期末テスト（7/30）の解答編（線型代数 A, 2007.8.3）

全体的な講評：今回，それほど問題を難しくしたつもりは無かったのですが，大半の人には計算が大変だったようです．そのため，僕が本当に訊きたい核心部分に行く前に沈没してしまった人も出てしまいました．ううむ...

以下，簡単に解説します．かなり急いで書いたので，つまらぬミスプリなどもあると思います（流石にやり方は間違ってないつもりだけど）．おかしいと思ったら，メイルなどで教えてくれるとありがたいです．

問１：

(1) これは答えだけでよいでしょう．積が定義できるのは $BC = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ のみ．

(2) これも中間と同じような問題なので結果だけ．(2a) の形では $x + y - z = 1$ であり，(2b) の形では

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である（s, t は任意）．

(3) 直線の方程式を忘れた人が多かったようですね... この直線は t を任意の実数として

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

と書ける．これが平面の方程式 $x + y - z = 1$ を満たすためには，$t = 2/3$，つまり，交点は $(2/3, 4/3, 1)$．

問２：

(1) （あ）の方は，$3\boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}, 3\boldsymbol{d} - 2\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ なので一次従属だから基底にはなれない．

（い）の方は，一次独立であり，かつ任意のベクトルを線型結合で書けるので，基底である．（上の事実の証明は以下の通り）

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha\boldsymbol{c} + \beta\boldsymbol{d} + \gamma\boldsymbol{e} + \delta\boldsymbol{f}$$

を解くと，

$$\alpha = \frac{2x_1 + x_2 - x_3 - x_4}{2}, \quad \beta = x_1 - x_4, \quad \gamma = \frac{x_2 + x_3 - x_4}{2}, \quad \delta = \frac{-2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4}{2}$$

となる．従って，任意のベクトルを上のように線型結合で書ける．また，ここで $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ とすると $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ となるが，これは $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$ が線型独立であることを意味する．

(2) 上で $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ とすると $\alpha = \gamma = \delta = 1/2, \beta = 0$ を得るから，

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e} + \boldsymbol{f})$$

である．

(3) (1) のところで述べたように，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の線型結合で書ける．よって，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の線型結合というのは，$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の線型結合と言っても同じことだ．つまり，我々が求めるべきは

$$x\boldsymbol{c} + y\boldsymbol{d} = \boldsymbol{y} \qquad \text{つまり} \qquad \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

となる x, y が存在するように，α, β を決めることだ — 要するに，上の連立方程式を解けばよい．始めの２つから $x = y = 1$ が得られ，これから $\alpha = \beta = 1$ が答え，とわかる．

(4) (1) のところで述べたように，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の線型結合で書けるので，基底のメンバーに入れなくても良い．残った $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ は比例しないから，一次独立である．よって，基底は $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle$ である．

問３：問題そのものは中間試験と酷似してますが，計算が少々、大変だったかもしれません．

(a) 条件を満たす x_1, x_2, x_3, x_4 をベクトルの形で書くと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad s, t \text{ は任意}$$

と書ける．つまり，W は右辺に出ている２つのベクトルで張られる．この２つのベクトルは一次独立なので，この２つのベクトルが W の基底をなし，次元は 2.

(b) 更にもう一本加わった連立方程式を解く．この際，一から解くよりも，(a) で求めた解を３本目の式に代入して s と t の間に要請される関係を求めるのが効率的だろう．すると $6s - 5t = 0$ が得られるので，s, t は

$$s = 5u, \quad t = 6u \qquad (u \text{ は任意})$$

と書けることがわかる．これから

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 5u \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6u \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad u \text{ は任意}$$

となる．従って，右辺に出ているベクトルが基底，次元は 1.

(c) これはちょっと意地悪な引っかけ問題．(a) に加えてもう一つ条件が増えたように見えるが，(a) で得られた

$$x_1 = -2(x_3 - x_4), \qquad x_1 = 3(x_3 - x_4)$$

を３番目の条件に入れると，自動的に満たされている．つまり，付け加わったように見える第３の条件は実は前の２つでカバーされており，何ら新しいものが加わってはいない．よってこの問題は (a) と全く同じであって，(a) と全く同じ基底，同じ次元が答えである．

問４：以前のレポート問題と同じような問題だが，ちょっと計算が大変だったかもしれない．まず，本当は確かめるべきこととして，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次独立で $\mathbb{R}^3$ の基底になっていること，がある．これは確かめたものとして進む．

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底になっているから，すべてのベクトルをこの線型結合で書くことができる．そこで，核空間に属するベクトルを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合の形で求めよう．つまり，核空間のベクトルを $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$ と書くと，α, β, γ が

$$f(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$$

を満たすことが必要充分である．この条件は f の線型性から

$$\boldsymbol{0} = f(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}) = \alpha f(\boldsymbol{a}) + \beta f(\boldsymbol{b}) + \gamma f(\boldsymbol{c}) = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \gamma\boldsymbol{z}$$

と書き直せる．これを満たす α, β, γ の条件を求めればよい．

さて，上の条件を成分で書き表すと，

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \qquad 3\alpha - \beta = 0, \qquad 4\alpha + \gamma = 0$$

となり，この解は

$$\beta = 3\alpha, \quad \gamma = -4\alpha \qquad (\alpha \text{ は任意})$$

である．従って，核空間は $\alpha(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c})$ （α は任意）の形のベクトル全体となり，その次元は 1 で，基底の一つは $\langle \boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c} \rangle$ だ．

(2) まず，次元定理から像空間の次元は $3-1=2$ のはずだ．これを念頭に，基底を求めよう．

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底になっているから，f の像空間は $f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}), f(\boldsymbol{c})$ で張られる．つまり，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ で張られる．しかし，像空間の次元は 2 のはずなので，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ から独立な 2 つを選べば基底になるはずである．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ のどの 2 つも明らかに独立（比例しないから）なので，例えば基底として $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$ をとることができる．

（実際，$4\boldsymbol{z}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ なので，次元定理を援用するまでもなく，像空間の次元は 2 とわかる.）

(3) f の階数は像空間の次元に等しい（定義）ので，階数は 2.

(4) これはちょっと計算が大変．$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を $\mathbb{R}^3$ の標準基底とした時，表現行列は $\left[f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)\right]$ で与えられるので，$f(\boldsymbol{e}_i)$ を計算しよう．そのためには，$\boldsymbol{e}_i$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線型結合で書けばよい．計算すると

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \frac{-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}}{2}$$

となるので（ここの計算の例：$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$ に気づけば，これを $\boldsymbol{b}$ から引くと $2\boldsymbol{e}_2$ が作れる．$\boldsymbol{e}_2$ を $\boldsymbol{c}$ にたせば，$\boldsymbol{e}_3$ が作れる），これから

$$f(\boldsymbol{e}_1) = f(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{x}-\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \text{同様に} \quad f(\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \ f(\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

が得られ，表現行列は

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

とわかる．

問 5： これはちょっと難しかったかもしれません．他の問いの計算に忙殺されて，じっくり考えることができなかった人も多かったようです．折角おもしろい問題を，と考えたのですが，不発だったようで，ちょっと失敗でした．

まず，問 4 と同様，f の引数になってる $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ が一次独立であり，従って $\mathbb{R}^3$ の基底であることを確かめておく必要がある．これは確かめたとして，以下に進む．

(1) f のランクが 2 というのは，f の像空間の次元が 2 ということだ．$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底なので f の像空間は $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}), f(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}), f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ で張られる．

さてここで，この 3 つのベクトルが一次独立ならば，像空間の次元は 3 となり，題意を満たさない．また，2 つだけが独立なら題意を満たす．というわけで，題意を満たすには，ベクトル $x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$ が他の 2 つのベクトル $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ の線型結合になっておればよい.（$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ は線型独立なので，このときには確かに像空間の次元は 2 になる.）

そのための必要充分条件は

$$\alpha(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) + \beta(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) = x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$$

となることだ（α, β, x は適当な実数）．これを解くと $\alpha=3, \beta=2, x=5$ となるので，答えは $x=5$.

(2) これはちょっと難しいだろう．g の行き先の 3 つのベクトル $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$ は一次従属だ．実際，$(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) - 2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})$．そこで，もし，$g$ の引数になってる 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}, y\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$

が 一次独立ならば，g の像空間が g の行き先の 3 つのベクトル $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$ で張られることになり，その次元は既に見たように 2．これでは g のランクも 2 で題意を満たさない．

この事態を避けるには，3 つのベクトル $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}, y\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$ が 一次従属 になるしかない．つまり，$y\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$ の線型結合で書けることが必要だ．そのための条件を (1) と同様に書き下して解くと，$y=-2/3$ が得られる．

（注）$y=-2/3$ だけでは g のランクが 3 であることは保証されず．これは必要条件である．でも問題に「g のランクは 3 であるという」と書かれているから，唯一可能な y の値を答えればよい．

(3) 上の 2 問よりこっちの方が簡単みたいですね．$\boldsymbol{z}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$ とおいて，$f(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{c}$ となるように α,β,γ を決めるとよい．この条件は

$$\boldsymbol{c}=f(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c})=\alpha f(\boldsymbol{a})+\beta f(\boldsymbol{b})+\gamma f(\boldsymbol{c})=\alpha(3\boldsymbol{a})+\beta(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+\gamma(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

ということだ．左右両辺の $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の係数を比較すると

$$3\alpha+\beta+\gamma=0, \qquad 2\beta-\gamma=0, \qquad \gamma=1$$

が得られる．これを解いて，最終的な結果は

$$\boldsymbol{z}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

となる．