2007.4.16.

線形代数　（S-1 クラス）

担当：原　隆（数理学研究院）：六本松 3-312 号室，tel: 092-726-4774,　 e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp,
http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html

Office hours: 月曜の午後４時半〜６時半頃，僕のオフィスにて（4/16 は都合により休止）．なお，講義終了後にも質問を受け付けます．

概要：

理学部物理学科の学生さん向けに,「線形代数」を講義する．通年講義なので，１年が終わった時点で（１）「行列」「逆行列」,「行列式」などの計算ができるようになり,（２）「固有値と固有ベクトル」「行列の対角化」も使いこなせる（３）「線形空間」「一次独立」などの重要な概念も理解する，の３点を目標とする．

キーになる概念：行列，逆行列，行列の基本変形，線形空間，線形独立，線形写像,（行列式）,（固有値と固有ベクトル）,（行列の対角化）．括弧の中は主に後期の内容．

内容予定：

（以下は大体の目安です．皆さんの理解の程度などにより，ある程度の変更はあり得ます.）

1. ３次元空間のベクトル，平面や直線の表し方
2. ベクトル（と線形空間），特に「一次独立」「基底」などの概念
3. 行列の演算
4. 線形写像
5. 連立一次方程式と逆行列の計算

教科書：

- 内田・高木・剣持・浦川「線形代数入門」裳華房

参考書：

- 斉藤正彦「線形代数入門」（東大出版会）．少し難しいだろうが，今でも定番の教科書．物理学科（特に理論を目指す人）にはこのくらいは理解して欲しい．
- Feynman Lectures in Physics, vol. 3 （邦訳は「ファインマン物理学第５巻」）これは量子力学に関する本だが，僕は線形代数の本質をこの本から学んだ．量子力学の数学的構造はほとんど線形代数だから，これは不思議なことではない．

評価方法：

中間試験と期末試験の成績を総合して評価し，ボーダー付近ではレポートの成績も用いる．

- 最終成績は一旦，１００点満点に換算してから，この大学の様式に従ってつける．
- その１００点満点（最終素点）は，以下のように計算する．
  - まず,「中間試験の点」「期末試験の点」をそれぞれ 100 点満点で出す．
  - 次にこの２つを以下の式で「平均」し，一応の総合点を出す：

$$(\text{総合点 }A) = 0.40 \times (\text{中間の点}) + 0.60 \times (\text{期末の点})$$

  - ただし，上の計算式の重みを若干変更する可能性はあることを承知されたい（例えば，総合点 A で，中間と期末の比を 5 : 5 にするなど）．
  - 最終素点は

$$(\text{最終素点}) = \max\{\,(\text{総合点 }A), (\text{期末の点})\,\}$$

  とする．つまり,（総合点 A）と（期末の点）を比べて，良い方をとるのだ．
- 上の「最終素点」をよく見て，必要ならば全体に少し修正（例：全員に下駄をはかせるとか）を加えたものをつくり，これをこの大学の基準と合わせて最終成績を出す．
- 上の出し方では合格基準に少し足りない人は，それまでに出題したレポートがあるなら，その結果も参考にして判断する．

（期末一発逆転を可能にする理由）この講義では（上位 10%の人だけがわかるような）進んだ話題はあまり扱わない．そのため,「できる」人が退屈することも考えられる．そのような人には自主的な学習を奨める意味で,「期末で一発逆転」も可能なようにした．ただし,「期末の一発勝負」がうまくいく人はそれほど多くないだろう（期末試験は中間試験やレポートよりは難しい）から，あくまで自己責任でやってくれ．期末の一発勝負で成績が悪くても，苦情は一切受け付けないからね！（できる人が少ないだろうけどもこの形式をとるのは，僕の美学にこだわっているからである.）

「学習到達度再調査」（？）について：
　この大学には「学習到達度再調査」なる変な制度があるらしい．これに変に期待する人がいるかもしれないので，ここではっきり宣言しておこう．

> 「再調査」は行わない可能性が高い．もし行うとしても，その権利を得るのはギリギリで不合格になった人だけで，誰を対象とするかは，こちらの一存で（もちろん，公平に，しかし厳しく）決めさせていただく．また，再調査をしてもダメな人も出現しうる（過去にもたくさん存在した）．

（再調査とは独立に，正規の理由があれば追試験は行うのでご安心を.）
　更に付言するならば，再調査をする方が，こちらとしては厳しく点を付けやすい（厳しく採点して，誰を助けるかは再調査できちんと確かめれば良いから）．だから，このようなものには頼らず，期末試験でちゃんと合格できるよう，しっかり学習して下さい．期末試験までなら皆さんの学習を助ける努力は惜しまないつもりで，質問などにも忍耐強く相手することを保証する．
　なお，言うまでもないことであるが，いくら進級や卒業がかかっていても，単位の出せないものは出せないことは理解されたい.（いわゆる「泣き落とし」は通用しないばかりか，逆効果であるからそのつもりで.）下の合格基準に述べるように，普通に勉強してれば十分に単位が取れる仕組みにはしてあるから姑息なことは考えないように.

合格（最低）基準:合格のための条件は，講義中に出題する例題（やレポート問題）と同レベルの問題が解けることである．具体的には今学期は大体，以下のようになるだろう（進度の都合で若干の変更があることをご了承願いたい）.

- 一次方程式が解ける．解が不定や不能の場合ももちろん，含む.
- 逆行列が求められる.
- 一次従属，一次従属，基底などの意味がわかり，与えられたベクトルの組が独立か従属か判定できる.
- 線形写像の意味が理解できる；具体的には与えられた写像が線形かどうか判定できる，またその像や核が計算できる.
- （以上は最低基準，最低でなければ）線形空間の概念が理解できている.

特に一言：この講義に出てくるいろいろな概念は，ゆっくり考えればそれほど難しいものではありません．しかし，高校までの数学に対して抽象度が高く，とくに「線形空間」「線形写像」の概念をつかむのにかなり苦しむことも考えられます．決して甘く見ずに，着実に学習することをお奨めします．なお，参考書として掲げた「ファインマン物理学」は案外，役に立つかもしれません．**なお，答えの丸暗記はお奨めしない．遠回りに見えても，どんなに苦しくても，納得するまで考えることが最短の道である.**

この科目に関するルール：

世相の移り変わりは激しく，僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました．そのうちのいくつかは良いことですが，悪いこともあります．オヤジだとの批判は覚悟の上で，互いの利益のために，以下のルールを定めます.

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強すること であると確認する.
- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している 他の学生さんへの 最低限のエチケットです.
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける.
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕のホームページも使う —— アドレスは最初に載せた）.「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切，受け付けない.
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う.
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.kyushu-u.ac.jp）ので積極的に利用するように．ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい.

４月１６日：今日は第一回なので簡単なところから．今日のところはそれほど難しくないだろうと思うので，プリントには項目しか書きません．大半は高校の復習ですし，教科書で対応する部分を探すのは難しくはないでしょう．なお，時間の関係でいくつかの項目は来週になる可能性もあります．

1 平面と空間のベクトル

1.1 複素数

複素数の定義と性質を復習．高校での扱いが薄くなったようなので少し丁寧に．

1.2 ベクトル

平面，空間内のベクトルを復習．加法と減法，実数倍（スカラー倍）．

1.3 回転と一次変換

「一次変換」の例として回転を少し

1.4 内積

内積の定義，その意味，成分表示

1.5 外積

外積の定義，その意味，成分表示

1.6 直線の方程式

後々使うので，非常に大事．教科書にはないけど高校でやったよね．

1.7 平面の方程式

後々使うので，非常に大事．高校ではやってないようだから，ていねいにやります．
一般の平面の方程式が

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{1.7.1}$$

と書けること，および係数 a, b, c と x_0, y_0, z_0 の意味がわかることが肝要．

４月２３日：今日は平面の方程式など．できればベクトルの一次独立，一次従属に入ります．

第１回レポート問題：あまり進んでいないので，ちょっと面白くないですが，平面に関する簡単な計算問題をだしました．なお，講義でも注意したように，黒板ではベクトルは縦ベクトルの形で書きます．でも，講義ノートではスペースの節約のため横ベクトルの形で書くことも多いので，ご了承ください．

問１： 以下の条件を満たす平面の方程式を求めよ．
(i) 点 $(4, 2, 1)$ を通り，ベクトル $(1, -1, 2)$ に垂直な平面
(ii) 点 $(1, 2, 3)$ を通り，平面 $2x + y - z = 4$ に平行な平面
(iii) ３点 $A(2, 1, 1), B(3, -1, 1), C(4, 1, -1)$ を通る平面

問２： 上の問１の (i) の平面を「パラメーター表示」で表せ．(表し方は一通りとは限らないから，ひとつだけ書けば良い．)

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

４月 27 日（金）17:00 （時刻は 24 時間制）までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

以下，レジュメの続き

教科書への補足：直線と平面のパラメーター（媒介変数）表示

高校では点 $\boldsymbol{x}_0$ を通って，ベクトル $\boldsymbol{a}$ に平行な直線の方程式を

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a} \qquad (t \text{ は任意の実数}) \tag{1.7.2}$$

の形で表したと思う．これは成分で書くと，$\boldsymbol{a} = (a, b, c), \boldsymbol{x} = (x, y, z), \boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ として，

$$x - x_0 = ta, \qquad y - y_0 = tb, \qquad z - z_0 = tc \tag{1.7.3}$$

ということだから，(a, b, c がゼロでない場合は)

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t \tag{1.7.4}$$

と書ける．t は任意なので最後の $= t$ はあってもなくても同じだ．つまり，この直線の方程式は

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{1.7.5}$$

とも書ける．

さて一方，$\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を通って $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面の方程式は

$$ax + by + cz = d \tag{1.7.6}$$

の形に書かれる．これは

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0 \tag{1.7.7}$$

を展開したもので，直線の場合の (1.7.5) に相当する式だ．では (1.7.2) や (1.7.3) に相当する式（パラメーター表示）はないのだろうか？

それを見つけるには，空間内の平面がどのような図形かを考えると良い．平面の向きは（もちろん）その法線ベクトルを与えても決まる．しかしそれ以外に,「平面内に入っている２本のベクトル」を与えても決まる．つまり，その平面と平行な２本のベクトル（ただし，この２本は平行ではない）を $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ とすると，平面内の各点 $\boldsymbol{x}$ は適当なパラメーター s, t を用いて

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \tag{1.7.8}$$

と書ける．逆に，このように書ける点はすべてこの平面上にある．という訳で，平面のもう一つの表し方ができた：

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q} \qquad (s, t \text{ は任意の実数}) \tag{1.7.9}$$

ここで $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ は平面と平行な２つのベクトルである（ただし，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ は平行でない）．この表式は精神としては直線の場合の (1.7.2) に相当する．

さて，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ はどうして求めるかが気になるだろうが，この一般的表式で適当なものはない．そもそも，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の取り方は無限とおりあるから（黒板で図で説明）奇麗な表式は作りにくい．ここは

- $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{n}$ とは直交していること
- $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ は平面内の２点を結ぶベクトルであること

を使って個々の問題で計算してみるのが良いだろう.（という訳で，レポート問題をやって下され.）

５月７日：今日は線形結合（一次結合）を中心にやります.

第２回レポート問題： １次結合と１次独立などについての問題です．なお，講義でも注意したように，黒板ではベクトルは縦ベクトルの形で書きます．でも，講義ノートではスペースの節約のため横ベクトルの形で書くことも多いので，ご了承ください．レポート問題は学期を通して番号をつけますので，今日は問３からになります．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください.

問３： ベクトル $\boldsymbol{a}, ..., \boldsymbol{e}$ を

$$\boldsymbol{a} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする．以下のベクトルの組が１次独立か１次従属かを判定せよ．更に，可能ならば，カッコの中のベクトルを他のベクトルの線形結合で表せ.

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の３つのベクトル（$\boldsymbol{a}$）
2. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の３つのベクトル（$\boldsymbol{b}$）
3. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ の４つのベクトル（$\boldsymbol{b}$）

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります.

レポート提出について：

上の問に解答し，

５月 11 日（金）17:00 （時刻は 24 時間制）までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ.

――――― 先週のレポートの略解 ―――――

問１： ともかくやるだけ.

(i) 法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = (1, -1, 2)$ で点 $\boldsymbol{x}_0 = (4, 2, 1)$ を通るから，平面の方程式は $\boldsymbol{n} \cdots (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = 0$ となるはずだ．これを成分で書き下すと

$$(x - x_0) - (y - y_0) + 2(z - z_0) = 0 \qquad \text{つまり} \qquad x - y + 2z = x_0 - y_0 + 2z_0 = 4$$

となる.

(ii) 平面 $2x + y - z = 4$ に平行ということは，法線ベクトルが $(2, 1, -1)$ ということだ．後は (i) と同様に計算して

$$2x + y - z = 1$$

が答え．別解としては答えが $2x + y - z = d$ の形になることを用いて，点 $(1, 2, 3)$ が平面上にあるように $d = 2 \times 2 + 2 - 3 = 1$ と定めてもよい.

(iii) 地道には平面の方程式を $ax + by + cz = d$ の形に仮定して，この平面上に３点が存在する条件，つまり

$$\begin{cases} 2a + b + c = d \\ 3a - b + c = d \\ 4a + b - c = d \end{cases}$$

を解けば良い．答えは一意には決まらないが，

$$a = \frac{2}{7}d, \qquad b = \frac{1}{7}d, \qquad c = \frac{2}{7}d$$

と求まる．$d = 0$ ならすべてゼロになって意味のない結果になるから，$d \neq 0$ を考えると，平面の方程式は

$$\frac{2}{7}d\,x + \frac{1}{7}d\,y + \frac{2}{7}d\,z = d \qquad \text{つまり} \qquad 2x + y + 2z = 7$$

となる．

問 2： ともかく，法線ベクトルに直交する（平行でない）ベクトルを 2 つ，求めよう．そのために，平面上の 3 点を適当に求める．題意から $A(4,2,1)$ が平面上にあることはわかっている．これ以外に（例えば $y = 0, z = 1$ の時の z 座標を求めるつもりになって）$B(2,0,1)$ と $C(5,1,0)$ も平面上にある．更にこの時，$\vec{AB} = (-2,-2,0)$ と $\vec{AC} = (1,-1,-1)$ は平行ではない．よって，$\boldsymbol{x}_0 = (4,2,1)$ として

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 = s\vec{AB} + t\vec{AC}, \qquad \text{つまり} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s, t \text{ は任意の実数}$$

がパラメータ表示（の一例）である．もちろん，他にもいろいろな表し方はある．これらはすべて，点 A, B, C のいろいろな取り方に対応している．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{p} + t\boldsymbol{q}$ と書いたときの $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ の取り方の例は以下の通り：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

実はこれらはすべて，皆さんのレポートにあったものばかりである（これだけ色々出て来たということは，自力でやった人が一杯いたということですね．大変よろしい．）これらはすべて互いに平行でないから，好きなもの 2 つを選べば良い．