

2008.09.28.

数学特論 18（数学者のための物理学概論）

担当：原 隆（数理学研究院）：六本松 3-312 号室, phone: 092-726-4774, e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp

講義の web page は <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/08/butsuri.html>
(原のホームから「講義」→「数学特論 18」とクリック)

Office hours: 原が六本松にいますので、通常のオフィスアワーは設けません。講義の後で質問などを受け付けます。また、メールでの問い合わせやメールでのアポ取りにも応じますので、積極的に利用してほしい。

講義の目的: 古来、物理学と数学は互いに手を携えて発展してきました。両者にはそれぞれ固有の文化がありますが、相互の理解はもちろん、可能です。この講義では数学科の高年次程度の数学の予備知識をもった方を対象に、数学者の理解しやすい形で、物理学の概要を講義します。**物理学に関する予備知識は仮定しません。**

講義概要: 物理学の主要なテーマ（相対論、量子力学、統計力学など）を 3 回程度の読み切りの形で講義します。それぞれのテーマの理解には、本来ならば物理学科での全教程が必要であるので、完全な講義は到底、望めません。そこでこの講義では、皆さんの数学的知識を前提にして、それぞれのテーマの骨子（数学的構造）をわかりやすく呈示することを主目的とします。また可能な限り、「なぜそのような理論体系になったのか」の背景説明をも加えるように努力します。

講義の暫定的計画: 以下の各テーマのそれぞれを 1～3 回程度で講義します（括弧内は講義回数の目安；既に以下の計画では講義回数が多すぎるので、どっかを削らないといけないのですが...）

1. 力学（1 回）と解析力学（1 回）
 2. 特殊相対論と電磁気学（3 回程度）
 3. 一般相対性理論（2 回程度）
 4. 量子力学（3～4 回）
 5. 熱力学と統計力学（3～4 回）
- 番外編. 科学とは何か？科学的手法とは？（1 回）

授業の具体的な進め方は、ある程度は受講者のレベルや志向をにらみつつ決定して行くので、変更もあり得ます。大体は上の順番で行くつもりですが、所々、変わるかもしれません。その日に何をするかは、その早朝までに、この講義の web page で公開する予定です。

履修条件: どうしても、という訳ではないが、学部 2、3 年程度の数学の基礎知識があれば非常に良い。物理学についての基礎知識は一切、要求しない（必要に応じて講義中に呈示する）。

評価方法・基準: この講義は試験には適さないと考えられるため、適宜出題するレポートを中心に評価する。

履修者への要望: 自然現象の記述には、数学が驚くほど有効です。数学と物理学が共に手を取り合って発展してきたことを考えに入れても、僕にはその有効性は驚異としか思えません。皆さんはこれまでの 3 年半、主に数学を学んできましたが、それだけで卒業してしまうのは余りに惜しい。今までに学んだ数学の知識を生かし、数学の良き相棒である物理学の姿をある程度知ってもらえたら幸いです。

教科書：指定しない。

参考書：適宜，講義中に紹介する。また，この講義の web page でも公開する予定

(<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/08/butsuri.html>)。現在のお薦めは以下の通り。これらは特に「数学者向け」に書かれたものではないが，正直，「数学者向け」のお得な勉強法などは存在しない。この講義を聴いた先は，ご自身でこれらの本にアタックして頂きたい。(もちろん，僕に質問に来てくれればいくらでも答えます。

- 「バークレー物理学コース」(丸善，全5巻)。大学1年生でも読めるレベルの物理の入門コースであるが，著者は研究者としても優秀な物理学者ばかりなので，決して馬鹿にならない。特に1巻「力学」2巻「電磁気学」はその明快さから強く薦められる。第2巻の日本語訳は訳そのものが力作なので，その意味でもお薦め。
- 「Feynman Lectures on Physics」(Addison-Wesley, 3 volumes)。これもすばらしい。ファインマンはやはり天才だったのだと思わされる本。物理のほぼ全分野にわたり，彼独特の鋭い切り口が堪能できる。正直，大学1年が読むには大変だが，数学科の4年なら十分に読めるだろう。特に vol.3 (Quantum Mechanics) は圧巻。なお，日本語訳では全5巻になっているが，原書で読むことを強く薦める。
- 「ランダウ・リフシッツ理論物理学教程」(主に東京書籍，一卷だけ岩波)。学部上級生から大学院生向けのほぼ完璧な物理学教程。以前は物理学科生のバイブルとまで呼ばれていたが，いくつか絶版になっているのは哀しい。ただあまりにも網羅的で事典みたいなのところもあり，無条件で薦められない巻もあると僕は思っている。いずれにせよ，「力学」と「場の古典論」は強くお薦めである。
- 「ランダウ・リフシッツ理論物理学小教程」の『力学・場の理論』(ちくま学芸文庫)。上の「ランダウ・リフシッツ理論物理学教程」のなかの「力学」と「場の古典論」をより簡明にまとめた本。内容が精選されているだけ，より良くなっているともいえる。
- 岩波講座「現代物理学の基礎」1977年版。日本語の本も挙げておきましょう。30年前のシリーズだけあって重厚です。(特に3，4巻が良いと思います)。

お断り：これまでの僕の講義では，かなり詳しい「講義ノート」を配ってきました。しかし，この講義に限っては，そのような余裕はないと思われます(タイプする時間があるなら，講義内容の吟味を行いたい)。ご存じの通り非常な悪筆なので，皆様にはご不便をおかけすると思いますが，お許しいただければ幸いです。

数学特論 18（数学者のための物理学概論） 現時点でのレポート問題まとめ

2 回目くらいの時に宣言した通り，この講義のレポートは適宜，出題します．講義終了の頃に期限を決めてレポートを回収し，その結果を元にして成績をつけます．レポートの問題には易しいのも難しいものもあるから，各人の興味と能力に合わせてやってください．（* がついてるのは，少し難しいもので，単位の必要条件とはしません．でもいくつかはやってほしいなあ．）この「問題まとめ」は適宜，更新して行く予定です．（このバージョンは 2008.11.10 作成）

変分法と最小作用の原理

問 2-1： 球面上の 2 点を結ぶ最小の長さの曲線を，変分法を用いて求めよ．

問 2-2*： 第 2 回に説明した通り，「最小作用の原理」とはいうものの，これは正確には「作用が停留値をとる」意味であった．（少なくとも，停留値の条件だけで運動方程式は出る．）実際の力学のモデル（簡単どころでは単振動，粒子の運動など）の中で，作用が最小ではなく，停留値（または最大値）をとるものはあるか？あるならば例を与えよ．

特殊相対性理論

問 3-1： ローレンツ変換の式は講義で説明した通りだが，これを用いて，「時間の遅れ」と「長さの縮み」を出してみよ．具体的には，以下のような状況を考えれば良い．

授業ですっと考えてきたように，二つの慣性系 F と F' を考える．2 つの慣性系の座標軸は平行で，かつ F' は， F の x -軸の正の方向に速度 V で運動している．このとき，

(1) F' -系での時間間隔 T は F -系からはどのくらいの時間間隔に見えるか？

(2) F' -系で静止している長さ L の物差し（物差しは x -軸に平行におく）は F -系からはどう見えるか？

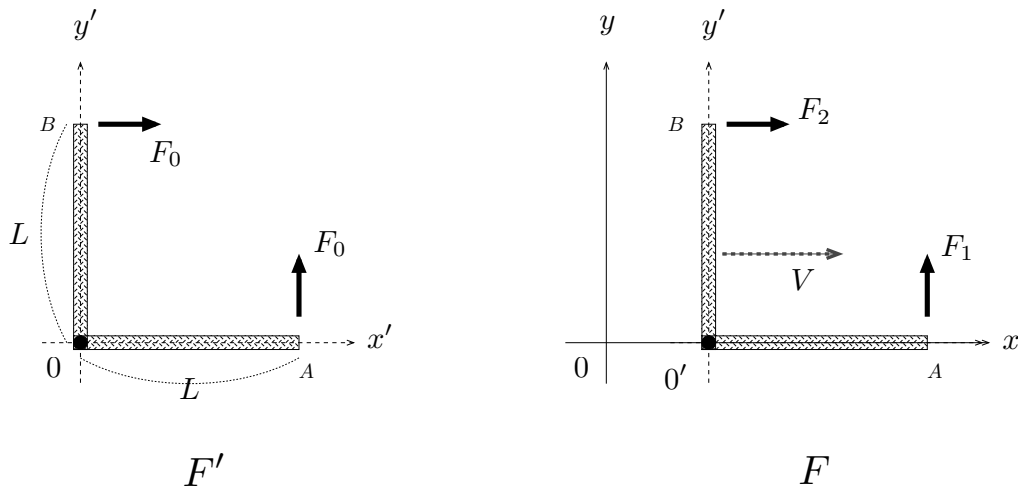
のそれぞれを考えよ．(1) はほとんど講義でやった．(2) は時間切れになったところなので（ F -系での長さを求めるには， F -系での「同時刻」で測ることが肝要），理解を深めるためにもやってほしい．

問題は裏に続く

問 4-1*： 以下は、相対論の学習においてはなかなか有名な「パラドックス」の一つである。この問題はある種、「引っかけ」のように思われるかもしれないが、我々の見逃しやすい一面を照らし出してくれる。

「パラドックス」の内容

これまでと同じように、二つの慣性系 F と F' を考える。2つの慣性系の座標軸は平行で、かつ F' は、 F の x -軸の正の方向に速度 V で運動している。(下図を参照；左図は F' -系の様子、右図はそれを F -系から見たつもり。)



L字型の剛体が、2本の腕（それぞれ長さ L ）が x', y' -軸に平行になるように置かれている（上の左図参照）。この剛体は頂点のところが F' -系の原点に固定されており、この点を中心に自由に x', y' 平面内で回転できるようになっている。さらに上の左図で見るように、剛体の端 A と B においては、(剛体の静止している) F' -系から見て大きさ F_0 の力が $+y', +x'$ -方向にそれぞれかかっている。

この剛体の力の釣合を考えよう。まず F' -系から見ると、 z' -軸の回りの力のモーメントは $LF_0 - LF_0 = 0$ であって、力は釣り合っている。よって剛体は回転したりしないであろう。

ところが、これを F -系から見ると、上の右図のように見える。 F -系で見える力の大きさはもはや F_0 ではなく（皆さんが求めるべき） F_1, F_2 になっている。ローレンツ収縮 と 力の変換則 を考えに入れると、この F -系から見た剛体の受ける力の z -軸回りのモーメントは

$$\frac{L}{\gamma} \frac{F_0}{\gamma} - LF_0 = -\beta^2 LF_0 \quad \left(\beta = V/c, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (1)$$

となって、ゼロではない。これは変である： F -系から見ると、剛体は回転しているのだろうか？

パラドックスの内容終わり

以上が「パラドックス」の内容である。以下の問に答えよ。

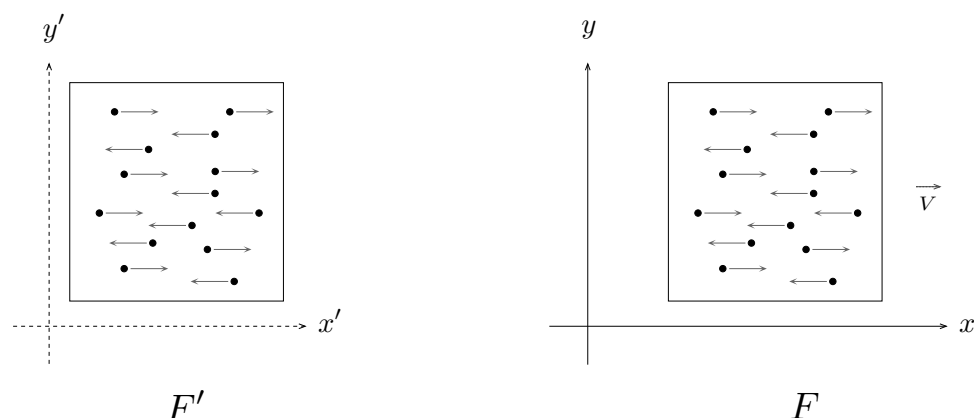
(1) 上の (1) 式を導出せよ。

(2) 一つの慣性系から見て回転していない（力が釣り合っている）ものが他の慣性系から見て回転している（回転させるような力が働いている）とはどう考えても変である。上の議論のどこがおかしいのか、考察して（おかしいところがあるなら）記述せよ。

(注意) 相対性理論と「剛体」は相性が悪い。と言うより、剛体があれば相互作用が瞬時に伝わるので、光速度不変の原理に反するから、剛体は存在し得ないのである。となると上の問題で「剛体」を仮定しているのはおかしい、ということになるが、ここは正確には「剛体ではないけど、実質的には剛体とみなしてよいほどの非常に固い物体」と解釈して頂ければ良い。

問 4-2*： $E = mc^2$ の理解を深めるための問題。気体分子の熱運動によって、気体を入れた箱の質量が増えることを実際に計算して確かめよう。具体的には以下のような状況を考える。例によって、慣性系 F と F' を考え、 F' は F の x -軸方向に速度 V で進んでいるものとする（ただし今回は、速度 V は大変に小さいとする）。

まず、 F' -系で、一辺 L の箱（容器）を用意する。簡単のため、この箱の質量は無視できるとしよう。この箱に N 個の気体分子（気体分子の質量は m ）を閉じ込める。簡単のため、気体分子は x -軸の方向にのみ、 $\pm u$ の大きさで往復運動をするものと仮定する。さらに簡単のため、いつでも N 個の粒子の半数が右向き、半数が左向きに動いているものとしておく。（本当は「この容器の中の気体分子は温度 T に相当する熱運動をしている」としたいのだが、あまり複雑にしても意味がないので、このように簡単にした。）この箱の質量が気体の分子運動のために、どのように変化しているかを考えたい——言うまでもなく、気体分子が運動していなければ、箱の質量は Nm である。



そこで、この箱を F -系から観察してみよう。 F -系から見れば、この箱は全体として速度 V ($0 < V \ll 1$) で x -軸の方に進んでいる。

(1) この箱の持っている運動量 P を求めよ。

(2) 速度 V の物体が持っている運動量は（少なくとも低速では） V に比例するが、その比例定数を物体の「質量」と高校の物理では呼んだのだった。そこで、

$$P \approx MV$$

と書いたときの、この箱の質量 M を求めよ。 M はその中の気体原子の速さ u に、どのように依存しているか？特に、 $E = Mc^2$ はこの場合、成り立っているか？

（ヒント） F' -系で見た箱の中の粒子は $\pm u$ で動いているが、これは F 系から見れば、「速度の合成則」に従って合成した速度で動いているはずだ。この速度を求め、相対論的運動量の表式を用いれば、 P は求まる。

（進んだ問題）

この問題では簡単のために運動量と速度の比例定数として質量をもとめたが、本来、(慣性) 質量とは $F = m\alpha$ の式における、「力」と「加速度」の比例定数として定義するのが自然である。そこで上の問題も本来ならば、「気体分子の詰まった箱を力 F で押したときに箱が得る加速度はいくらか？」または同じことであるが「上の箱を加速度 α で加速しようとするとき、どのくらいの力を加える必要があるか？」を問うて、力と加速度の比例定数として質量を定義すべきだ。余力のある人は、こちらの方も考えてもらいたい。

（さらに進んだ問題）

上では気体分子の持つ運動エネルギーのみを考えた。しかし $E = mc^2$ の E には、他の種類のエネルギーも入るのだろうか？たとえば、上の「分子」がバネでつながって振動している場合、バネの持つポテンシャルエネルギーは箱の質量に寄与するだろうか？これはかなり難しいが、意欲のある人は考えてみよう。

量子力学 量子力学の問題は、えてして計算が大変になることが多い。対象が常識から離れた物だけに、仕方ない面もあると思うが、困ったものだ。以下では、典型的な量子力学系の例を挙げてみた。これらは典型的な問題なので、量子力学の教科書には必ず載っていると思われる。

問 7-1: 1次元の粒子（数学的には実数軸上を動く粒子）を考え、粒子の座標を x で表そう。この粒子がポテンシャル $V(x)$ の中を動いているとすると、この粒子の満たすべき定常状態（エネルギー E ）の Schrödinger 方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

である。典型的なばあいについて、可能な定常状態を求めてみよう。なお、このような1次元の問題では、 $\psi(x)$ の x による微分は $\psi'(x)$ によって表す。

まずこの問いでは井戸型ポテンシャルの場合を考える。井戸型ポテンシャルとは $L > 0$ と $V_0 > 0$ を定数として、

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (|x| > L) \\ -V_0 & (|x| \leq L) \end{cases}$$

で表されるポテンシャルのことである。

(i) $x = \pm L$ で $\psi(x)$ の満たすべき条件は、「 $\psi(x)$ および $\psi'(x)$ が $x = L$ および $x = -L$ でそれぞれ連続である」ことを示せ。

(ii) 上の $x = \pm L$ での接続条件を用いて上の Schrödinger 方程式を解くことにより、 $E < 0$ であるような可能なエネルギー固有値、およびそのときの固有函数 $\psi(x)$ を求めよ。（ここで固有函数というのは、 $L^2(\mathbb{R})$ の元、つまり $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx < \infty$ となるような函数のことである。）ただし、この問いの答えを陽に書き下すのは不可能かもしれない。その場合は、 V_0 の大きさに応じて、どれだけの $E < 0$ の固有値が存在するかを求めれば良い。また、固有値も、「このグラフとこのグラフの交点」などと表せば良い。

（ヒント）固有函数は x の偶関数または奇関数のどちらかになることは、もとの方程式が $x = 0$ に関する反転に関して対称であることからすぐにわかる。この事実を利用すると、固有値問題は少しは解きやすくなる。

問 7-2: 上の問題は陽に解ききれないという意味で不満が残る。ので、今度は完全に解ける問題をやってみよう。上と同じく、1次元の Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

を考えるが、今度はポテンシャルとして ($k > 0$ は定数)

$$V(x) = \frac{k}{2} x^2$$

の場合を考える。これはバネ定数 k のバネでつながれた質量 m の粒子の運動（調和振動子）の問題。

(i) 問 7-1 と同じく、この固有値問題の解を求めよ。すなわち、上の Schrödinger 方程式を満たす二乗可積分な函数 $\psi(x)$ とそのときの固有値 E を求めよ。（以下のヒントを参照）

(ii)* 余力のある人は、上で求めた固有函数 $\psi(x)$ の全体が $L^2(\mathbb{R})$ の完全系をなすことを示せ。（講義では完全系などは全く触れる余裕がなかったので、この小問は函数解析の知識がある程度ある人向けです。）

（ヒント）この問いはまともにぶつかるはず、解けないと思われる。以下に2つのやり方を示す。

（方法1）微分方程式の級数解を用いる方法。この方法はかなり汎用性が高いが、その分、計算は大変だ。記述を簡単にするため、 x などを適当に変数変換したとして、固有値問題

$$-\psi''(x) + x^2 \psi(x) = \lambda \psi(x)$$

を解くことを考える（後で問題にあうように変数変換しなおすこと）。多少天下りではあるが、(a を未知定数、 $\varphi(x)$ を未知函数として) 変数変換

$$\psi(x) = e^{ax^2} \varphi(x)$$

を行ってみると、 $a = \pm \frac{1}{2}$ の時のみ、 x^2 のでてくる項が消える。そこで $a = -\frac{1}{2}$ を採用して

$$\psi(x) = e^{-x^2/2} \varphi(x)$$

という変数変換を考え、 $\varphi(x)$ の満たすべき方程式を求めよ。

次に、 $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ のように、 $\varphi(x)$ が x のべき級数に展開できるものとして、上で得られた方程式に代入し、係数 a_k の満たすべき漸化式を求めよ。

この漸化式をよく見ると、 λ が特別の値をとらない限り、 $\psi(x)$ が可積分にならないことがわかるはずだ。この「特別の値」が固有値である。

(方法2) 演算子(作用素)をうまく定義して、代数的に解く方法もある。こちらは計算は楽だが、そのような方法を思いつくのは容易ではない。

$\hat{x}, \hat{p}$ を、それぞれ位置の演算子、運動量の演算子とする。Schrödinger 方程式は

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad \hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{k}{2}\hat{x}^2$$

の形に書けている。ここで、 α, β を複素定数として新しい演算子

$$\hat{a} = \alpha\hat{x} + \beta\hat{p}$$

を考え、定数 α, β を、以下がなりたつように定めよ。(一意に定まらない場合は、問題が一番解きやすいように決めればよい。 α, β の片方を実数、片方を純虚数にとると良いだろう。)

- $\hat{a}$ とそのエルミート共軛 $\hat{a}^\dagger$ は交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]_- = 1$ を満たす。
- ハミルトニアン $\hat{H}$ が $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を用いて $\hat{H} = \gamma\hat{a}^\dagger\hat{a} + \delta$ (γ, δ は実定数) と書ける。

上のように定めた $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ を用いて、 $\hat{H}$ の固有値と固有状態を求めよ。

問 7-3: スピンの話。スピンについては全く触れる余裕がなかったので、無理に少しだけ触れておく。問題そのものは簡単な一年生の線型代数なので、すぐにできると思う。

物理的背景を説明する余裕はとてもないので、数学的な定義から入ると、「スピン $\frac{1}{2}$ の粒子」の「スピン演算子」とは、2成分縦ベクトルの空間 $\mathbb{C}^2$ に作用する、以下の3つの行列のことである：

$$\hat{s}_x := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{s}_y := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{s}_z := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

おおざっぱにいうと、上の行列 $\hat{s}_x$ はスピンの x 成分を、 $\hat{s}_y$ はスピンの y 成分を、 $\hat{s}_z$ はスピンの z 成分を、それぞれ表している。

(i) $\hat{s}_z$ の固有ベクトル(2成分の縦ベクトル)と固有値を求めよ。固有ベクトルは規格化した形で求めること。この固有ベクトルは、無理に解釈すると、「スピンの z 方向を向いている状態」である。固有値が正の固有ベクトルを $|+z\rangle$ 、固有値が負の固有ベクトルを $|-z\rangle$ 、と書くことにしよう。

(ii) 同じく、 $\hat{s}_x$ の固有ベクトル(2成分の縦ベクトル)と固有値を求めよ。固有ベクトルは規格化した形で求めること。固有値が正の固有ベクトルを $|+x\rangle$ 、固有値が負の固有ベクトルを $|-x\rangle$ 、と書くことにしよう。

(iii) 上で求めた $|+x\rangle$ を、 $|+z\rangle$ と $|-z\rangle$ の線型結合で表せ。また、 $|-x\rangle$ を、 $|+z\rangle$ と $|-z\rangle$ の線型結合で表せ。(この結果の解釈： $+z$ 方向に向いている状態と、 $-z$ 方向に向いている状態をうまく重ね合わせると、 $+x$ 方向に向いた状態になる。また、別の係数で重ね合わせると、 $-x$ 方向に向いた状態になる。)

統計力学

問 9-1: 非常に簡単な問題で, microcanonical 分布 と canonical 分布を計算してみよう. いま, N 個の「スピン」を考える. (スピンというとなんか難しそうだが, 単なる「もの」で, 以下のような性質を持つものと思えば良い.) スピンは 2 個の状態 a, b を取り, それぞれの状態のエネルギーは 0 と 1 だとする. i 番目のスピンの持っているエネルギーを e_i と書く.

(1) この N 個のスピンの系が温度 T の熱浴と接している場合を考えて, スピン一個あたりのエネルギーの期待値, つまり $E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i$ と書いた場合の $\bar{E} := \langle E \rangle$ を求めよ (canonical 分布で計算せよ).

(2) 平均エネルギーの揺らぎを計算せよ. つまり, $\langle (E - \bar{E})^2 \rangle$ を計算せよ. この量がゼロになるのは, どんな極限か?

(3) N 個のスピンのもつ全エネルギーが Nf であるとき (f は $e_0 < f < e_1$ を満たす定数) の microcanonical 分布を考える. このとき, 温度に相当するものはなにかを計算し, その結果を (1) と比べよ. (1) では温度を与えて平均エネルギーを計算した. ここでは平均エネルギーを与えて, 温度を計算している. この 2 つの結果は一致するか? (どんな極限, どんな状況で一致するか?)

以下は講義ノートの補足である.

一般相対論に関する覚え書き (単に数式の羅列)

- ギリシャ文字は 0, 1, 2, 3 の値をとる添字. ラテン文字は 1, 2, 3 の値をとる添字.

- Einstein の規約は用いる. つまり, ベクトルやテンソルで, 上と下の同じ添字がでて来たら, それについて和をとる. (例)

$$A^\mu B_\mu = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu \quad (2)$$

- 添字の上げ下げは $g_{\mu\nu}$ と $g^{\mu\nu}$ で行う:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (3)$$

- ∂_λ とは $\partial/\partial x^\lambda$ のことである.

- metric tensor $g_{\mu\nu}$:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4)$$

- Cristoffel symbol: (注意: これはテンソルではない)

$$\Gamma_{\rho,\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{g^{\lambda\rho}}{2}(\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) = \frac{g^{\lambda\rho}}{2}\Gamma_{\rho,\mu\nu} \quad (5)$$

- Riemann-Cristoffel tensor:

$$R^\lambda{}_{\rho\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\rho\nu}^\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\mu}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\tau\mu}^\lambda \Gamma_{\rho\nu}^\tau - \Gamma_{\tau\nu}^\lambda \Gamma_{\rho\mu}^\tau \quad (6)$$

- Ricci tensor:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} \quad (7)$$

- scalar curvature:

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\rho} R_{\rho\mu} \quad (8)$$

- Einstein's equation

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \kappa = \frac{8\pi k}{c^4} \quad (9)$$

量子力学の構造

仮説 1 (量子力学の舞台 I. 状態) 系の現在¹は可分な複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の規格化された、つまりノルムが 1 のベクトル (状態ベクトル, または単に状態, state と言う) で与えられる.

仮説 2 (量子力学の舞台 II. 物理量)

- (a) 観測できる物理量 (observable) は $\mathcal{H}$ の上の (自己共軛な) 演算子 (作用素) で与えられる.
 (b) [対応原理・その I] 古典的対応物があると思っている系に対しては, これらの演算子は古典力学での物理量の関係を尊重するように決められる.

仮説 3 (量子力学の舞台 III. 物理量の値 (観測値))

- (a) 状態 $|\psi\rangle$ にある系においては, ある物理量 $\hat{A}$ を観測した観測値は $\hat{A}$ のスペクトル (固有値) の一つになる.
 (b) $\hat{A}$ のスペクトル分解

$$\hat{A} = \int d\hat{P}_A(a) a \quad (10)$$

を用いると, 観測結果が半閉区間 $(a_1, a_2]$ に落ちる確率は

$$\langle \psi, \{ \hat{P}_A(a_2) - \hat{P}_A(a_1) \} \psi \rangle = \left\| \{ \hat{P}_A(a_2) - \hat{P}_A(a_1) \} \psi \right\|^2 \quad (11)$$

で与えられる.

仮説 4 (正準交換関係, CCR) n -自由度の古典系を表すヒルベルト空間はその上¹で「位置の演算子」 $\hat{q}_j$ とその共軛の「運動量の演算子」 $\hat{p}_j$ が**正準交換関係** (Canonical Commutation Relation, CCR)

$$[\hat{q}_j, \hat{p}_k]_- = i\hbar\delta_{j,k} \quad (12)$$

$$[\hat{q}_j, \hat{q}_k]_- = [\hat{p}_j, \hat{p}_k]_- = 0 \quad (13)$$

を満たすよう, 表現できるものである ($j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n$). ここで $\hbar$ は**プランク定数**と呼ばれる定数²で, その値は

$$\hbar \approx 1.0545887 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec}. \quad (14)$$

i は虚数単位で $i\hbar$ は恒等演算子 $\mathbb{1}$ の $i\hbar$ 倍をあらわす. また, $\delta_{j,k}$ はクロネッカーの記号

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

である.

仮説 5 (対応原理)

古典力学から量子力学に移行するには, 古典力学における Poisson 括弧 $\{\cdot, \cdot\}$ を以下のように量子力学的な交換関係 $[\cdot, \cdot]_-$ と読み変えよ (このような交換関係を満たすようにヒルベルト空間とその上の作用素を表現せよ):

$$\{A, B\} \implies \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}]_- \quad (15)$$

¹実は上の形での正準交換関係を $\mathcal{H}$ 全体で要求するのは数学的には不可能である (作用素が本質的に有界でないためにおこる定義域の問題). 数学的な記述は以下参照

²歴史的には $\hbar$ の 2π 倍をプランク定数と呼ぶのが正しいのかも知れない, 現在では両者ともにプランク定数と呼ぶ

仮説 6 (時間発展：Schrödinger picture) (量子力学的な) 系のハミルトニアン $\hat{H}$ と呼ばれる自己共軛な演算子があって、系の状態ベクトルの時間発展は、**Schrödinger の運動方程式** (時刻 t での状態を $|\psi(t)\rangle$ と書く)

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (16)$$

で与えられる。(古典的対応物のある系では $\hat{H}$ は、仮説 2 に従って、その古典力学的ハミルトニアンにおいて座標と運動量をそれぞれ $\hat{q}$, $\hat{p}$ で置き換えたもので与えられると考える.)

仮説 7 (時間発展：Heisenberg picture) 系の時間発展は、(系の状態ベクトルは時間的に不変で、代わりに) 全ての物理量が

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}]_- \quad (17)$$

に従って時間発展すると考えても同じである.

仮説 8 (量子力学の舞台 IV. 観測の公理 II) 状態 $|\psi\rangle$ での $\hat{A}$ の観測を行うと、その結果は $\hat{A}$ のスペクトルのいずれかになるが (仮説 3), その結果、系の状態ベクトルはその際にでた固有値 (a_n としよう) に対応する固有ベクトル ($|\varphi_n\rangle$ としよう) に移る.