺で $n \to \infty$ とすると $x \ge y$ が得られる．つまり，x は B の上界の一つであり，$x \in S$ なのである．後は x より小さな上界が存在しないことを言えば，x が S の最小元となって，話はおしまい．

そこで，$z < x$ なる上界 $z \in S$ があったとしてみよう．上の x_n の構成法で $2^{-n+2}(x_1 - y) < x - z$ となるような十分大きな n をとってやると，$z < x_n^{(j)} < x$ をみたす $x_n^{(j)}$ が存在したはずだ[17]ということに思い当たる．つまり，x より小さな x_n を定義できていたはずで，これは $\{x_n\}$ が広義単調減少であったことに矛盾．つまり x よりも小さな S の元は存在せず x は S の最小元である． □

[16] コーシー列であることはもちろん，$m > n > N$ の時に $|x_m - x_n| \le \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k-1}(x_1 - y) \le 2^{-n}(x_1 - y) \le 2^{-N}(x_1 - y)$ が成り立つ事からでる

[17] (3.7.1) から $m > n$ の時に $0 \le x_n - x_m < 2^{-n}(x_1 - y)$ が成り立つ事がわかる．これから $m \to \infty$ の極限をとって $0 \le x_n - x \le 2^{-n}(x_1 - y)$ が結論できる．従って，$x - z > 2^{-n+2}(x_1 - y) \ge 4(x_n - x)$ であるなら，x と z の間にある $x_n^{(j)}$ がとれたはずだ

4 実数の２つの構成法の同等性

今まで，２通りの実数の構成法（切断によるものと，コーシー列によるもの）を概観した．当然，両者の関係が問題になる．特に，この２つの構成法で作った「実数の全体」が同じものか違うものかは非常に気になるところである．ここではこの問題を取り上げる．

上では解りやすいように２つの構成の結果が「同じ」とは言ったけども，これは不正確な表現だ．実際，切断による実数は「有理数の切断」であるし，コーシー列による実数は「有理コーシー列の同値類」であって，これらは言葉の厳密な意味では「同じ」ではあり得ない．しかし，ここで問題にすべきはそのような「同じ」ではなく，以下の定理 4.1.1 の意味で両者の間に 1 対 1 の対応がつくか，という問題なのである．

記号のお約束：ここに至って，切断によって作った実数と有理コーシー列によって作った実数の２つを同時に考える必要が生じる．これらを区別するため，この章においては、以下のお約束をする．

- 切断によって構成した実数の全体を $\mathbb{R}_{\text{cut}}$，コーシー列によって構成した実数の全体を $\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ と書く．
- $\mathbb{R}_{\text{cut}}$，$\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ の中での有理数の全体をそれぞれ $\mathbb{Q}_{\text{cut}}, \mathbb{Q}_{\text{cauchy}}$ と書く．
- $\mathbb{R}_{\text{cut}}$ と $\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ の元を区別するため，この章に限り，$\mathbb{R}_{\text{cut}}$ の元は $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ と書く．
- 一方，$\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ の元は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ と書く．
- $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ については良い記号がないので，$\mathbb{R}_{\text{cut}}, \mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ ともに同じ記号を用いる．多分、混乱は起きないでしょう．

4.1 ２つの構成法の同等性（正確な表現）

我々の主張は以下の定理に集約される．

定理 4.1.1 (２つの構成の同値性) $\mathbb{R}_{\text{cut}}$ から $\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ への写像 S と，$\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ から $\mathbb{R}_{\text{cut}}$ への写像 S で，以下を満たすものが存在する：

- S は全単射である．つまり，(１) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}_{\text{cut}}$ かつ $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$ ならば $S(\boldsymbol{\alpha}) \neq S(\boldsymbol{\beta})$ であり，更に，(２) S による $\mathbb{R}_{\text{cut}}$ の像は $\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ 全体，つまり $\mathbb{R}_{\text{cauchy}} = \{S(\boldsymbol{\alpha}) \,|\, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_{\text{cut}}\}$ となっている．
- S が全単射であるから，その逆写像 $T := S^{-1}$ を定義できるが，これは $\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ から $\mathbb{R}_{\text{cut}}$ への全単射である．
- このように定義した S, T を $\mathbb{Q}_{\text{cut}}, \mathbb{Q}_{\text{cauchy}}$ に制限したものを $S_{\mathbb{Q}}, T_{\mathbb{Q}}$ と書くと，これらはそれぞれ $\mathbb{Q}_{\text{cut}}, \mathbb{Q}_{\text{cauchy}}$ 上の全単射になっていて，互いに逆写像の関係にある．つまり，有理数は有理数に対応している．
- S, T は $\mathbb{R}_{\text{cut}}$ や $\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ の順序を保存する．つまり，

$$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta} \text{ なる } \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}_{\text{cut}} \quad \text{に対して} \quad S(\boldsymbol{\alpha}) < S(\boldsymbol{\beta}) \tag{4.1.1}$$

がなりたつ．同様に，

$$\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y} \text{ なる } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_{\text{cauchy}} \quad \text{に対して} \quad T(\boldsymbol{x}) < T(\boldsymbol{y}) \tag{4.1.2}$$

がなりたつ．

- さらに，S と $T = S^{-1}$ は $\mathbb{R}_{\text{cut}}$ や $\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ 上の四則演算とも両立する．つまり（加法を例にとると）

$$S(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad S(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \qquad \text{すべての } \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}_{\text{cut}} \text{ に対して } S(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = S(\boldsymbol{\alpha}) + S(\boldsymbol{\beta}) \tag{4.1.3}$$

が成り立つ．この式では，左辺の $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{0}, \mathbf{1}$ は $\mathbb{R}_{\text{cut}}$ の元，右辺の $S(\boldsymbol{\alpha}), S(\boldsymbol{\beta}), S(\mathbf{0}), S(\mathbf{1})$ などは対応する $\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ の元である．同様に，

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \qquad T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \qquad \text{すべての } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_{\text{cauchy}} \text{ に対して } T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}) \tag{4.1.4}$$

がなりたつ．この式では，左辺の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}$ は $\mathbb{R}_{\rm cauchy}$ の元，右辺の $T(\boldsymbol{x}),T(\boldsymbol{y}),T(\boldsymbol{0}),T(\boldsymbol{1})$ などは対応する $\mathbb{R}_{\rm cut}$ の元である．

（言葉の注）上の定理の S,T は体 $\mathbb{R}_{\rm cauchy}$ と $\mathbb{R}_{\rm cut}$ の間の「同型」写像と呼ばれる．より詳しくは定理 5.1.1 の後の注を参照．

この定理の主張によれば，$\mathbb{R}_{\rm cut}$ と $\mathbb{R}_{\rm cauchy}$ は四則演算に際して全く同じ働きをしており，両者の差は感じられない．つまり，両者は実質的に「同じ」ものだと思って良い訳である．これが実数の２つの構成法が同等である，という意味だ．

以下では上のような T と $S=T^{-1}$ をできるだけ具体的に構成し，上の性質が成り立っている事を示したい．

4.2 写像 S の構成

この節では写像 S を具体的に構成する．$\mathbb{R}_{\rm cut}$ は、その定義により，有理数の切断 $\langle A,A'\rangle$ の全体と（大体）同じであった.「大体」というのは，１つの有理数には（II 型）と（III 型）の２つの切断が対応していたので,「(II 型) と（III 型）の切断は同一視する」との約束の下で同じ，という意味である．さて，実数 $\boldsymbol{\alpha}=\langle A,A'\rangle$ については，定理 2.2.6 が成り立っていた．つまり，与えられた $\boldsymbol{\alpha}$ と $n>0$ に対して，

$$\boldsymbol{r}\le\boldsymbol{\alpha}<\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\qquad\text{つまり}\qquad r\in A\ \text{かつ}\ r+\frac{1}{n}\in A' \tag{4.2.1}$$

となるような有理数 r を見つける事ができる．これを用いて，以下のような数列 $\{a_n\},\{a'_n\}$ を作る：

構成 4.2.1 有理数の切断 $\boldsymbol{\alpha}=\langle A,A'\rangle$ をとる．この切断に対して有理数の数列 $\{a_n\},\{a'_n\}$ を以下のように定める．

- $n=1$ では $r\le\boldsymbol{\alpha}<r+1$ となるような $r\in\mathbb{Q}$ を一つ選び，$a_1:=r,a'_1:=r+1$ とする（このような r の存在は (4.2.1) で保証されている）．
- $n\ge2$ では以下のように帰納法で決める．a_{n-1},a'_{n-1} まで選んだとし，$\boldsymbol{\alpha}<a_{n-1}+1/n$ となっているか否かを見る．
  - もし $\boldsymbol{\alpha}<a_{n-1}+1/n$ であれば，$a_n:=a_{n-1},a'_n:=a_{n-1}+1/n$ と決める．
  - もし $\boldsymbol{\alpha}\ge a_{n-1}+1/n$ であれば，$r\le\boldsymbol{\alpha}<r+1/n$ かつ $r+1/n\le a'_{n-1}$ を満たす r をみつけ，$a_n:=r,a'_n:=r+1/n$ と決める.（後の注参照）

（注）上の構成法から

$$a_1\le a_2\le\ldots a_n\le\ldots\boldsymbol{\alpha}\le\ldots\le a'_n\le a'_{n-1}\le\ldots\le a'_2\le a'_1 \tag{4.2.2}$$

が成り立っている．

（注）$n=1$ の時の r の取り方は一意ではないので，上のように作った $\{a_n\},\{a'_n\}$ は一意には決まらない．しかし、以下ではこのように一意でなくても写像 S が一意に定められる事を示す．

（注）$\boldsymbol{\alpha}\ge a_{n-1}+1/n$ のときに条件を満たすような r がとれるかが問題だが，これは以下のように考えればよい．まず，不等式 $r\le\boldsymbol{\alpha}<r+1/n$ は $\boldsymbol{\alpha}-1/n<r\le\boldsymbol{\alpha}$ と同値であり，$r+1/n\le a'_{n-1}$ は $r\le a'_{n-1}-1/n$ と同値である．よって我々のほしい r は

$$\boldsymbol{\alpha}-1/n<r\le\min\{\boldsymbol{\alpha},a'_{n-1}-1/n\} \tag{4.2.3}$$

を満たすものである． このような r が存在するには，左辺と右辺を比べて

$$\boldsymbol{\alpha}-1/n<a'_{n-1}-1/n \tag{4.2.4}$$

であれば充分である．しかし，$n-1$ での a'_{n-1} の定義により $a'_{n-1}>\boldsymbol{\alpha}$ がなりたっているので，上の不等式は成り立ち，欲しい r の存在が保証される．

さて，このように定義した数列は以下を満たす：

命題 4.2.2 構成 4.2.1 で作った $\{a_n\}, \{a'_n\}$ は

- それぞれが有理コーシー列であり，かつ
- 互いに同値である．つまり，$\lim_{n\to\infty} |a_n - a'_n| = 0$ がなりたつ．
- 更に，（$n = 1$ の時の r の取り方の違いによって）別の $\{b_n\}, \{b'_n\}$ を構成 4.2.1 で作ると，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ も同値である．つまり，$\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$ がなりたつ．

（注）同値関係の推移律から，結局 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{a'_n\}, \{b'_n\}$ のすべてが同値だとわかる．

（証明）(4.2.2) が成り立つので，特に $n > m > N$ ならば，$a_N \le a_m \le a_n \le a'_n \le a'_m \le a'_N$ である．更に，$a'_N - a_N = 1/N$ であったから，$n > m > N$ では $0 \le a_n - a_m \le 1/N$ かつ $0 \ge a'_n - a'_m \ge -1/N$ が成り立つ．つまり，

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N := 1/\epsilon \quad \forall m > N \quad \forall n > N \qquad |a_n - a_m| < \epsilon \quad |a'_n - a'_n| < \epsilon \tag{4.2.5}$$

が証明できた．これは $\{a_n\}, \{a'_n\}$ がコーシー列であることを表している．

また，定義から $a'_n - a_n = 1/n$ なので，$\lim_{n\to\infty} |a_n - a'_n| = 0$ である．

最後に，もう一つの $\{b_n\}, \{b'_n\}$ を持ってくると，これも (4.2.2) に相当する式を満たす．特に $a_n \le \boldsymbol{\alpha} < a'_n$ かつ $b_n \le \boldsymbol{\alpha} < b'_n$ が成り立っている．これから $a_n < b'_n$ が結論できるが，$b'_n - b_n = 1/n$ であるから，$a_n < b'_n = b_n + 1/n$ が結論できる．a, b の役割をひっくり返すと $b_n < a'_n = a_n + 1/n$ も結論できる．すなわち，$|a_n - b_n| < 1/n$ なのだ．従って $\lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$ であって，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の同値性が示せた．□

この補題により，$\{a_n\}, \{a'_n\}, \{b_n\}$ を代表元にもつコーシー列の同値類 $[\{a_n\}]$ が一つ定まることが結論できる．特に，この同値類は構成 4.2.1 でのコーシー列の取り方によらない．コーシー列を用いた実数の構成法に従えば，これは $\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ の元とみなせる．そこで：

定義 4.2.3 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_{\text{cut}}$ が $\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle$ と表されているとき，この $\boldsymbol{\alpha}$ に上で構成した $\{a_n\}$ から作った同値類 $[\{a_n\}] \in \mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ を対応させる写像を S と定義する．

では，このように定義した S の性質をいくつか述べよう．実のところ，S が全射になっている事を示すのはちょっと大変なので，これは T と併せて後で考える．

命題 4.2.4 上で定義した S は，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}_{\text{cut}}$ に対して，

$$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta} \qquad \Longrightarrow \qquad S(\boldsymbol{\alpha}) < S(\boldsymbol{\beta}) \tag{4.2.6}$$

を満たす．これから特に，S が単射であることが結論できる．

（証明）$\boldsymbol{\alpha} = \langle A, A' \rangle, \boldsymbol{\beta} = \langle B, B' \rangle$ とする．上のように $\langle A, A' \rangle$ から数列 $\{a_n\}$，$\langle B, B' \rangle$ から数列 $\{b'_n\}$ を定義すると，これらはそれぞれ $S(\boldsymbol{\alpha})$ と $S(\boldsymbol{\beta})$ の代表元になっているので，$\{a_n\}, \{b'_n\}$ を用いて議論する．

$\boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}$ の場合，定理 2.2.5 によれば，$\boldsymbol{\alpha} < r < \boldsymbol{\beta}$ となる有理数 r が無数に存在する．特にそのような有理数の 2 つを $r_1 < r_2$ とすると，$\boldsymbol{\alpha} < r_1 < r_2 < \boldsymbol{\beta}$ となっている．実数の大小に関する定義 2.2.1 を思い出すと，$r_1, r_2 \in A'$ かつ $r_1, r_2 \in B$，つまりは $r_1, r_2 \in A' \cap B$ であることがわかる．

さて，上で予告したように $\langle A, A' \rangle$ に対して上で定義した数列 $\{a_n\}$ を考え，一方，$\langle B, B' \rangle$ に対しては上の $\{b'_n\}$ を考えよう．しかし，$a_n \in A$，$b'_n \in B'$ であって，A と B' の間には少なくとも $r_2 - r_1 > 0$ の幅をもった $A' \cap B$ が挟まれている．つまり，すべての n について $b'_n - a_n \ge r_2 - r_1 > 0$ が成り立ってしまう．この右辺は n によらない正の有理数だから，定義 3.4.2 によれば、$S(\boldsymbol{\alpha}) < S(\boldsymbol{\beta})$ が結論できる．

最後に，(4.2.6) を $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta}$ の時にも用いると，$\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$ ならば $S(\boldsymbol{\alpha}) \neq S(\boldsymbol{\beta})$ が結論できる．つまり，S は単射である．□

命題 4.2.5 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Q}_{\text{cut}}$ の時，$S(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{Q}_{\text{cauchy}}$ である．つまり，S は有理数に対応する $\langle A, A' \rangle$ を有理数に対応するコーシー列の同値類 $[\{a_n\}]$ に移す．

（証明）$r = \langle A, A' \rangle$ が有理数だとする．この場合，$\langle A, A' \rangle$ は（II 型），(III 型）のどちらでもあり得るので，(II 型）の場合を考える（もちろん，(III 型）の場合も全く同じである）．

さて，(II 型）の場合，A は r 以下の有理数の全体，A' は r より大きい有理数の全体，となるので，この切断に対応した有理コーシー列として，$a_n \equiv r$（すべての n で）をとる事ができる．このコーシー列による同値類は，お約束により有理数 r を定義している． □

命題 4.2.6 写像 S は四則演算と可換である．例えば加法なら，$S(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = S(\boldsymbol{\alpha}) + S(\boldsymbol{\beta})$ である．

（証明）加法だけやる（減法乗法除法も全く同じ）．

構成 4.2.1 に従って，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ と $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ に対応する数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を作ろう．$\{a_n\}$ は $S(\boldsymbol{\alpha})$，$\{b_n\}$ は $S(\boldsymbol{\beta})$ を表すので，数列 $\{a_n + b_n\}$ は $S(\boldsymbol{\alpha}) + S(\boldsymbol{\beta})$ を表し，$\{c_n\}$ は $S(\boldsymbol{\gamma})$ を表す．そこで数列 $\{a_n + b_n\}$ と数列 $\{c_n\}$ が同値であることを示せば，これらが同じ実数を表す事が証明できる．

さて，その作り方から，$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は

$$a_n \le \boldsymbol{\alpha} < a_n + \frac{1}{n}, \qquad b_n \le \boldsymbol{\beta} < b_n + \frac{1}{n} \tag{4.2.7}$$

を満たしている．加法は不等号を保存する（定理 2.3.7）から，この両辺を足して

$$a_n + b_n \le \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} < a_n + b_n + \frac{2}{n} \tag{4.2.8}$$

が成り立つ．一方，c_n の方は

$$c_n \le \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} < c_n + \frac{1}{n} \tag{4.2.9}$$

を満たしている．上の 2 つから，

$$a_n + b_n \le \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} < c_n + \frac{1}{n} \qquad \text{かつ} \qquad c_n \le \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} < a_n + b_n + \frac{2}{n} \tag{4.2.10}$$

つまり，

$$|a_n + b_n - c_n| < \frac{2}{n} \tag{4.2.11}$$

がなりたつことがわかった．ここで $n \to \infty$ とすれば $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n - c_n) = 0$ となるので，数列 $\{a_n + b_n\}$ と $\{c_n\}$ が同値である．つまり，これらの表す $S(\boldsymbol{\alpha}) + S(\boldsymbol{\beta})$ と $S(\boldsymbol{\gamma}) = S(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta})$ は等しい． □

これで，S が全射になっている事を除き，必要なことが証明できた．全射になっている事は次に T を構成してから，4.4 節で見る．

4.3 写像 T の構成

今度は T の方を構成しよう．今，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ をひとつ持ってくる．これは有理コーシー列の同値類として定義したが，その代表元 $\{x_n\}$ として，以下のようなものを構成しよう．この $\{x_n\}$ を用いて $T(\boldsymbol{x})$ に相当する実数の切断を構成するつもりである．

補題 4.3.1 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ の代表元として，広義単調増加である有理コーシー列 $\{x_n\}$，および広義単調減少である有理コーシー列 $\{x'_n\}$ が存在する．

（証明）命題 3.4.6 によれば，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ に対して，それをいくらでも精度良く近似する有理数が存在する．つまり，与えられた $\boldsymbol{x}$ と $n > 0$ に対して，

$$r \le \boldsymbol{x} < r + 1/n \tag{4.3.1}$$

となるような有理数 r を見つける事ができる．そこで以下のように数列 $\{x_n\}, \{x'_n\}$ を定めると，これらが補題の条件を満たすコーシー列であることがすぐにわかる．この構成は出発点の $\boldsymbol{x}$ が $\mathbb{R}_{\rm cut}$ の元か $\mathbb{R}_{\rm cauchy}$ の元かだけの違いで構成 4.2.1 と本質的に同じなので，詳細は省略する． □

構成 4.3.2 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{\rm cauchy}$ をとる．この実数に対して有理数の数列 $\{x_n\}, \{x'_n\}$ と有理数の集合 A を以下のように定める．

- $n=1$ では $r \le \boldsymbol{x} < r+1$ となるような $r \in \mathbb{Q}$ を一つ選び，$x_1 := r, x'_1 := r+1$ とする（このような r の存在は (4.3.1) で保証されている）．
- $n \ge 2$ では以下のように帰納法で決める．x_{n-1}, x'_{n-1} まで選んだとし，$\boldsymbol{x} < x_{n-1} + 1/n$ となっているか否かを見る．
  – もし $\boldsymbol{x} < x_{n-1} + 1/n$ であれば，$x_n := x_{n-1}, x'_n := x_{n-1} + 1/n$ と決める．
  – もし $\boldsymbol{x} \ge x_{n-1} + 1/n$ であれば，$r \le \boldsymbol{x} < r + 1/n$ かつ $r + 1/n \le x'_{n-1}$ を満たす r をみつけ，$x_n := r, x'_n := r + 1/n$ と決める（こんな r の存在は構成 4.3.2 と全く同じように証明できる）．
- 上の $\{x_n\}$ を用いて有理数の集合 A を

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r \in \mathbb{Q} \,\big|\, r \le x_n\} = \{r \in \mathbb{Q} \,\big|\, \text{ある } n \text{ に対して } r \le x_n\} \tag{4.3.2}$$

と定義する．

（注）上の構成法から

$$x_1 \le x_2 \le \ldots x_n \le \ldots \le \boldsymbol{x} \le \ldots \le x'_n \le x'_{n-1} \le \ldots \le x'_2 \le x'_1 \tag{4.3.3}$$

が成り立つ．そして命題 4.2.2 に対応して，以下がなりたつ．

命題 4.3.3 構成 4.3.2 で作った $\{x_n\}, \{x'_n\}$ は

- それぞれが有理コーシー列であり，かつ
- 互いに同値である．つまり，$\lim_{n\to\infty} |x_n - x'_n| = 0$ がなりたつ．
- 別の $\{y_n\}.\{y'_n\}$ を構成 4.3.2 で作ると，$\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ も同値である．つまり，$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$.
- 更に，このような $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ のそれぞれから集合 A, B を構成 4.3.2 に従って作ると，$\langle A, A' \rangle$ と $\langle B, B' \rangle$ は同じ実数を表す．

（注）A の一意性がすっきりしないのは，同じ有理数を表す切断 $\langle A, A' \rangle$ が（I 型），(II 型）に相当して 2 通りあり得ることに相当している．

（証明）始めの 3 つは命題 4.2.2 の証明と同じなので略．問題は最後のところだ．$A := \{r \in \mathbb{Q} \,|\, \text{ある } n \text{ に対して } r \le x_n\}$，$B := \{r \in \mathbb{Q} \,|\, \text{ある } n \text{ に対して } r \le y_n\}$ と定義しよう．このとき

$$a \in A \text{ かつ } a \ne \boldsymbol{x} \text{ なる } a \text{ を任意に持ってきたとき}, a \in B \text{ が成り立つ} \tag{4.3.4}$$

事を証明したい．もしこれが言えれば，A, B の役割を逆にして同様の議論を行う事で，A と B の集合としての差は高々$\boldsymbol{x}$ だけである，といえる．

すると，$\boldsymbol{x}$ が無理数の場合は有理数の集合 A, B に差は生じず，$A = B$ となる．つまりこれらの定義する実数も等しい：$\langle A, A' \rangle = \langle B, B' \rangle$．一方 $\boldsymbol{x}$ が有理数の場合は $A \ne B$ かもしれないが，これは $\langle A, A' \rangle, \langle B, B' \rangle$ が同一の有理数 $\boldsymbol{x}$ に相当する（II 型）（III 型）の切断である事を意味し，やはり同じ実数（有理数）を表す事が結論できる．

では (4.3.4) を証明しよう．まず，$a \in A$ とは，ある N が存在して $a \le x_N$ となっていることを意味する．一方この x_n は $x_n \le \boldsymbol{x}$ を満たしている．従って $a \le \boldsymbol{x}$ ではあるが，今は $a \ne \boldsymbol{x}$ と仮定しているので，$a < \boldsymbol{x}$ である．

さて，数列 y_n は $y_n \le \boldsymbol{x} < y_n + 1/n$ となるように作ってある．ここで n を充分に大きくとって，

$$\frac{\boldsymbol{x} - a}{2} > \frac{1}{n} \tag{4.3.5}$$

となるようにしよう（このような n の存在は有理数の稠密性から）．すると，

$$y_n > \boldsymbol{x} - \frac{1}{n} > \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{x} - a}{2} = \frac{a + \boldsymbol{x}}{2} > \frac{a + a}{2} = a \tag{4.3.6}$$

がなりたつ．つまり，$a \in B$ であることが示せた． □

この $\{x_n\}$ を用いて以下のように切断 $\langle A, A' \rangle$ と写像 T を決める．

定義 4.3.4 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ に対して，構成 4.3.2 に従って有理数の集合 A を定義し，この A によって有理数の切断 $\langle A, A' \rangle$ を作る．このとき $\boldsymbol{x}$ から「有理数の切断 $\langle A, A' \rangle$ の表す実数（$\mathbb{R}_{\text{cut}}$ の元とみる）」への写像を T と定義する．

では，このように定義した T の性質をいくつか述べよう．S のときと同じく T が全射になっている事を示すのはちょっと大変なので，後回しにする．

命題 4.3.5 上で定義した T は，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ に対して，

$$\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y} \qquad \Longrightarrow \qquad T(\boldsymbol{x}) < T(\boldsymbol{y}) \tag{4.3.7}$$

を満たす．これから特に，T が単射であることが結論できる．

（証明）$T(\boldsymbol{x}), T(\boldsymbol{y})$ を表す切断を $\langle A, A' \rangle, \langle B, B' \rangle$ とする．以前に示した命題を使うこともできるが，ある程度基本に戻って見直しておこう．$\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ とは $\epsilon > 0$ と $N > 0$ があって，$n > N$ では $x_n + \epsilon < y_n$ となること，だった．これは $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のすべての代表元についてなりたつので，特に上で構成した $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ についても成り立つ．

さて，$\{x_n\}, \{y_n\}$ はともに有理コーシー列なので，上の $\epsilon > 0$ に対して $N' > 0$ が存在して，

$$m, n > N \quad \text{では} \quad |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{3} \ \text{かつ} \ |y_n - y_m| < \frac{\epsilon}{3} \tag{4.3.8}$$

がなりたつ．従って $m, n, l > \max\{N, N'\}$ では

$$y_m - x_l = (y_m - y_n) + (y_n - x_n) + (x_n - x_l) > -\frac{\epsilon}{3} + \epsilon - \frac{\epsilon}{3} = \frac{\epsilon}{3} \tag{4.3.9}$$

がなりたつ．これはつまり，$m, l > \max\{N, N'\}$ では x_l はどんな y_m よりも少なくとも $\epsilon/3$ だけ小さいことを意味する．つまり，$r \in A$，すなわち $r \le x_l$ となる r は，$r \le x_l < y_m - \epsilon/3$ を満たしている．一方，B の元は $r' \le y_m$ となるようなものである．これから，$B \backslash A$ は少なくとも長さが $\epsilon/3$ の有理数の区間を含んでいる事がわかる．

以上から，$A \subset B$ かつ $B \backslash A$ がゼロでない長さをもっていることがわかった．これは定義 2.2.1 によると，$T(\boldsymbol{x}) \le T(\boldsymbol{y})$ かつ $T(\boldsymbol{x}) \ne T(\boldsymbol{y})$ を意味する．つまり，$T(\boldsymbol{x}) < T(\boldsymbol{y})$ である． □

命題 4.3.6 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Q}_{\text{cauchy}}$ の時，$T(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{Q}_{\text{cut}}$ である．つまり，T は有理数に対応する $[\{a_n\}]$ を有理数に対応する切断 $\langle A, A' \rangle$ に移す．

（証明）具体的にやってみればよい．構成 4.3.2 による $\{x_n\}$ としては，$x_n \equiv x$（すべての項が x）というものがとれる．定義 4.3.4 に従って A を作ると，$A = \{r \in \mathbb{Q} \,|\, r \le x\}$ となる．このような A から作った有理数の切断 $\langle A, A' \rangle$ は（I 型）であり，有理数を表す． □

命題 4.3.7 写像 S は四則演算と可換である．例えば加法なら，$T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y})$ である．

（証明）加法だけやる（減法乗法除法も全く同じ）．

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ から構成 4.3.2 に従って数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を作り，集合 A, B も定義する．写像 T の定義から，$T(\boldsymbol{x}) = \langle A, A' \rangle$，$T(\boldsymbol{y}) = \langle B, B' \rangle$ であり，また $\mathbb{R}_{\text{cut}}$ における加法の定義から $T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}) = \langle (A + B), (A + B)' \rangle$ である．これが $T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$ に等しい事を証明したい．

そのための正当な方法は $\boldsymbol{z} := \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ から構成 4.3.2 に従って数列 $\{z_n\}$ を作る事だろうから，これを見越して $z_n := x_{2n} + y_{2n}$ と定義してやろう．$\{x_n\}, \{y_n\}$ は

$$x_{2n} \le \boldsymbol{x} < x_{2n} + \frac{1}{2n}, \qquad y_{2n} \le \boldsymbol{y} < y_{2n} + \frac{1}{2n} \tag{4.3.10}$$

を満たしているので，この両辺をたして $z_n := x_{2n} + y_{2n}$ を用いると

$$z_n \le \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} < z_n + \frac{1}{n} \tag{4.3.11}$$

がなりたっている．また，その構成法から $\{x_n\}, \{y_n\}$ はともに広義単調増加なので，$\{z_n\}$ も広義単調増加である．以上から $\{z_n\}$ は $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ に対して構成 4.3.2 を適用して作った数列とみなせる．そこで $\{z_n\}$ の定める $C := \{r \in \mathbb{Q} \mid$ ある n に対して $r \le z_n\}$ を作ると，$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ は $\langle C, C' \rangle$ にひとしいことになる．

ところが，すぐ後でしめすように $C = A + B$ である．よって $T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \langle C, C' \rangle = \langle (A+B), (A+B)' \rangle$ が成り立ち，$\langle (A+B), (A+B)' \rangle = \langle A, A' \rangle + \langle B, B' \rangle = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y})$ と併せると命題が証明される．

最後に $C = A + B$ であることを示しておこう．$C \subset A + B$ と $C \supset A + B$ の両方向を示す．まず，$r \in C$ ということはある n に対して $r \le z_n = x_n + y_n$ ということだ．このとき，$r = r_1 + r_2$ かつ $r_1 \le x_n, r_2 \le y_n$ と分解できて，このときは $r_1 \in A$ かつ $r_2 \in B$ が成り立つ．つまり，$C \subset A + B$ である．

逆に $r \in A + B$ ならば $r_1 \in A$ と $r_2 \in B$ を用いて $r = r_1 + r_2$ と書けているが，A, B の定義から n_1, n_2 が存在して $r_1 \le x_{n_1}, r_2 \le y_{n_2}$ が成り立っている．x_n, y_n が広義単調増加だったので，n_1 と n_2 のどちらよりも大きな n では $r_1 \le x_n$ と $r_2 \le y_n$ の両方がなりたつ．従って両辺を足して，$r = r_1 + r_2 \le x_n + y_n = z_n$ が成り立つので，$A + B \subset C$ である □

4.4 $T = S^{-1}$，つまり２つの構成の同等性

さて最後に，S, T は互いに逆写像の関係にある事をしめそう．これが示せれば，S と T がそれぞれ全単射であることがわかる．

命題 4.4.1 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{\mathrm{cauchy}}$ に対して $S(T(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ が成立している．

（証明）具体的に $T(\boldsymbol{x})$ と $S(T(\boldsymbol{x}))$ を構成してみるのが一番わかりやすい．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{\mathrm{cauchy}}$ が与えられたとき，構成 4.3.2 のように $\boldsymbol{x}$ の代表元 $\{x_n\}, \{x'_n\}$ を定義し，それを使って定義 4.3.4 のごとく A と切断 $\langle A, A' \rangle$，およびそれの表す $T(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}_{\mathrm{cut}}$ を定義する．

今度はこの $\boldsymbol{\alpha} := T(\boldsymbol{x})$ に S を作用させるので，構成 4.3.2 のように数列 $\{a_n\}, \{a'_n\}$ を作ってみよう．この $\{a_n\}$ は有理コーシー列であるから何かの実数（$\mathbb{R}_{\mathrm{cauchy}}$ の元）を表しているはずである．これは元々の出発点の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{\mathrm{cauchy}}$ と同じであると言いたい訳だ．これには，もともと $\boldsymbol{x}$ の代表元であった $\{x_n\}$ と，いま作ってきた $\{a_n\}$ が同値である事を言えば良い．

そこでこれらの数列の関係を吟味してみよう．まず，$\{x_n\}, \{x'_n\}$ については，

$$x_n \le \boldsymbol{x} < x'_n, \qquad x'_n - x_n = \frac{1}{n}, \qquad x_n \text{ は広義単調増加，} x'_n \text{ は広義単調減少} \tag{4.4.1}$$

となるように作った．

次に切断に出てくる集合 A と $\{x_n\}$ の関係は

$$A := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r \in \mathbb{Q} \,\big|\, r \le x_n\} \tag{4.4.2}$$

であった．つまり，A とは，ある n に対して $r \le x_n$ が成り立つような有理数 r の全体である．

さて，$\{a_n\}, \{a'_n\}$ とは，構成 4.2.1 によれば，

$$a_n \le T(\boldsymbol{x}) < a'_n, \qquad a'_n - a_n = \frac{1}{n}, \qquad a_n \text{ は広義単調増加，} a'_n \text{ は広義単調減少} \tag{4.4.3}$$

となるように作ってある．今はまだ $T(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{x}$ の関係がわからないので，このままでは a_n と x_n の関係をつけにくい．しかしながら，糸口はある．

すなわち，切断の時の大小の定義から，$a_n \le T(\boldsymbol{x})$ とは $a_n \in A$ ということである．同じく，$T(\boldsymbol{x}) < a'_n$ とは $a'_n \in A'$ と言う事である．

さて一般に，(4.4.2) から，$s \in A$ ならばある m が存在して $s \le x_m$ が成り立たねばならない．一方，$t \in A'$ ということは，どのような m をもってきても $t \le x_m$ は成り立たない，つまりすべての m に対して $t > x_m$ であることを意味する．これを $s = a_n, t = a'_n$ に対して使うと，

$$a_n \le x_m \ \text{なる}\ m\ \text{が存在} \qquad \text{すべての}\ \ell\ \text{に対して}\ a'_n > x_\ell \tag{4.4.4}$$

が結論できる．さて，x_n は広義単調増加なので，$a_n \le x_m$ ならば $p > m$ でも $a_n \le x_p$ が成り立つ．従って，上の前半から $a_n \le x_m$ かつ $m \ge n$ なる m が存在する事が言える．そこで後半の ℓ を m に等しくとると，そこで，$m \ge n$ を満たす m で

$$a_n \le x_m < a'_n \tag{4.4.5}$$

を満たすものが存在すると言える．

これを用いて $a_n - x_n$ を評価しよう．まず上の m を用いて

$$|a_n - x_n| = |a_n - x_m + x_m - x_n| \le |a_n - x_m| + |x_m - x_n| \tag{4.4.6}$$

と評価する．ここで $a'_n > x_m \ge a_n$ と $a'_n - a_n = 1/n$ から，

$$0 \le x_m - a_n < \frac{1}{n} \tag{4.4.7}$$

である．また，x_n が広義単調増加であることと $\{x_n\}$ の構成法から $m \ge n$ では

$$x_n \le x_m \le \boldsymbol{x} < a'_n \qquad \text{かつ} \qquad x'_n - x_n = \frac{1}{n} \tag{4.4.8}$$

であるので，

$$0 \le x_m - x_n < x'_n - x_n = \frac{1}{n} \tag{4.4.9}$$

が結論できる．以上を (4.4.6) に代入して，

$$|a_n - x_n| \le \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \tag{4.4.10}$$

であることがわかった．これから直ちに $\lim_{n\to\infty} |a_n - x_n| = 0$ が結論できる．つまり，$\{a_n\}$ と $\{x_n\}$ は同値であって，同じ実数（=有理コーシー列の同値類）を定義する．$\{a_n\}$ は $S(T(\boldsymbol{x}))$ を，$\{x_n\}$ は $\boldsymbol{x}$ を定めたから，結局，$S(T(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ が結論できた． □

これから直ちに：

命題 4.4.2 S, T は共に全単射である．

（証明）単射である事は既に言ってある．問題は全射だが，これを言うには，$S(\mathbb{R}_{\text{cut}}) = \mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ および $T(\mathbb{R}_{\text{cauchy}}) = \mathbb{R}_{\text{cut}}$ であることを言えば良い．S が $\mathbb{R}_{\text{cut}}$ から $\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ への写像だから $S(\mathbb{R}_{\text{cut}}) \subset \mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ ではある．だから $S(\mathbb{R}_{\text{cut}}) \supset \mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ および $T(\mathbb{R}_{\text{cauchy}}) \supset \mathbb{R}_{\text{cut}}$ を示せば証明は終わる．

そこで，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ をとり，この $\boldsymbol{x}$ を T で写像した結果 $\boldsymbol{\alpha} := T(\boldsymbol{x})$ を考える．$\boldsymbol{\alpha}$ を今度は S で移すと，行き先は $S(\boldsymbol{\alpha}) = S(T(\boldsymbol{x}))$ になるが，右辺は命題 4.4.1 によって $\boldsymbol{x}$ に等しい．つまり，$\boldsymbol{x} = S(\boldsymbol{\alpha})$ 及び $\boldsymbol{x} \in S(\mathbb{R}_{\text{cut}})$ がなりたつ．これが任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ について成り立つから，$\mathbb{R}_{\text{cauchy}} \subset S(\mathbb{R}_{\text{cut}})$ である．

同様に $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}_{\text{cut}}$ から出発して議論すると $\mathbb{R}_{\text{cut}} \subset T(\mathbb{R}_{\text{cauchy}})$ が言える．以上から $S(\mathbb{R}_{\text{cut}}) = \mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ および $T(\mathbb{R}_{\text{cauchy}}) = \mathbb{R}_{\text{cut}}$ が結論され，S, T は共に全射だと言えた． □

以上で話はおしまいである．これで定理 4.1.1 が証明できた．その結果，$\mathbb{R}_{\text{cut}}$ と $\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ の間の全単射で，四則演算や大小関係と可換，かつ互いに逆写像の関係にあるものが構成できた．これはつまり，四則演算や大小関係を考える際，$\mathbb{R}_{\text{cut}}$ と $\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ の**どちらを考えても同じ**だということを意味する．従ってこの意味で，切断による実数の構成 $\mathbb{R}_{\text{cut}}$ とコーシー列による構成 $\mathbb{R}_{\text{cauchy}}$ は同じものとみなせるのだ．

5 実数の一意性

さて最後に，実数の公理 1.1.1 を満たす数の体 K は一つに決まることを説明しよう．ただし一つに決まると言ったのは少し不正確で，本当は「公理 1.1.1 を満たす K はいろいろあるけども，四則演算や大小，極限を考える限り，どれも同じものとみなしてよい」ということである（より正確な意味は以下の定理 5.1.1 を参照）．

この章は当初，このノートにおさめるつもりはなく，ノートは前章の「２つの構成の同値性」で終わりにするつもりだった．ここまで書いてきたので，勢いでつけることにしたが，なにぶん，根性がなくなって来てるので，これまでの章よりも簡潔（というより不親切）になっている．ご容赦願いたい．なお，この章を書くに当たっては，最初の文献案内に掲げた「数（Zahlen）」の 2.5 節を参考にした．

実のところ，前章の結果はこの章の一般的な定理 5.1.1 にほとんど含まれる．その意味で前章はもはや必要ないということになるのだが，前章の具体的構成はそれ自身に意味があると思うので，そのままおいておく．

(記号のお約束）ここでは実数の公理 1.1.1 を満たす数の体を２つ考え，これらが実質的に「同じ」ものであることを示す．そこで考える２つの体を K と K' と書く．また，K の元は a, b, x, y など，K' の元は a', b', x', y' などと書く.（後で述べるように a と a'，b と b' などが互いに「対応」する元になる.）

5.1 主定理

まずは主定理を述べよう．

定理 5.1.1 (「実数」の一意性) 実数の公理 1.1.1 を満たす数の体 K と K' を任意に決めると，K と K' の間には以下を満たすような写像が一意に存在する．この意味で K と K' は「同型」であって，実数の公理を満たす数の体は実質的に一意に定まる．

(1) K から K' への全単射 S が存在する．S の逆写像（S が全単射なので存在）を T と書く．

(2) この S と $T = S^{-1}$ は K や K' 上の**四則演算と両立**する．つまり

$$S(0) = 0', \qquad S(1) = 1', \tag{5.1.1}$$

$$S(a+b) = S(a) + S(b) \quad \text{かつ} \quad S(ab) = S(a)S(b) \qquad (\forall a, \forall b \in K) \tag{5.1.2}$$

が成り立つ．この式では，左辺の $a, b, 0, 1$ は K の元，右辺の $S(a), S(b), S(0), S(1)$ は対応する K' の元であり，特に 0 と 1 は加法と乗法の単位元を表す．同様に，

$$T(0') = 0, \qquad T(1') = 1, \tag{5.1.3}$$

$$T(a' + b') = T(a') + T(b') \quad T(a'B') = T(a')T(b') \qquad (\forall a', \forall b' \in K') \tag{5.1.4}$$

がなりたつ．この式では，左辺の $a', b', 0', 1'$ は K' の元，右辺の $T(a'), T(b'), T(0'), T(1')$ は対応する K の元である．

(3) 更に S と $T = S^{-1}$ は K と K' における**順序を保存**する．つまり，

$$a < b \text{ なる } a, b \in K \ \text{ に対して } \ S(a) < S(b) \tag{5.1.5}$$

がなりたつ．同様に，

$$a' < b' \text{ なる } a', b' \in K' \ \text{ に対して } \ T(a') < T(b') \tag{5.1.6}$$

がなりたつ．

（言葉の注；大昔に勉強したのでちょっと自信がない）上の (1) と (2) をみたす写像を体 K と体 K' の間の同型写像（isomorphism）という．またこのような同型写像が存在する K と K' は同型（isomorphic）という．つまり上の (1) と (2) は「K から K' への同型写像 S とその逆写像 T が存在する」と簡潔に述べても良い（と思う）．

この定理は以下のような筋道で証明できる．

１．まず，整数と有理数については，かなり簡単に写像 S, T を構成できる（5.2.2 節，5.2.3 節）．また，上の意味でこれらの写像が一意に決まる事がわかる（5.2.4 節）．

２．次に，上の写像 S と T を，無理数に対しても定義する．この際，有理数上で定義してあった S や T を，それが「連続」な写像になるように無理数にも拡張する（5.3.1，5.3.2 節）．このようにすれば，望みの写像が出来ている事は後から確かめる（5.3.3 節）．

３．最後に，望みの写像が一意に決まる事を示して，証明を完結する（5.4 節）．

すべての元になるのは K, K' の「整数」や「有理数」の部分での対応関係である．そこで以下ではまず，K, K' の「整数」や「有理数」はどのようなものであるかを簡単に見た上で，この部分の対応をつける．そのあとで無理数の対応をつけるが，こちらはむしろ簡単だろう．

5.2 「整数」と「有理数」の部分の対応

まず手始めに，K と K' の中の「整数」「有理数」の部分での対応を，その部分での S, T を具体的に構成する事で考えよう．

5.2.1 「整数」「有理数」とは？

そのためにはまず,「整数」「有理数」とは何かを公理からきちんと定義する必要がある．ここでは少し直感を交えながら，大体のところを述べる．以下，K は実数の公理 1.1.1 をみたすものとする．

まず,「整数」とは何かを非常にええ加減に述べよう．

- 実数の公理 1.1.1 によれば，加法の単位元 0，乗法の単位元 1 が K の元として存在する．この 0 と 1 は「整数」の一つである．
- 次に，実数の公理 1.1.1 によると，K では「和」が定義されている．そこで，$2 := 1+1, 3 := 2+1, 4 := 3+1$ などとして加法の結果として作られる元 n（$n = 2, 3, 4, \ldots$）はすべて K の元である．そこで $1, 2, 3, 4, \ldots$ を「正の整数」と呼ぶ．
- 同様に，実数の公理 1.1.1 で定義されている「差」を用いると $-1 := 0-1, -2 := -1-1, -3 := -2-1, \ldots$ が K の元であることがわかるが，これを「負の整数」と呼ぶ．
- （余談）加減乗除の規則から，$-n$ は n と -1 の積とも考えられる（$n = 1, 2, 3, \ldots$）．
- 以上でその存在が保証された　$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$　を K の中の**整数**の全体という．

次に有理数であるが，これは通常のように，２つの整数 p, q（$q \neq 0$）の商として定義する．すなわち，

- 実数の公理 1.1.1 によれば，ゼロでない元による割り算が定義できている．そこで，整数 p とゼロでない整数 q を考え，その商 p/q を「有理数」と呼ぶ事にする．
- ただし，p と q が小学校の算数の意味で「通分」できるものは同じ有理数とみなす．例えば $8/4 = 4/2 = 2/1 = 2$.
- 以上の同一視の約束の下での p/q（$q \neq 0$）の全体を K の中の**有理数**の全体という．

5.2.2 「整数」同士の対応

以下，実数の公理 1.1.1 をみたす数の集合を 2 つ持ってきて，それらを K, K' と書こう．我々の最終目的は，K と K' の間に定理 5.1.1 を満たすような対応関係（写像）S, T が存在する事を示す事であるが，その前に，この小節では K と K' の「整数全体」同士の対応，次の小節では K と K' の「有理数全体」同士の対応をつけよう．これから K の中の「有理数の全体」を $\mathbb{Q}$，その中の「整数の全体」を $\mathbb{Z}$，その中の「正の整数の全体」を $\mathbb{N}$ と書く．また同様に，K' の中の「有理数の全体」を $\mathbb{Q}'$，その中の「整数の全体」を $\mathbb{Z}'$，その中の「正の整数の全体」を $\mathbb{N}'$ と書く．

まずは整数の全体，$\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}'$ の対応 S, T を[18]以下のようにしてつけよう[19]．

1. まず，$S(0) := 0'$，$T(0') := 0$ として K, K' それぞれの加法の単位元同士を対応させる．
2. 同じく，$S(1) := 1'$，$T(1') := 1$ として K, K' それぞれの乗法の単位元同士を対応させる．
3. 次に，$S(2) := S(1+1) = S(1) + S(1) = 1' + 1' = 2'$，$S(3) := S(2+1) = S(2) + S(1) = 2' + 1' = 3', \ldots$ などと進み，K の自然数 n に K' の自然数 n' を対応させる[20]．
4. 同様に $T(2') := T(1') + T(1') = 1 + 1 = 2, T(3') := T(2') + T(1') = 3, \ldots$ として，$\mathbb{N}'$ の元 n' に対して，$T(n') := n$ と定める．
5. 更に，$S(-n) := -S(n) = -n'$ のように，K の負の整数には K' の負の整数を対応させる[21]．同様に，$T(-n') := -n$ と定める．
6. 以上で $\mathbb{Z}$ の各元 n に対する $S(n)$，及び $\mathbb{Z}'$ の各元 n' に対する $T(n')$ が定義できた．

以下，最終的には K と K' を対応づける S, T を定義するが，その定義は上で定義した $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}'$ の対応を整数以外に拡張したものになっていることを後でみる．この意味で，上で定義したものは，最終的に作るべき S の定義域を $\mathbb{Z}$ に制限したものと考えて良い．そこで，上で定義した S を $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}'$ への写像とみなして $S|_{\mathbb{Z}}$ と書く．同様に，上の T は $\mathbb{Z}'$ から $\mathbb{Z}$ への写像を与えるので，これを $T|_{\mathbb{Z}'}$ と書こう．すると上の構成法から，以下が容易にわかる．

- $S|_{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}'$ への単射，$T|_{\mathbb{Z}'}$ は $\mathbb{Z}'$ から $\mathbb{Z}$ への単射である．
- $S|_{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}'$ への全射，$T|_{\mathbb{Z}'}$ は $\mathbb{Z}'$ から $\mathbb{Z}$ への全射である．
- $S|_{\mathbb{Z}}, T|_{\mathbb{Z}'}$ は $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}'$ 間の写像として互いに逆写像の関係にある．つまり，$n \in \mathbb{Z}$ に対して $T(S(n)) = n$，かつ $n' \in \mathbb{Z}$ に対して $S(T(n')) = n'$．
- $S|_{\mathbb{Z}}, T|_{\mathbb{Z}'}$ は四則演算と両立する（「両立」の意味は定理 5.1.1 参照）．この意味で $S|_{\mathbb{Z}}, T|_{\mathbb{Z}'}$ は $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}'$ 間の同型写像になっている．
- さらにこの $S|_{\mathbb{Z}}, T|_{\mathbb{Z}'}$ は順序を保存する．つまり，$n_1 < n_2$ が $\mathbb{Z}$ の元なら，$S(n_1) < S(n_2)$；T の方も同様．

さて，このように決めた $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}'$ の対応は非常に自然なので，以下では $'$ をこの特別な意味で使う．つまり，$n \in \mathbb{Z}$ に対して，n' は $n' = S(n) \in \mathbb{Z}'$ を意味するものとする．また，$n' \in \mathbb{Z}$ に対して，n は $n = T(n') \in \mathbb{Z}$ を意味するものとする．

5.2.3 「有理数」同士の対応

次に，これを基にして有理数部分の対応を以下のようにして作る．

0. $\mathbb{Q}$ の任意の元 r は整数 p とゼロでない整数 q を用いて $r = p/q$ と書けることは既に注意した．
1. これを用いて，$p, q \in \mathbb{Z}$ に対して，$S(r) = S(p/q) := S(p)/S(q) = p'/q'$ として，$S(p/q)$ を決める（ここで先に定めた通り，$p' = S(p), q' = S(q)$ である）．
2. これで K から K' への写像 S の $\mathbb{Q}$ への制限 $S|_{\mathbb{Q}}$ が定義できた．

[18]すぐ後で注意するように，定理 5.1.1 に出てくる写像 S, T はその定義域が K や K' であるが，ここでの S, T の定義域はその整数のところだけである．従って，厳密なことをいうと，ここで考えている写像は定理 5.1.1 の S, T の定義域を制限したものであって，$S|_{\mathbb{Z}}$ や $T|_{\mathbb{Z}}$ と書くべきだ．しかしここでこの記号を使うと式が非常に煩雑になるため，ここでは $|_{\mathbb{Z}}$ を省いて式を書いている

[19]今の時点では「S と T が逆写像になるべし」の条件は忘れて，ともかく T を定義する．実際に逆写像になっているかはこの後で簡単に確かめる

[20]ここで，S が加法と両立すべき事から，$S(n)$ は $1'$ を n こ足したもの $(= n')$ にならざるを得ない事に注意

[21]ここも S が乗法と両立すべきことを用いた

3. 同様に，$p', q' \in \mathbb{Q}'$ に対してつまり $T(p'/q') := T(p')/T(q') = p/q$ と決める．

すると上の構成法から，整数の対応とつけた時とほとんど同じようにして，以下が容易にわかる．

- $S|_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{Q}'$ への全射かつ単射，$T|_{\mathbb{Q}'}$ は $\mathbb{Q}'$ から $\mathbb{Q}$ への全射かつ単射である．
- $S|_{\mathbb{Q}}, T|_{\mathbb{Q}'}$ は $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}'$ 間の写像として互いに逆写像の関係にある．つまり，$r \in \mathbb{Q}$ に対して $T(S(r)) = r$，かつ $r' \in \mathbb{Q}$ に対して $S(T(r')) = r'$．
- $S|_{\mathbb{Q}}, T|_{\mathbb{Q}'}$ は四則演算と両立する（「両立」の意味は定理 5.1.1 参照）．この意味で $S|_{\mathbb{Q}}, T|_{\mathbb{Q}'}$ は $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}'$ 間の同型写像になっている．
- さらにこの $S|_{\mathbb{Q}}, T|_{\mathbb{Q}'}$ は順序を保存する．

整数全体の対応とつけた時と同じく，このように決めた $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}'$ の対応は非常に自然だ．そこで以下では $'$ をこの特別な意味で使う．つまり，$r \in \mathbb{Q}$ に対して，r' は $r' = S(r) \in \mathbb{Q}'$ を意味するものとする．また，$r' \in \mathbb{Q}$ に対して，r は $r = T(r') \in \mathbb{Q}$ を意味するものとする．

5.2.4　対応の一意性

最後に，このような対応の一意性は以下のように考察すれば証明できる[22]．

(1) $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}'$ の間の写像 S, T（本当は「S, T の $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}'$ への制限」だが，記号がややこしくなるので単に S, T とかく）は加法と乗法の単位元を写しあうことに注意しよう．実際，$S(0) = x'$ と書くと，

$$x' = S(0) = S(0+0) = S(0) + S(0) = x' + x' \tag{5.2.1}$$

となっているはずで，両辺に $-x'$ を足すと $0' = x'$ がでて，$S(0) = 0'$ であることがわかる．T についても同様．

また $S(1) = y'$ と書くと

$$y' = S(1) = S(1 \times 1) = S(1) \times S(1) = y' \times y' \tag{5.2.2}$$

であって，両辺を y' で割れば（$y' \neq 0'$ である限りは）$y' = 1'$，つまり $S(1) = 1'$ が結論できる．$y' \neq 0'$ であることは，もし $S(1) = y' = 0'$ であったとすると，両辺に T を作用させて $0 = T(0') = T(S(1)) = 1$ となってしまって矛盾する事からわかる．

(2) 整数の構成法から，整数の対応も一意である事がわかる．つまり，S_1, S_2 という 2 つの同型写像があったとしても，

$$S_1(n) = S_1(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{こ}}) = \underbrace{S_1(1)+S_1(1)+\cdots+S_1(1)}_{n\text{こ}} = \underbrace{1'+1'+\cdots+1'}_{n\text{こ}} = S_2(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{こ}}) = S_2(n) \tag{5.2.3}$$

となって，正の整数 n の行き先は S_1, S_2 で共通である．負の整数の行き先も同じ事は同様にいえる．

(3) 更に，一般の有理数の行き先も，S_1, S_2 が同型である事から（q はゼロでない整数）

$$S_1(p/q) = S_1(p)/S_1(q) = S_2(p)/S_2(q) = S_2(p/q) \tag{5.2.4}$$

となって，同じである事がわかる．

このように，写像 $S|_{\mathbb{Q}}$ と $T_{\mathbb{Q}'}$ は一意に定まることがわかる．

5.3　実数（無理数）の対応

これまでに有理数同士での対応をつけたので，これをふまえて「無理数」同士の対応をつけよう．

[22] 一意性については 5.4 節で，少し別の角度からもう一度考察する

5.3.1 写像の構成

まず，K と K' 別々に「実数と極限」の議論を（通常の解析の講義のように）行っておく．これは実数の公理 1.1.1 に基づけば行えるので，問題はない．このノートではそのような普通の議論はくり返さず，その結果（の一部）を用いる．

さて，K の任意の元 x に対し，$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ となるような有理数のコーシー列 $\{x_n\}$ が存在する．$x \in K$ に収束する有理コーシー列はいろいろあり得るが，それらのうちの２つを $\{x_n\}$ と $\{\tilde{x}_n\}$ とすると，これらは

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - \tilde{x}_n| = 0 \tag{5.3.1}$$

をみたす.（この関係は 3 章での「同値」な条件と同じである.）

同様に K' の任意の元 y' に対しては $\lim_{n\to\infty} y'_n = y'$ となるような有理数のコーシー列 $\{y'_n\}$ が存在する．

この準備の下に，K の無理数から K' の無理数への写像 S を以下のように定義する．まず任意の $x \in K$ を固定する．上で注意したように，x に収束する有理コーシー列 $\{x_n\}$ が K の中にとれる．そこでこれを用いて写像 S を

$$S(x) := \lim_{n\to\infty} S(x_n) \tag{5.3.2}$$

と定義する．

5.3.2 写像が well-defined なこと

3 章での議論と同じく，まずは上の定義がちゃんとした定義になっている（代表元の取り方によらない）事から確かめる必要があるが，これは大丈夫だ．実際，$\{x_n\}$ と $\{\tilde{x}_n\}$ が共に $x \in K$ に収束する有理コーシー列だとしよう．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} |\, S(x_n) - S(\tilde{x}_n)\,| = \lim_{n\to\infty} |\, S(x_n - \tilde{x}_n)\,| = \lim_{n\to\infty} |\, x'_n - \tilde{x}'_n\,| \tag{5.3.3}$$

である（$x'_n, \tilde{x}'_n$ は前節までに作った $x_n, \tilde{x}_n$ に対応する K' の有理数を表す）．ところが写像 S は絶対値を保存する（$|x'_n - \tilde{x}'_n| = |x_n - \tilde{x}_n|$）ので，上の右辺は $\lim_{n\to\infty} |\, x_n - \tilde{x}_n\,| = 0$ に等しい．つまり，$\lim_{n\to\infty} |\, S(x_n) - S(\tilde{x}_n)\,| = 0$ が示され，(5.3.2) の結果が代表元である $\{x_n\}$ によらない事が示された．

S と同様に T も定義する．つまり，$x' \in K'$ に対して x' に収束する K' 内の有理コーシー列 $\{x'_n\}$ を持ってきて，

$$T(x') := \lim_{n\to\infty} T(x'_n) \tag{5.3.4}$$

とするのである．この定義が代表元の取り方によらないのは S と同様にして証明できる．

5.3.3 写像の性質

さて，このように定義した S, T が我々の望む性質をもっていることを証明して行こう．

（１）$x \in K$ が有理数の場合，上の定義による $S(x)$ は前節までの定義による（有理数の対応としての）$S_{\text{前節}}(x)$ と一致する．T についても同様である．

（証明）$S(x)$ は代表元の取り方によらないのだから，$\{x, x, x, \ldots\}$ （各項が $x \in \mathbb{Q}$）という代表元をとって計算すると

$$S(x) := \lim_{n\to\infty} S_{\text{前節}}(x_n) = \lim_{n\to\infty} S_{\text{前節}}(x) = S_{\text{前節}}(x) \tag{5.3.5}$$

となって一致． □

（２）S は四則演算と両立する．例えば，加法に関して

$$S(x+y) = S(x) + S(y) \tag{5.3.6}$$

が成り立つ．T についても同様である．

（証明）$x, y \in K$ の代表元をそれぞれ $\{x_n\}, \{y_n\}$ とすると，$x + y$ の代表元の一つは $z_n := x_n + y_n$ である．従って，

$$S(x+y) = \lim_{n\to\infty} S(z_n) = \lim_{n\to\infty} S(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} \Bigl(S(x_n) + S(y_n)\Bigr) = \lim_{n\to\infty} S(x_n) + \lim_{n\to\infty} S(y_n)$$
$$= S(x) + S(y) \tag{5.3.7}$$

となる．最初と最後の等号は S の定義 (5.3.2) によるもので，その次の等号は z_n の定義，またそのあとの２つの等号は K' において成り立つ極限の性質による． □

（３）S は K, K' の順序を保存する．つまり，$x, y \in K$ に対して，

$$x < y \qquad \Longrightarrow \qquad S(x) < S(y) \tag{5.3.8}$$

が成り立つ．T についても同様である．

（証明）有理数の順序を保存する事を用いるのが一番、簡単だろう．つまり，K において成り立つ極限の性質から，$x < y$ ならば両者の間の有理数 r が存在する —— $x < r < y$ となる有理数 r がある．x, y の代表元を $\{x_n\}, \{y_n\}$ とするとき，すべての n において $x_n < r < y_n$ となっているようなものがとれる．このとき，有理数に対しては順序が S によって保存されるから $S(x_n) < S(r) < S(y_n)$ が成り立っている．ここで $n \to \infty$ の極限をとると，K' における極限の性質から

$$\lim_{n\to\infty} S(x_n) \le S(r) \le \lim_{n\to\infty} S(y_n) \tag{5.3.9}$$

が成立する．この式の左辺は $S(x)$，右辺は $S(y)$ だから，

$$S(x) \le S(r) \le S(y) \tag{5.3.10}$$

が得られた．最後に，どちらの等号も成り立たないことを示せば、証明は終わる． □

（４）S は $K \to K'$ の，T は $K' \to K$ の単射である．

（証明）上の「順序の保存」からすぐに出る．つまり，$x \neq y$ ということは $x < y$ または $x > y$ ということであって，この時は順序の保存から $S(x) < S(y)$ または $S(x) > S(y)$ となる．つまり，$S(x) \neq S(y)$ が保証される． □

（５）任意の $x \in K$ に対して，$T\bigl(S(x)\bigr) = x$ である．また，任意の $x' \in K'$ に対して，$S\bigl(T(x')\bigr)x = x'$ である．

（証明）S や T の結果は代表元の取り方によらないことを用いる．x に収束する K 内の有理コーシー列の一つを $\{x_n\}$ とする．定義により，$S(x) = \lim_{n\to\infty} S(x_n)$ であるので，$S(x)$ の代表元としては $x'_n = S(x_n)$ を使うことができる．すると，T の定義により

$$T\bigl(S(x)\bigr) = \lim_{n\to\infty} T(x'_n) = \lim_{n\to\infty} T\bigl(S(x_n)\bigr) \tag{5.3.11}$$

となるが，有理数 x_n に対しては $T \circ S$ は恒等写像であったから，$T(S(x_n)) = x_n$ である．つまり，

$$T\bigl(S(x)\bigr) = \lim_{n\to\infty} T\bigl(S(x_n)\bigr) = \lim_{n\to\infty} x_n = x \tag{5.3.12}$$

が得られる．$S \circ T$ も同様． □

（６）S は $K \to K'$ の，T は $K' \to K$ の全射である．

（証明）S による K の像 $S(K) := \{S(x) \,|\, x \in K\}$ が K' を部分集合として含む事，つまり $S(K) \supset K'$ を証明したい．そこで $y' \in K'$ を任意にとってみる．この $y' \in K'$ に対しても写像 T を施す事はできる（なぜなら，T は K' 全体で定義されているから）から，T による y' の像を $z := T(y')$ とおく．更に z に S を作用させた結果を $x' := S(z) = S(T(y'))$ とおこう．

ところが，任意の $y' \in K'$ に対して $S(T(y')) = y'$ であることは既に見た．従って上から，$y' = S(T(y')) = x' = S(z)$ が得られる．これは y' が $z \in K$ の S による像である事を意味する．これが任意の $y' \in K'$ について成り立つから，$S(K) \supset K'$ である．

T の方も同様である． □

以上から，これまでに構成した S, T は我々の欲しい性質をすべて満たしており，特に K と K' の間の同型写像を与える事がわかった．よって，この意味で K と K' は本質的に同じものであり，「実数の全体」は一意に定まる．

5.4 対応（写像 S, T）の一意性

最後に，このような写像 S, T が一意に定まる事を示して，定理 5.1.1 の証明を完結させよう．この場合，考えるべき S, T は，これまでとは異なる定義のものかもしれない（今までは有理数列の極限を利用して定義したが，そうではない作り方をしたものかもしれない）．そのような一般のものまで考えても，実数体の同型写像という強い縛りが一意性に導く事を示したい．

そのためには，以下の結果を用いる．

命題 5.4.1 (K 上の自己同型写像は恒等写像に限る) 実数の公理 1.1.1 を満たす数の体 K 上の，順序を保つ自己同型写像 φ を考える．すなわち，定理 5.1.1 において $K = K'$ とした場合の S を φ とする．このような φ は実は K 上の 恒等写像に限る．

命題 5.4.1 を認めて S, T の一意性の証明

定理 5.1.1 の結論をみたす K から K' への同型写像が 2 つ以上あったとし，それを S_1, S_2 と書こう．また S_1, S_2 の逆写像を T_1, T_2 と書く．さらに合成写像 $\varphi := T_2 \circ S_1$ を定義する．すると以下がわかる．

- φ は K から K 自身への全単射である．これは S_1, T_2 が全単射であることからすぐに出る．
- φ は体 K から体 K への同型写像であり，K 上の加減乗除と両立する．なぜなら,（加法を例にとると）$x, y \in K$ に対して
$$\varphi(x+y) = T_2(S_1(x+y)) = T_2\big(S_1(x)+S_1(y)\big) = T_2\big(S_1(x)\big) + T_2\big(S_1(y)\big) = \varphi(x)+\varphi(y) \tag{5.4.1}$$
などとなるからである．
- φ は K 上の順序を保存する．実際，$x < y$ の時，$S_1(x) < S_1(y)$ であるので，この両辺に T_2 を作用させると
$$\varphi(x) = T_2(S_1(x)) < T_2(S_1(y)) = \varphi(y) \tag{5.4.2}$$
となるからである．

以上から，この φ は命題 5.4.1 の前提条件をすべて満たしていることがわかった．従って，φ は恒等写像である．つまり，$T_2 \circ S_1 = (S_2)^{-1} \circ S_1$ が恒等写像なのであるが，これは $S_1 = S_2$ を意味する．すなわち，定理を満たす写像は一つしかない． □

命題 5.4.1 の証明

いままでの記述と重複する部分も少しあるが，完全を期するためにゼロから行ってみよう．

(1) 単位元の φ による行き先（像）．まずは加法と乗法の単位元の行き先（像）を調べよう．φ と加法が両立する事から，
$$\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0) \tag{5.4.3}$$
が成りたつ．両辺から $\varphi(0)$ を引くと，$\varphi(0) = 0$ が結論できる．

次に，$\varphi(1) \neq 0$ であることを背理法で示す．もし $\varphi(1) = 0$ であると，任意の $x \in K$ に対して[23]
$$\varphi(x) = \varphi(x \times 1) = \varphi(x) \times \varphi(1) = \varphi(x) \times 0 = 0 \tag{5.4.4}$$
となるが，これは φ が単射であることに反するので許されない．

これを用いると加法の場合と同様に，φ と乗法の両立から
$$\varphi(1) = \varphi(1 \times 1) = \varphi(1) \times \varphi(1) \tag{5.4.5}$$
が出る．$\varphi(1) \neq 0$ なので両辺に $1/\varphi(1)$ を両辺にかけて，これから $\varphi(1) = 1$ が結論できる．

以上から $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ がわかった．

[23] 掛け算であることを強調するため $\times$ を用いることにした

(2) 整数の φ による行き先（像）．まず正の整数 n の行き先は（φ と加法の両立から）

$$\varphi(n)=\varphi(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ こ}})=\underbrace{\varphi(1)+\varphi(1)+\cdots+\varphi(1)}_{n\text{ こ}}=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ こ}}=n \tag{5.4.6}$$

とわかる．また負の整数 $-n$ については（φ と減法の両立から）

$$\varphi(-n)=\varphi(0-n)=\varphi(0)-\varphi(n)=0-n=-n \tag{5.4.7}$$

とわかる．という事で，整数に対しては φ は恒等写像のようにふるまうことがわかった．

(3) 有理数の φ による行き先（像）．次に有理数 $r=m/n$（$n\neq 0$）に対しては（φ と除法の両立から）

$$\varphi(r)=\varphi\Big(\frac{m}{n}\Big)=\frac{\varphi(m)}{\varphi(n)}=\frac{m}{n}=r \tag{5.4.8}$$

となるので，ここでも φ は恒等写像のように作用している．

(4) 無理数の行き先（像）．最後に，一般の無理数 $x\in K$ が φ によってどこに写されるかを考える．この x の上下にある有理数 s,t （$s<x<t$）に対しては，φ が順序を保存する事から

$$\varphi(s)<\varphi(x)<\varphi(t) \tag{5.4.9}$$

がなりたつ．ところが，φ は有理数に対しては恒等写像として働くから，$\varphi(s)=s,\varphi(t)=t$ である．従って上から

$$s<x<t \text{ なる任意の有理数 } s,t \text{ に対して} \qquad s<\varphi(x)<t \quad \text{がなりたつ} \tag{5.4.10}$$

と結論できる．さて，(5.4.10) をみたす x と $\varphi(x)$ は等しくなければならない．実際，

- $\varphi(x)<x$ であったとしてみると，有理数の稠密性から $\varphi(x)<r<x$ を満たすような有理数 r が存在するが，この r を (5.4.10) の s だと思うと，(5.4.10) の結論が成り立たない．
- $\varphi(x)>x$ であったとしてみると，有理数の稠密性から $\varphi(x)>r>x$ を満たすような有理数 r が存在するが，この r を (5.4.10) の t だと思うと，(5.4.10) の結論が成り立たない．

となるので，許されるのは $\varphi(x)=x$ のみである．以上で一般の無理数 x に対しても $\varphi(x)=x$ である事が示され，結局すべての $x\in K$ に対して $\varphi(x)=x$，つまり φ が恒等写像であることが証明された． □

（注）上では無理数を考える時に「順序を保つ」ことを用いたけども，この条件が必要なのかどうか，ちょっと自信がありません．(もう少し考えればわかるのでしょうが，どうも集中できないまま２年経ってしまいました...)

6 文献案内など

以下，このノートとは異なり「かっこいい」解説の載っているものを紹介する（文献表はまとめて最後にある）．繰り返しになるが，以下のものがすっと頭に入る人は，僕のノートを読む必要はない．

- まず，実数の構成全般について奨められるものとして，H.D. Ebbinghaus 他著「数（Zahlen）」[1] が挙げられる．これはいろいろな数について簡潔にまとめた本としても，非常に面白い．もちろん，実数の構成についても一章を割いて解説してある．そこでは実数の歴史的背景から始めて切断やコーシー列による実数の構成まで，興味深く解説していて大変に良い．唯一の問題はその記述が簡潔，かつ少し高度な事である（例えば，「いろいろな構成法が同等であること」の説明も書いてはあるのだが，ある程度の大学数学の知識がないとわかりにくいだろう．僕の 5 章はこの本を自分なりに解説してみたものである）．図書館にも入っているから，一度は見てみるとよい．
- 次に,「デデキントの切断」を用いた構成法についての参考書としては，以下のようなものに目がとまった．
  - 松坂和夫「解析入門 1」[3] の 1.4 節は「デデキントの切断」による実数の構成法を丁寧に扱っているのでお勧めである．正直，僕のノートの 2 章より格段に良く書けている（まあ，アタリマエかな）．ただし，乗法や除法については僕のノートと同じく「正の実数に対する乗除」をまず定義してから負の実数へ拡げる方針をとっている．実数の構成以外にもこの本は解析の独習書として強くお奨めできる本である．
  - 溝畑茂『数学解析 上』[2] の 16〜22 ページ「補足 実数」に,「デデキントの切断」による構成法の簡潔な説明がある．ただし，乗法や除法については上の松坂本や僕のノートと同じく「正の実数に対する乗除」をまず定義してから負の実数へ拡げる方針をとっている．これは非常に良くまとまっているので，これが理解できた人はこのノートの 2 章を読む必要はないだろう．ただし，完結にまとまり過ぎていて，細部を埋めるのは大変かもしれない．この本も解析の参考書として大変に良い本だ．
  - 英語でよいなら C. Rudin “Principles of Mathematical Analysis” [4] の 1 章の Appendix にも「デデキントの切断」による構成法の簡潔な説明が載っている．
  - 正負の実数を区別せずに乗法・除法をまともに定義している洋書があったと思うのだが，どの本であったのか定かではない．これが上の Rudin の本だと勘違いしていたのだが，後から調べてみると Rudin ではなかった．
- 「有理コーシー列の同値類」として構成する方法については，松坂和夫「代数系入門」[5] の 6 章に詳しく載っている．この本は代数の初歩をわかりやすく解説しているので，お奨めだ（1 年生でも充分に読めるだろう）．ただし，この本も実数の四則演算を導入する前に極限を定義して記述を簡単にする流儀である．この点では僕の 3 章とは少し異なっている．
- 小平邦彦「解析入門」[6]，高木貞治「解析概論」[7] ともに，切断を用いた構成を説明しているが，乗法と除法の定義がなかなか厄介（負の数の掛け算、割り算で符号が変わるため）なので，途中から極限を混ぜた形の説明がなされている．

参考文献

[1] H.D. Ebbinghaus 他著，成木勇夫訳「数（Zahlen）上」（シュプリンガー，2004）

[2] 溝畑茂『数学解析 上』（朝倉書店，1973）

[3] 松坂和夫「解析入門 1」（岩波書店，1997）

[4] Walter Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed. (McGrow-Hill, 1976)

[5] 松坂和夫「代数系入門」（岩波書店，1976）

[6] 小平邦彦「解析入門 I」（岩波書店，2003）

[7] 高木貞治「解析概論」（岩波書店，1983）