2007.4.16.

線形代数　(S-1 クラス)

担当：原　隆（数理学研究院）：六本松 3-312 号室，tel: 092-726-4774,　 e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp,
http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html

Office hours: 月曜の午後４時半〜６時半頃，僕のオフィスにて（4/16 は都合により休止）．なお，講義終了後にも質問を受け付けます．

概要：

理学部物理学科の学生さん向けに,「線形代数」を講義する．通年講義なので，１年が終わった時点で（１）「行列」「逆行列」,「行列式」などの計算ができるようになり,（２）「固有値と固有ベクトル」「行列の対角化」も使いこなせる（３）「線形空間」「一次独立」などの重要な概念も理解する，の３点を目標とする．

キーになる概念：行列，逆行列，行列の基本変形，線形空間，線形独立，線形写像,（行列式）,（固有値と固有ベクトル）,（行列の対角化）．括弧の中は主に後期の内容．

内容予定：

（以下は大体の目安です．皆さんの理解の程度などにより，ある程度の変更はあり得ます．）

1. ３次元空間のベクトル，平面や直線の表し方
2. ベクトル（と線形空間)，特に「一次独立」「基底」などの概念
3. 行列の演算
4. 線形写像
5. 連立一次方程式と逆行列の計算

教科書：

- 内田・高木・剣持・浦川「線形代数入門」裳華房

参考書：

- 斉藤正彦「線形代数入門」（東大出版会）．少し難しいだろうが，今でも定番の教科書．物理学科（特に理論を目指す人）にはこのくらいは理解して欲しい．
- Feynman Lectures in Physics, vol. 3 （邦訳は「ファインマン物理学第５巻」）これは量子力学に関する本だが，僕は線形代数の本質をこの本から学んだ．量子力学の数学的構造はほとんど線形代数だから，これは不思議なことではない．

評価方法：

中間試験と期末試験の成績を総合して評価し，ボーダー付近ではレポートの成績も用いる．

- 最終成績は一旦，１００点満点に換算してから，この大学の様式に従ってつける．
- その１００点満点（最終素点）は，以下のように計算する．
  - まず,「中間試験の点」「期末試験の点」をそれぞれ 100 点満点で出す．
  - 次にこの２つを以下の式で「平均」し，一応の総合点を出す：

$$(\text{総合点 } A) = 0.40 \times (\text{中間の点}) + 0.60 \times (\text{期末の点})$$

  - ただし，上の計算式の重みを若干変更する可能性はあることを承知されたい（例えば，総合点 A で，中間と期末の比を 5 : 5 にするなど）．
  - 最終素点は

$$(\text{最終素点}) = \max\{\ (\text{総合点 } A), (\text{期末の点})\ \}$$

  とする．つまり,（総合点 A）と（期末の点）を比べて，良い方をとるのだ．
- 上の「最終素点」をよく見て，必要ならば全体に少し修正（例：全員に下駄をはかせるとか）を加えたものをつくり，これをこの大学の基準と合わせて最終成績を出す．
- 上の出し方では合格基準に少し足りない人は，それまでに出題したレポートがあるなら，その結果も参考にして判断する．

（期末一発逆転を可能にする理由）この講義では（上位 10%の人だけがわかるような）進んだ話題はあまり扱わない．そのため,「できる」人が退屈することも考えられる．そのような人には自主的な学習を奨める意味で,「期末で一発逆転」も可能なようにした．ただし,「期末の一発勝負」がうまくいく人はそれほど多くないだろう（期末試験は中間試験やレポートよりは難しい）から，あくまで自己責任でやってくれ．期末の一発勝負で成績が悪くても，苦情は一切受け付けないからね！（できる人が少ないだろうけどもこの形式をとるのは，僕の美学にこだわっているからである．）

「学習到達度再調査」（？）について：
この大学には「学習到達度再調査」なる変な制度があるらしい．これに変に期待する人がいるかもしれないので，ここではっきり宣言しておこう．

> 「再調査」は行わない可能性が高い．もし行うとしても，その権利を得るのはギリギリで不合格になった人だけで，誰を対象とするかは，こちらの一存で（もちろん，公平に，しかし厳しく）決めさせていただく．また，再調査をしてもダメな人も出現しうる（過去にもたくさん存在した）．

（再調査とは独立に，正規の理由があれば追試験は行うのでご安心を.）
更に付言するならば，再調査をする方が，こちらとしては厳しく点を付けやすい（厳しく採点して，誰を助けるかは再調査できちんと確かめれば良いから）．だから，このようなものには頼らず，期末試験でちゃんと合格できるよう，しっかり学習して下さい．期末試験までなら皆さんの学習を助ける努力は惜しまないつもりで，質問などにも忍耐強く相手することを保証する．
なお，言うまでもないことであるが，いくら進級や卒業がかかっていても，単位の出せないものは出せないことは理解されたい.（いわゆる「泣き落とし」は通用しないばかりか，逆効果であるからそのつもりで.）下の合格基準に述べるように，普通に勉強してれば十分に単位が取れる仕組みにはしてあるから姑息なことは考えないように．

合格（最低）基準:合格のための条件は，講義中に出題する例題（やレポート問題）と同レベルの問題が解けることである．具体的には今学期は大体，以下のようになるだろう（進度の都合で若干の変更があることをご了承願いたい）．

- 一次方程式が解ける．解が不定や不能の場合ももちろん，含む．
- 逆行列が求められる．
- 一次従属，一次従属，基底などの意味がわかり，与えられたベクトルの組が独立か従属か判定できる．
- 線形写像の意味が理解できる；具体的には与えられた写像が線形かどうか判定できる，またその像や核が計算できる．
- （以上は最低基準，最低でなければ）線形空間の概念が理解できている．

特に一言：この講義に出てくるいろいろな概念は，ゆっくり考えればそれほど難しいものではありません．しかし，高校までの数学に対して抽象度が高く，とくに「線形空間」「線形写像」の概念をつかむのにかなり苦しむことも考えられます．決して甘く見ずに，着実に学習することをお奨めします．なお，参考書として掲げた「ファインマン物理学」は案外，役に立つかもしれません．**なお，答えの丸暗記はお奨めしない．遠回りに見えても，どんなに苦しくても，納得するまで考えることが最短の道である．**

この科目に関するルール：世相の移り変わりは激しく，僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました．そのうちのいくつかは良いことですが，悪いこともあります．オヤジだとの批判は覚悟の上で，互いの利益のために，以下のルールを定めます．

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強すること であると確認する．
- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している 他の学生さんへの 最低限のエチケットです．
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける．
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕のホームページも使う —— アドレスは最初に載せた）．「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切，受け付けない．
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う．
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.kyushu-u.ac.jp）ので積極的に利用するように．ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい．

４月１６日：今日は第一回なので簡単なところから．今日のところはそれほど難しくないだろうと思うので，プリントには項目しか書きません．大半は高校の復習ですし，教科書で対応する部分を探すのは難しくはないでしょう．なお，時間の関係でいくつかの項目は来週になる可能性もあります．

1 平面と空間のベクトル

1.1 複素数

複素数の定義と性質を復習．高校での扱いが薄くなったようなので少し丁寧に．

1.2 ベクトル

平面，空間内のベクトルを復習．加法と減法，実数倍（スカラー倍）．

1.3 回転と一次変換

「一次変換」の例として回転を少し

1.4 内積

内積の定義，その意味，成分表示

1.5 外積

外積の定義，その意味，成分表示

1.6 直線の方程式

後々使うので，非常に大事．教科書にはないけど高校でやったよね．

1.7 平面の方程式

後々使うので，非常に大事．高校ではやってないようだから，ていねいにやります．
一般の平面の方程式が

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{1}$$

と書けること，および係数 a, b, c と x_0, y_0, z_0 の意味がわかることが肝要．

４月２３日：今日は平面の方程式など．できればベクトルの一次独立，一次従属に入ります．

第１回レポート問題： あまり進んでいないので，ちょっと面白くないですが，平面に関する簡単な計算問題をだしました．なお，講義でも注意したように，黒板ではベクトルは縦ベクトルの形で書きます．でも，講義ノートではスペースの節約のため横ベクトルの形で書くことも多いので，ご了承ください．

問１： 以下の条件を満たす平面の方程式を求めよ．
(i) 点 $(4, 2, 1)$ を通り，ベクトル $(1, -1, 2)$ に垂直な平面
(ii) 点 $(1, 2, 3)$ を通り，平面 $2x + y - z = 4$ に平行な平面
(iii) ３点 $A(2, 1, 1), B(3, -1, 1), C(4, 1, -1)$ を通る平面

問２： 上の問１の (i) の平面を「パラメーター表示」で表せ．(表し方は一通りとは限らないから，ひとつだけ書けば良い．)

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

４月 27 日（金）17:00 （時刻は 24 時間制）までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

以下，レジュメの続き

教科書への補足：直線と平面のパラメーター（媒介変数）表示
　高校では点 $\boldsymbol{x}_0$ を通って，ベクトル $\boldsymbol{a}$ に平行な直線の方程式を

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a} \qquad (t \text{ は任意の実数}) \tag{2}$$

の形で表したと思う．これは成分で書くと，$\boldsymbol{a} = (a, b, c), \boldsymbol{x} = (x, y, z), \boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ として，

$$x - x_0 = ta, \qquad y - y_0 = tb, \qquad z - z_0 = tc \tag{3}$$

ということだから，(a, b, c がゼロでない場合は)

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t \tag{4}$$

と書ける．t は任意なので最後の $= t$ はあってもなくても同じだ．つまり，この直線の方程式は

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{5}$$

とも書ける．

さて一方，$\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通って $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面の方程式は

$$ax + by + cz = d \tag{6}$$

の形に書かれる．これは

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0 \tag{7}$$

を展開したもので，直線の場合の (5) に相当する式だ．では (2) や (3) に相当する式（パラメーター表示）はないのだろうか？

それを見つけるには，空間内の平面がどのような図形かを考えると良い．平面の向きは（もちろん）その法線ベクトルを与えても決まる．しかしそれ以外に,「平面内に入っている２本のベクトル」を与えても決まる．つまり，その平面と平行な２本のベクトル（ただし，この２本は平行ではない）を $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ とすると，平面内の各点 $\boldsymbol{x}$ は適当なパラメーター s, t を用いて

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \tag{8}$$

と書ける．逆に，このように書ける点はすべてこの平面上にある．という訳で，平面のもう一つの表し方ができた：

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \qquad (s, t \text{ は任意の実数}) \tag{9}$$

ここで $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ は平面と平行な２つのベクトルである（ただし，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ は平行でない）．この表式は精神としては直線の場合の (2) に相当する．

さて，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ はどうして求めるかが気になるだろうが，この一般的表式で適当なものはない．そもそも，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の取り方は無限とおりあるから（黒板で図で説明）奇麗な表式は作りにくい．ここは

- $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{n}$ とは直交していること
- $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ は平面内の２点を結ぶベクトルであること

を使って個々の問題で計算してみるのが良いだろう.（という訳で，レポート問題をやって下され.）

5月7日：今日は線形結合（一次結合）を中心にやります．

第２回レポート問題： 1次結合と1次独立などについての問題です．なお，講義でも注意したように，黒板ではベクトルは縦ベクトルの形で書きます．でも，講義ノートではスペースの節約のため横ベクトルの形で書くことも多いので，ご了承ください．レポート問題は学期を通して番号をつけますので，今日は問３からになります．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問３： ベクトル $\boldsymbol{a}, ..., \boldsymbol{e}$ を

$$\boldsymbol{a} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする．以下のベクトルの組が1次独立か1次従属かを判定せよ．更に，可能ならば，カッコの中のベクトルを他のベクトルの線形結合で表せ．

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の３つのベクトル（$\boldsymbol{a}$）
2. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の３つのベクトル（$\boldsymbol{b}$）
3. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ の４つのベクトル（$\boldsymbol{b}$）

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

5月11日（金）17:00（時刻は24時間制）までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

先週のレポートの略解

問１： ともかくやるだけ．

(i) 法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = (1, -1, 2)$ で点 $\boldsymbol{x}_0 = (4, 2, 1)$ を通るから，平面の方程式は $\boldsymbol{n} \cdots (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ となるはずだ．これを成分で書き下すと

$$(x - x_0) - (y - y_0) + 2(z - z_0) = 0 \qquad \text{つまり} \qquad x - y + 2z = x_0 - y_0 + 2z_0 = 4$$

となる．

(ii) 平面 $2x + y - z = 4$ に平行ということは，法線ベクトルが $(2, 1, -1)$ ということだ．後は (i) と同様に計算して

$$2x + y - z = 1$$

が答え．別解としては答えが $2x + y - z = d$ の形になることを用いて，点 $(1, 2, 3)$ が平面上にあるように $d = 2 \times 2 + 2 - 3 = 1$ と定めてもよい．

(iii) 地道には平面の方程式を $ax + by + cz = d$ の形に仮定して，この平面上に３点が存在する条件，つまり

$$\begin{cases} 2a + b + c = d \\ 3a - b + c = d \\ 4a + b - c = d \end{cases}$$

を解けば良い．答えは一意には決まらないが，

$$a = \frac{2}{7}d, \qquad b = \frac{1}{7}d, \qquad c = \frac{2}{7}d$$

と求まる．$d = 0$ ならすべてゼロになって意味のない結果になるから，$d \neq 0$ を考えると，平面の方程式は

$$\frac{2}{7}dx + \frac{1}{7}dy + \frac{2}{7}dz = d \qquad \text{つまり} \qquad 2x + y + 2z = 7$$

となる．

問 2： ともかく，法線ベクトルに直交する（平行でない）ベクトルを２つ，求めよう．そのために，平面上の３点を適当に求める．題意から $A(4,2,1)$ が平面上にあることはわかっている．これ以外に（例えば $y = 0, z = 1$ の時の z 座標を求めるつもりになって）$B(2,0,1)$ と $C(5,1,0)$ も平面上にある．更にこの時，$\vec{AB} = (-2,-2,0)$ と $\vec{AC} = (1,-1,-1)$ は平行ではない．よって，$\boldsymbol{x}_0 = (4,2,1)$ として

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = s\vec{AB} + t\vec{AC}, \qquad \text{つまり} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s, t \text{ は任意の実数}$$

がパラメータ表示（の一例）である．もちろん，他にもいろいろな表し方はある．これらはすべて，点 A, B, C のいろいろな取り方に対応している．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}$ と書いたときの $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の取り方の例は以下の通り：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

実はこれらはすべて，皆さんのレポートにあったものばかりである（これだけ色々出て来たということは，自力でやった人が一杯いたということですね．大変よろしい．）これらはすべて互いに平行でないから，好きなもの２つを選べば良い．

５月１４日の連絡：特にありません．
今日のキーワード：一次独立，一次従属，基底，(線形空間）

第３回レポート問題： 基底についての問題です．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問４： ３項列ベクトルの組（あ）〜（え）を以下のように定義する．それぞれが $\mathbb{R}^3$ の「基底」になっているか，なっていないか，理由とともに答えよ．

（あ） $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の３本．

（い） $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の２本．

（う） $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ の３本．

（え） $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の４本．

ヒント：「基底」の定義の２つの条件が満たされているか，地道に確かめるのが筋．(ずるい手もないわけではないが，まあここはだまされたと思って地道にやってくれ.）

注意：以下の問５は出題しましたが，講義の進み具合が良くないので今週のレポート課題からは外しました．

問５： ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の成分に対して，以下のように制限を付けて，$\mathbb{R}^3$ の部分集合 W を作る．この W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間になっているかどうかを考えて，部分空間になっていないものについては「なぜ部分空間でないのか」の理由を答えよ．また，部分空間になっているものについては，その基底を一つ，答えよ．

(1) W は $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(2) W は $x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(3) W は $x_1 - (x_3)^2 = 0$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(4) W は x_1 が整数であるような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(5) W は $x_1 = 0$ または $x_2 = 0$ であるような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問 4 に解答し，

5 月 18 日（金）17:00 （時刻は 24 時間制）までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．

上にも書いたように，問５は進度の関係から今週のレポート問題とはしていません．

先週のレポートの略解

問 3：

1. $c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{c} + c_3\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ を成分毎に書くと

$$c_1 + c_3 = 0, \qquad -c_1 + c_2 = 0, \qquad c_2 + c_3 = 0$$

の３本の連立方程式になるが，この解には例えば，$c_1 = c_2 = 1, c_3 = -1$ などがあり,「すべてゼロ」以外の解が存在する．従って一次従属．この場合，上の解から

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$$

となっているので，これを移項して $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}$ と線形結合で書ける．

2. 上と同様に解いてみると，こんどは

$$2c_1 + c_3 = 0, \qquad c_1 + c_2 = 0, \qquad 2c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

を解くことになる．こいつの解は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 以外にはない．従って，$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ は一次独立である．また一次独立なので，$\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の線形結合で書くことは不可能．

3.

$$2c_1 + c_3 + c_4 = 0, \qquad c_1 + c_2 = 0, \qquad 2c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

を解くことになるが，これは $c_2 = c_3 = c_4 = -c_1$ なら何でもよい．のでゼロでない解を持つから，一次従属だ．またこれから

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} - \boldsymbol{d} - \boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} \qquad \text{つまり} \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{e}$$

と線形結合の形で書ける．

(注意)

- ベクトルは太字で書きましょう．実のところ，もっと高度な数学になるとベクトルも普通の字体で書きます．しかし，今のレベルではベクトルとスカラーの区別をちゃんとつける意味で，ベクトルは太字で書きましょう．
- 小問 (2) に関しては，$\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{c} + k_2\boldsymbol{d}$ と書けるかどうか，だけを考えて,「このように書けないから一次従属」とした人が多数いました．これは厳密には間違いです．一次従属の定義（または定理）を思い出してもらえばわかるように，$\boldsymbol{b}$ だけでなく，$\boldsymbol{c} = k_3\boldsymbol{b} + k_4\boldsymbol{d}$，および $\boldsymbol{d} = k_5\boldsymbol{b} + k_6\boldsymbol{c}$ の残り２つも否定して初めて一次従属と言えるのです．ここは間違い易いから注意のこと．

５月２１日の連絡：２〜４週間後に中間テストをする可能性が高いので連絡を聞き漏らさないように．
今日のキーワード：部分空間，次元，(一般の線型空間)

第４回レポート問題：

部分空間についての，先週やり残した問題です．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問５： ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の成分に対して，以下のように制限を付けて，$\mathbb{R}^3$ の部分集合 W を作る．この W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間になっているかどうかを考えて，部分空間になっていないものについては「なぜ部分空間でないのか」の理由を答えよ．また，部分空間になっているものについては，その基底を一つ，答えよ．

(1) W は $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(2) W は $x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(3) W は $x_1 - (x_3)^2 = 0$ を満たすような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(4) W は x_1 が整数であるような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

(5) W は $x_1 = 0$ または $x_2 = 0$ であるような $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ の全体．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問４に解答し，

5 月 25 日（金）17:00 （時刻は 24 時間制）までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．

先週のレポートの略解

問４： ともかくやることは基底の２条件，つまり

a. すべての n 項列ベクトルが，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の一次結合で書ける（「$\mathbb{R}^n$ を生成する」と言う）．
b. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立である．

が成り立つかどうかを確かめることである．何人か，これをやるべきことはわかっていたけども，どうやっていいかわからなかった，人がいました．今日，解説するので理解して下さい．

（あ）$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}$ であるので，この３本は一次独立ではない．従って，条件 b を満たさないので，基底になれない．なお，この場合，条件 a も満たしていないことがわかる．

（い）２本しかないから，多分、ダメだろう．ダメな理由は上の a に抵触するから，だろうね．確かめてみよう．ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線形結合で書くことを考える．つまり，

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{cases} x_1 = c_1 + 2c_2 \\ x_2 = -c_1 + c_2 \\ x_3 = 0 + 2c_2 \end{cases}$$

となるような c_1, c_2 がとれるかどうかだ．これは未知数２つ（c_1, c_2）に対して方程式３つだから，解がないような気はする．実際，やってみると，３番目の式から $c_2 = x_3/2$，これを１番目に入れて $c_1 = x_1 - x_3$ が得られるが，これが更に２番目を満たす必要があるので，これは結局

$$x_2 = -c_1 + c_2 = -x_1 + \frac{3}{2}x_3 \qquad \text{つまり} \qquad 2(x_1 + x_2) = 3x_3$$

となっている時以外では満たされない．つまり，勝手な x_1, x_2, x_3 に対しては上のような c_1, c_2 を見つけることができないので，条件 a は満たされない．従って，基底ではない．

（う）結論から言うと，これは基底である．まず，ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線形結合で書くため

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} + c_3\boldsymbol{c} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{cases} x_1 = c_1 + 2c_2 + c_3 \\ x_2 = 0 + c_2 + c_3 \\ x_3 = c_1 + c_2 + 2c_3 \end{cases}$$

を満たす c_1, c_2, c_3 を求めると，この解は

$$c_1 = \frac{x_1 - 3x_2 + x_3}{2}, \quad c_2 = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{2}, \quad c_3 = \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{2}$$

と存在する（ここで x_1, x_2, x_3 は任意だ）．つまり，条件 a は満たされる．

また，条件 b については，上で $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ とすると，$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となるので，これは一次独立であることを示し，条件 b も満たされる．よって，(う）の組は基底になっている．

（え）４本もあるから，ダメ（一次従属）でしょうね．確かめてみると

$$\boldsymbol{0} = c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} + c_3\boldsymbol{c} + c_4\boldsymbol{d} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{cases} 0 = c_1 + 2c_2 + 0 + c_4 \\ 0 = -c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \\ 0 = 0 + 2c_2 + c_3 + c_4 \end{cases}$$

の解は $c_1 = -c_2 = c_3 = c_4 = a$（$a$ は任意の実数）である．ので，例えば $c_1 = c_3 = c_4 = 1, c_2 = -1$ という解があって，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ は線型従属．よって基底ではない．

（注意）連立方程式の「解が存在しない」ことと「解が一意に決まらない」ことを混同している人が何人かいたようです．特に（え）については，$c_1 \sim c_4$ の解は絶対に存在しますが，一意には決まりません．両者は全く異なる概念ですが，混同し易いので注意して下さい．(講義でも重ねて注意します.）

（注意）連立方程式に関して「未知数の数が方程式の数より多いので解は無数に存在する」とした人が多数いましたが，これは厳密には間違いです．同様に,「未知数の数が方程式の数より少ないので，解は存在しない」とした人もいましたが，これも厳密には間違いです.（共に反例あり）．この事情については今学期の後半で丁寧にやります．

５月２８日の連絡：２週間後，６月１１日に中間試験をします．範囲は大体，教科書の３章まで（ただし，3.3 節の逆行列は簡単に；また 2.7 節の「抽象ベクトル空間」は入りません）.「３章はまだやってないから大変」と思う人もいるでしょうが，３章は簡単だから問題ないはずです．山場は２章です．

第５回レポート問題： 部分空間の基底と次元についての問題です．毎度のことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問６： ベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ の成分に対して，以下のように制限を付けて，$\mathbb{R}^4$ の部分集合 W を作る．それぞれの場合，W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間になっているが，(1) その次元は何か？また，(2) その基底を一つ，答えよ．

(a) W は $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ を満たすようなベクトルの全体．

(b) W は $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ かつ $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$ を満たすようなベクトルの全体．

レポート提出について：

上の問に解答し，

> ６月１日（金）14:00 （いつもと違うよ！時刻は 24 時間制）までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙は A4 を使ってください．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．講義への感想や要望などは随時，受け付け中です．

―――――― 先週のレポートの解答 ――――――

（総評）かなりの人が苦戦していました．問題は解けたけど部分空間がわかった気がしないと言う人と，解いているつもりでいろいろな見落としがある人が散見されました.「解けたけどわかった気がしない」については，ある程度の慣れも必要なので，仕方のない部分もあります．講義の後にもで気楽に雑談に来てくれると，少しは効果があるかもしれません．

(1) 部分空間にはなっている．講義中にも一般論として説明したが，部分空間の条件を３つとも確かめればよい．

後は基底をもとめるのだが，この方程式を解くと，x_2, x_3 を任意の実数として，$x_1 = 2x_3 - x_2$ となる．つまり，すべての解は適当な実数 s, t によって，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける（この２つのベクトルは W を 生成）．この２つのベクトルは（前回までのレポートのように確かめて）一次独立 だから，部分空間の基底を作っている．つまり，基底の例は $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ である．

W が部分空間になっていることは，W が上の２つのベクトルの線形結合の全体に等しいことからもわかる．

もちろん，基底の取り方は一通りではない．以下のベクトルの任意の２つをとってくれば基底である（以下はすべて，皆さんのレポートから拾ったもの）：

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2〜5) 以下のものはすべて，部分空間にはなっていない．以下ではなぜなっていないのかを説明していく．基本は定義にある２つの条件,「$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ ならば $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$」（和）,「$\boldsymbol{x} \in W$ かつ $k \in \mathbb{R}$ ならば $k\boldsymbol{x} \in W$」（スカラー倍）, の両方をチェックするだけだ．

註： 部分空間の定義にはゼロベクトルの存在（$\mathbf{0} \in W$）も入っているが，これは（W が空集合でない限り）残りの２つから導出されるので，残りの２つをチェックすれば十分である．もちろん,「ゼロベクトルが入っていない」ことを確かめて,「だから部分空間ではない」と言っても構わない．実際，(2) はゼロベクトルを要素に持たないことはすぐわかる．

(2) 「和」,「スカラー倍」ともにダメだ．

（反例）$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は W の元であるが，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は W の元でない．また，$3\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ も W の元でない．

(3) 「和」,「スカラー倍」ともにダメだ．

（反例）$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は W の元であるが，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ は W の元でなく，$3\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ も W の元でない（どちらも，$x_1 = (x_3)^2$ が満たされない）．

(4) 「和」の方は O.K. しかし,「スカラー倍」の方がダメである．

（反例）$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ であるが，こいつの 1/2 倍を考えると，$\frac{1}{2}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる．これは第一成分が整数でないから，W の元ではない．

(5) 「スカラー倍」の方は O.K. だが,「和」の方がダメ．

（反例）$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ はともに W の元であるが，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は W の元ではない．

（いくつかの注意）

- 記述が不正確な答案多数．例えば，(4) では $k\boldsymbol{x}$ が W に入らないものがある（入るとは限らない）のだが,「入らない」と断言したり...
- W が部分空間でないことをいうには，部分空間の条件を満たさない例を一つ挙げれば十分．一方，線型空間であることの証明には <u>W のすべての</u> ベクトルについて条件が満たされることをいう必要あり．ここを混同した人がかなりいたようなので，注意！
- 基底を構成するベクトルには零ベクトルは入らないぞ！(なぜ入らないのか，各自で納得しておくこと)．ここを間違った人もかなりいた．
- W が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるとき，W の基底と，$\mathbb{R}^n$ の基底を混同しないこと．注意すべき点は２つある．
  - まず，W の基底を構成するベクトルは，<u>W の要素</u> である必要あり！
  - W の基底は，W のベクトル <u>だけ</u> を，その線形結合として書ければ十分である．W は連立方程式の解として作ることが多いから，W のベクトルの各成分はもはや勝手な値はとれず，何らかの関係式（つまり，もともとの方程式）を満たしていることが多い．この意味で，W の基底が生成すべき空間は $\mathbb{R}^n$ の一部分にすぎず（だから W を部分空間と言うのよ），従って $\mathbb{R}^n$ よりも少ないベクトルで基底が作られる可能性がある．
- 部分集合と部分空間を混同しないこと !! レポート問題の (1)〜(5) の W はすべて $\mathbb{R}^3$ の部分集合ではある．しかし，上で解説したように，(2)〜(5) は部分空間ではない．ついうっかり書いてしまった人もいるだろうが，かなりアヤシイ人も散見されたので...
- (3) ではいつでも $x_1 \geq 0$ だから，スカラー倍で引っかかることはすぐにわかる．
- (4) では k が任意の実数でなければならない，ことを忘れた人が案外，多かった．
- (5) では $x_1 = 0$ または $x_2 = 0$ の条件を読み間違った人が大量にいたぞ．要するに，x_1 か x_2 のどちらかがゼロのベクトルが W の要素であるわけだ．W はあくまでこの片方の条件を満たしている集合の <u>和集合</u> であって,「$x_1 = 0$ の場合，$x_2 = 0$ の場合」と場合分けして良いものではない．

６月４日の連絡：来週，６月１１日に中間試験をします（時間と場所はいつも通り，月曜３限，この教室．範囲は大体，教科書の３章まで（ただし，3.3 節の逆行列は簡単に；また 2.7 節の「抽象ベクトル空間」は入りません）．「３章は駆け足だから大変」と思う人もいるでしょうが，３章は簡単だから問題ないはずです．山場は２章です．
（講義後の補足）講義中にもいいましたが，教科書３章の 3.3 節以降は，ほとんど中間には入りません（入るとしたら 2×2 行列の逆行列のみ）．その理由は，これらの節の内容はほとんど「定義」なので，今テストしてもあまり意味がないから，です．

―――――――――― 先週のレポートの解答 ――――――――――

問６：　（総評）問題では次元と基底を別々に訊いていますが，これは一緒に答えて下さって構わないつもりでした．もし、「次元だけ先に求めないといけない」と思った人がいたら，ごめんなさい．(でもまあ，問題は順番に解く必要は元々ない訳だが...）以下ではまず基底を求めて，それから次元を求めます．

今回はかなりの人ができていましたが，特に (b) の方はわからなかった人もいたようです．一次方程式の解が一意に決まらない場合が苦手のようですが，これはいくつか例をやってみて慣れるのが一番でしょう．

(a) $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ ということは，$x_4 = x_1 + x_2 - x_3$ と同値なので，x_1, x_2, x_3 を任意にとって，x_4 を $x_4 = x_1 + x_2 - x_3$ と決めると必要充分である．「任意」を強調するため，$x_1 = s, x_2 = t, x_3 = u$ と書いてみると，題意を満たすベクトルは

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\ s, t, u \text{ は任意})$$

と書ける．つまり，W は右辺に出ている３つのベクトルで張られている．更に，この３つのベクトルは線型独立だ —— これは第１，第２，第３成分がゼロでないベクトルが一つずつしかないことからすぐにわかる．従って，この３つのベクトルは W の基底になっている．３つのベクトルからなる基底だから，W の次元は 3 である．基底を改めて書くと

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．

もちろん，基底の取り方はいろいろある．(例）以下のなかから３つを選んだら何でも良い．(もっといくらでもあるけど，しんどいからこのくらいで.）

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) 上と同じノリでやれば良いが，連立方程式を解くのにちょっとだけ工夫が必要だ．ともかく，何かの変数を消去してやるとよい．今の場合，２つの式は x_2 の符号が違うだけだから，２つの式を辺々足す，及び引く，ことによって

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

という連立方程式が得られ，これは元の連立方程式と同値である（なぜなら，辺々足し引きすると元のに戻れるから）．さて，この方程式の解はもちろん，x_2 はゼロ，かつ x_1, x_3, x_4 は $x_4 = x_1 - x_3$ なら何でも良い，とわかる．

つまり，W の元は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\ s, t \text{ は任意})$$

と書ける．よって W は右辺の２つのベクトルで張られる．また，この２つのベクトルは線型独立である．よって，この２つのベクトルは W の基底をなしている．次元は 2，基底の例は

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(いくつかの注意)

- 前から気になってたんやけど,「基底」の「底」の感じを間違っている人多し！「定まる」ではなくて「そこ」だよ．
- 基底がきちんと求まったのに「次元は４」とした人が数人いました．次元とは何か，ちゃんと理解しましょう．
- 次元を求める際,「もともと４次元のところに条件が一つ入ったので $4-1=3$ 次元」と書いた人も何人かいました．これは決して間違いではありません．しかし，条件が n こ（$n \geq 2$）になった場合，これらの条件が実質的に n こ分あるのか，それとも実質としては n より少ない条件なのか，はすぐにはわからず．連立方程式を解いてみるしか手がありません．この意味で「元々の次元 - 条件の数」は盲信しない方が無難です．いずれにせよ，一年のこの段階では,「面倒がらずにまず基底を求め，基底を構成するベクトルの数を数えて次元を出す」ようにして下さい．
- 「基底」の定義が怪しい人も何人かいました.「基底」とは解答例のように（通常は）２個以上のベクトルの集まりになってます.「基底の一つ」というのは，基底の取り方はいろいろあるから，そのような基底（つまりベクトルの集まり）を一つ答えよ，という意味です．これを「基底を構成するベクトルの一つを答えよ」と解釈した人がいたようですが，これは言葉の正確な意味からしておかしいです．
- 部分集合と部分空間を混同しないこと !! レポート問題の (1)〜(5) の W はすべて $\mathbb{R}^3$ の部分集合ではある．しかし，上で解説したように，(2)〜(5) は部分空間ではない．ついうっかり書いてしまった人もいるだろうが，かなりアヤシイ人も散見されたので...
- 線型独立でないベクトルを「線型独立」と宣言してしまう人も何人かいました．単に計算が面倒だからさぼったのか...

６月２５日：今日も線型写像，特に像空間・核空間です．
なお，線型写像の引数が丸括弧のベクトルではなかなか見にくいので，角括弧（大括弧）のベクトルを使うことが多いです．丸括弧でも角括弧でも同じことですから，ご了承ください．

第６回レポート問題： 線型写像についての問題です．毎度のことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問７： 写像 f が以下の性質を満たしている．それぞれの場合について，f が 線型写像ではあり得ない ものを挙げ，その理由（なぜ線型写像でないか）を説明せよ．

(a) f は実数から実数への写像で，$f(1) = 2, f(3) = 4$

(b) f は２項縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^2$ から実数 $\mathbb{R}$ への写像で，$f\Bigl(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\Bigr) = 1$ かつ $f\Bigl(\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\Bigr) = 2$

(c) f は３項縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^3$ から実数 $\mathbb{R}$ への写像で，$f\Bigl(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\Bigr) = 1$ かつ $f\Bigl(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Bigr) = 2$ かつ $f\Bigl(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\Bigr) = 3$

(d) f は３項縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^3$ から実数 $\mathbb{R}$ への写像で，$f\Bigl(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\Bigr) = 1$ かつ $f\Bigl(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\Bigr) = 2$ かつ $f\Bigl(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\Bigr) = 4$

問８： $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ が線型写像であり，

$$f\Bigl(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\Bigr) = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \qquad \text{かつ} \qquad f\Bigl(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\Bigr) = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \qquad \text{かつ} \qquad f\Bigl(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\Bigr) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

であるという．このとき，$f\Bigl(\begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix}\Bigr)$ を求めよ．

問９： 行列 A を $A = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\2&2&2\end{bmatrix}$ と定義する．さらに $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に $A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を対応させる写像として，線型写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を定義する（ここで $A\boldsymbol{x}$ は行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積である）．この f の像空間と核空間をそれぞれ求めよ．具体的には（１）像空間の次元と基底，（２）核空間の次元と基底，をそれぞれ求めるとよい．

レポート提出について：

上の問に解答し，

6 月 29 日（金）14:00 までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙は A4 を使ってください．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．講義への感想や要望（番外問題）などは随時，受け付け中です．

７月２日：今日も線型写像，特に階数（rank）です．
前回にも書きましたが，線型写像の引数が丸括弧のベクトルではなかなか見にくいので，角括弧（大括弧）のベクトルを使うことが多いです．丸括弧でも角括弧でも同じことですから，ご了承ください．
前回に予約した通り，７月１１日（水曜）の３限に補講を行います．内容は進度と相談して，来週に予告します．

第７回レポート問題： 線型写像についての問題です．毎度のことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．特に問 10 の類題はいくつかやってもらいたいところですが，採点がしんどいので 1 問だけにしてしまいました...

問 10： $X = \mathbb{R}^3$ から $Y = \mathbb{R}^3$ への線型写像 f が以下を満たしているという．

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad \text{かつ} \quad f\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$

このとき，

(1) f の核空間と像空間をそれぞれ求めよ（集合の形で書け）．
(2) f の核空間と像空間の次元と基底を求めよ．
(3) f の階数を求めよ．
(4) 標準基底に関する f の表現行列を求めよ．

以上の問題は 1,2,3,4 の順番にやる必要はなく，どんな順序で答えてもよい．

問 11*： （おまけの問題）上の問 10 の状況で，X と Y の基底として

$$E = \left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle, \qquad E' = \left\langle \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} \right\rangle$$

を採用した場合，この基底に関する f の表現行列を求めよ．

レポート提出について：

上の問 10 に解答し，(あまり進まなかったので問 11 はできる人だけ)

７月６日（金）14:00 までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙は A4 を使ってください．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法（ゼムクリップは不可）で綴じてくだされ．講義への感想や要望（番外問題）などは随時，受け付け中です．

——————————先週のレポートの解答——————————

問 7： 大体，よくできていました．結論から言うと，線型写像ではあり得ないものは (a) と (d) です．一方，(b) と (c) はこれだけの条件では線型写像の条件を全く破っていないので，線型写像である可能性が十分にあります．(本当に (b) や (c) が線型写像であるかどうかを判断するには，問題に与えた以外のベクトルに対する行き先をすべて見る必要があります；これは問題の条件だけではできません．)

(a) が線型写像だとすると $f(3) = 3f(1) = 3 \times 2 = 6$ のはずだが，これは $f(3) = 4$ と与えられたことに矛盾する．

(d) が線型写像だとすると $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = 1 + 2 = 3$ のはずなのに，問題では $f\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = 4$ となっていて，これは矛盾である．

問 8： 問題に与えられた最初の３つのベクトルの線型結合で４つ目のベクトルを表すのが良いでしょう．

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となるような a, b, c を求めると，

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であることがわかる．従って

$$f\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - 3f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

である．

問 9： 定義通りやるだけではある．具体的に写像を書いてみると

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \text{の行き先は} \qquad A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ 2y \\ 2x+2y+2z \end{bmatrix}$$

となっている．

核空間は上の右辺が零ベクトルになるような $\boldsymbol{x}$ の全体だ．具体的には x, y, z が連立方程式

$$x + z = 0, \qquad 2y = 0 \qquad 2x + 2y + 2z = 0$$

を満たすような $\boldsymbol{x}$ の全体である．この連立方程式は３つの式からなるが，３番目の式は１番目と２番目からすぐにでる．従って，これははじめの２つ，つまり

$$x + z = 0, \qquad y = 0$$

と同値であり，要するに，$y = 0$ かつ $z = -x$（x は任意）というわけ．従って，

$$Ker\ f = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x \text{ は任意} \right\} \text{ であり，その基底の一つは } \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ で，次元は } 1$$

像空間の方は

$$\begin{bmatrix} x+z \\ 2y \\ 2x+2y+2z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = (x+z) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の全体が作る空間である．これは右辺に出ている２つのベクトルで張られており，またこの２つのベクトルは線形独立である．従って

$$Im\ f = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; s, t \text{ は任意} \right\} \text{ である．その基底の一つは } \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ で，次元は } 2$$

７月９日：前回までで線型写像の基本的なところは終わりました．今日は線型写像に絡めて，連立方程式を考えます．

これまでの予約通り，７月１１日（水曜）の３限に補講を行います．場所は 431 （４号館３階）です．内容は大半が通常の講義（教科書の５章の一部）になりそうです．(秋学期にあまり急ぎたくないので，少しでも進んでおきたい．ご了承ください．）量子力学との関連については，秋学期に固有値などをやってからやる予定．

- 期末試験は教務課の掲示通りに行います．
- 範囲は教科書で言えば１章から４章ですが，内容に軽重はあります．特に：
  - ２章の内容，一次独立，一次従属，部分空間，基底，次元（抽象ベクトル空間は入らない）
  - ４章の内容，線型写像，像空間，核空間，階数

  などは非常に大事です．もちろん，１章，３章の内容も少しは（または上の題材と絡めて）出るでしょう．
- ５章の内容でこれからやるところ（行列の基本変形）を理解しておくと，連立方程式を解く場合などに助かるかもしれません．また，５章の内容に見えるけど既に４章までの知識で解けることはもちろん，訊くかもしれません．

学習到達度再調査は多分，やらないと思います（中間の出来もかなり良かったから必要ないでしょう）．最終的には期末試験の当日までに実施するかどうかを決めますが，期待しないでください．(期末までしっかり勉強しろ，ということね.）

―――――――――-先週のレポートの解答 ―――――――――

問 10： ともかく定義に従ってやって行きます．

いちいちたてベクトルを書くのは大変なので，

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_2=2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}_3=3\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} \tag{1}$$

とおく．問題の f は

$$f(\boldsymbol{a}_1)=\boldsymbol{b}_1,\qquad f(\boldsymbol{a}_2)=\boldsymbol{b}_2,\qquad f(\boldsymbol{a}_3)=\boldsymbol{b}_3 \tag{2}$$

を満たしている．

まず，事前に $\langle \boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3\rangle$ は一次独立であり，３本からなっているので，$\mathbb{R}^3$ の基底をなしていることに注意しておこう．これはつまり，$\mathbb{R}^3$ の任意の元をこの３つのベクトルの線型結合で書けることを意味するので，これを用いて任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ に対して $f(\boldsymbol{x})$ が計算できることになる．具体的に書くと，

$$\boldsymbol{x}=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3 \tag{3}$$

ならば

$$f(\boldsymbol{x})=f(c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3)=c_1f(\boldsymbol{a}_1)+c_2f(\boldsymbol{a}_2)+c_3f(\boldsymbol{a}_3)=c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+c_3\boldsymbol{b}_3 \tag{4}$$

となるはずなのだ．

また，$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ も一次独立かどうかを見ておこう．これは

$$c_1\boldsymbol{b}_1+c_2\boldsymbol{b}_2+c_3\boldsymbol{b}_3=\boldsymbol{0} \tag{5}$$

を解けばわかる．この解は

$$c_1=-6c_3,\quad c_2=\frac{9}{2}c_3\quad (c_3 \text{ は任意}) \tag{6}$$

となって，一次独立ではない．特に

$$12\boldsymbol{b}_1=9\boldsymbol{b}_2+2\boldsymbol{b}_3 \tag{7}$$

が成り立つことに注意しておく．以下ではこれらの事実をふんだんに用いる．

<u>像空間</u> からやる．上で見たように，任意の $\boldsymbol{x}$ に対する $f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ の線型結合で書ける．ので，像空間はこの３つのベクトルで張られる空間だ．この３つのベクトルは一次独立ではなく，(7) の関係を満たしている（また，$\boldsymbol{b}_2$ と $\boldsymbol{b}_3$ は明らかに一次独立である）．従って像空間の基底は $\langle\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\rangle$，その次元は 2 であって，

$$\mathrm{Im}\, f=\left\{x\boldsymbol{b}_2+y\boldsymbol{b}_3 \,\middle|\, x \text{ と } y \text{ は任意のスカラー}\right\} \tag{8}$$

となる．

核空間 をやろう．これは表現行列を求めてから出す方法もある．けども，あえて今の段階でやってみる．核空間というのは，$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となるような $\boldsymbol{x}$ の全体だ．(3) と (4) を思い出すと，

$$c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + c_3\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{0} \tag{9}$$

となるような c_1, c_2, c_3 を求めた場合，$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3$ の全体が Ker f なのである．ところが (9) は (5) と全く同じでその解は (6) で与えられている．よって核空間とは（$c_3/2$ を c にした）

$$\text{Ker } f = \left\{ c(-12\boldsymbol{a}_1 + 9\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3) \,\middle|\, c \text{ は任意のスカラー} \right\} \tag{10}$$

とわかる．$\boldsymbol{d} = -12\boldsymbol{a}_1 + 9\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3$ とおくと，この空間の基底は $\langle \boldsymbol{d} \rangle$，次元は 1 である．具体的に計算すると，

$$\boldsymbol{d} = -12\boldsymbol{a}_1 + 9\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -10 \\ -3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

となっている．

f の階数 は像空間の次元そのものだから，2 です．(別の問題にする必要もなかったけど，階数をちゃんと理解してもらいたかったので，問題にしました.)

さて最後に 表現行列 ですが... 先週までの講義結果によると，$\boldsymbol{e}_j$ を基本ベクトルとして

$$A = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & f(\boldsymbol{e}_3) \end{bmatrix} \tag{11}$$

が表現行列のはず．そこで，標準基底 $\boldsymbol{e}_j$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の線型結合として表し，(3) と (4) を用いれば，計算できるはずだ．

これはまあ，地道にやるしかない（逆行列を使えば少しは見通しが良くなるけど）．$\boldsymbol{e}_1$ なら

$$x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_1 \qquad \text{つまり} \qquad \begin{bmatrix} x+z \\ x+y \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

を解けば良い．がんばってやると，

$$x = z = 1/2,\ y = -1/2, \qquad \text{つまり} \qquad \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) \tag{13}$$

がわかる．同様に計算すると

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3), \qquad \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3) \tag{14}$$

もわかる．そこで (4) を用いると，

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}_1 - 2\boldsymbol{b}_2 + 3\boldsymbol{b}_3) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{e}_2) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{e}_3) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{15}$$

となる．よって，表現行列は

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 11 & -11 & 7 \\ 7 & -5 & 5 \end{bmatrix} \tag{16}$$

と求められる．なお，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}$ の全体を求めると Ker f がわかるが，これはもちろん，上で求めたものに一致する．

- 核空間の次元が 1 と正しく求まったのに，また像空間を張る 3 つのベクトルも求めたのに，像空間の次元を 3 とした人が多数いました．そのほとんどは 3 つのベクトルが一次独立だと（誤って）判断したためです．しかし，$\dim(X) = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f)$ を思い出せば，像空間の次元が 3 で核空間の次元が 1 というのはあり得ません！