

3 ベクトル解析の基礎

今まで、重積分、線積分、面積分をやってきた。これらはそれ自身でも閉じた話題であるが、(皆さんが既に電磁気の講義などで知っているように) ベクトル自身の性質と関連づけると、面白いものが見えてくる。

特に、強調したいのは以下の3点である。

- 与えられたベクトル場がどのようなものか、それを的確に表す3つの概念 (gradient, divergence, rotation) を理解する。
- 「ガウスの定理」「ストークスの定理」などによって、特定の面積分や線積分を別の形の積分 (重積分や面積分など) で書き直せることを理解する。
- (少しおまけ) このことから、物理法則などを「積分形」と「微分形」のどちらでも書けることを理解する。

この節では空間全体で定義されたスカラー値の関数をスカラー場、ベクトル値の関数をベクトル場と呼ぶ。ベクトル $\mathbf{A}$ の成分は $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ のように、添え字 x, y, z で表す。

(のっけからおまけ; 興味のある人のみ, 読んでくれればよい) スカラー, ベクトルという用語について

今までは「スカラー」「ベクトル」という言葉を、故意に定義せずに使ってきた。強いて言えば、「一成分からなる量」がスカラーで、「多成分からなる量」がベクトル、と言ってきた。正直のところ、これは全く不完全な定義である。本当のスカラー、ベクトルの定義は、これらの量の座標変換に際しての変換性に基づくべきである。ただし、ここでいう座標変換とは今までの「デカルト座標から曲線座標へ」といったものではなく、いろいろな運動をしている観測者同士の関係を表すものである (力学で出てきた「実験室系」と「回転座標系」などの話。ただし、回転座標系については以下の話はそのままでは適用できない。)

以下では d -次元の空間での話をし、新旧の座標は、原点を共有するデカルト座標だとする⁴。この場合、座標変換は $x'_i = \sum_{j=1}^d R_{ij} x_j$ と書かれる (R_{ij} は $d \times d$ の行列 R の ij 成分)。

ある量 $\phi(\mathbf{r})$ があって、別の座標系から見てもその値が不変のとき、 ϕ はスカラーだという。もちろん、別の座標系に移る場合、空間内の同じ点 (その座標の値は新旧の座標系で異なるだろうが) での ϕ の値を比べる必要がある。

一方、 d -次元空間内で d -成分の量 $(A_1, A_2, \dots, A_d)$ があり、それが座標変換に際していわゆるベクトルの変換則に従う場合、それをベクトルという。ここで「ベクトル型」の変換則とは、新しい座標での成分が $A'_i = \sum_{j=1}^d R_{ij} A_j$ と、座標の場合と同じ行列 (R) をかけることで得られることを言う。このように R がかかる理由は、ベクトルが「向き」を持っていて、(本当はベクトルの向きは不変なのだが) 座標系が変わった為に、新しい座標ではその向きが変わったように見えるからである。以上の説明が、我々が「力はベクトルである」「電場はベクトルである」という直感と同じであることは各自納得して欲しい。

このような変換則を拡張して、 B_{ij} ($1 \leq i, j \leq d$) という d^2 個の成分を持った量で、その変換則が $B'_{ij} = \sum_{k,l=1}^d R_{ik} R_{jl} B_{kl}$ に従うものを考えることもできる。これは2階のテンソルと呼ばれる。同様に、添え字が3つついたもの、4つついたもの、を考えて行くこともできる (3階、4階のテンソル) と呼ばれる。(ベクトル、テンソルについては微分幾何的な「正しい」説明をすべきだろうが、それはもちろん、この講義の範囲を超えている。)

(更に補足; 以下、この小節の最後までは読み飛ばして良い。)

なお、このような「座標変換に際しての変換則」は物理学上は非常に重要な概念である。というのは、ガリレイ (またはアインシュタイン) の相対性原理を認めると、物理法則は座標変換 (ガリレイ変換、またはローレンツ変換) に関して不変な形に書けるはずであり、物理の基礎法則 (基礎方程式) はガリレイ変換やローレンツ変換に関して不変 (正確には共変) な形である必要が出てくるからである。この事は基礎法則に現れる物理量に非常に厳しい制限を加える。結果だけを述べると、基礎方程式に現れることができるのは、上のスカラー、ベクトル、テンソル、(と上では説明しなかったスピノル) しかないことがわかる。この辺りの事情は「特殊相対性理論、一般相対性理論、ローレンツ群の表現論」などを勉強すると良くわかるだろう。

3.1 gradient, divergence, rotation (定義のみ)

まず、ベクトル場やスカラー場を的確に特徴づける、3つの概念を導入しよう。

⁴このような制限はニュートン力学を考えていることにほぼ等しい。特殊相対性理論、一般相対性理論ではもっと広範囲の座標変換を考えることになる

以下、空間の座標は $\mathbf{r}$ で表す。

定義 3.1.1 (gradient, divergence, rotation のええ加減な定義) ここでの (x, y, z) は通常のデカルト座標とする。スカラー場 $\phi(x, y, z)$ が与えられたとき、これから定義されるベクトル

$$\mathbf{grad} \phi(x, y, z) \equiv \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (3.1.1)$$

を ϕ の gradient (勾配) という。また、ベクトル場 $\mathbf{A}$ が与えられたとき、これから定義されるスカラー

$$\mathbf{div} \mathbf{A}(x, y, z) \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (3.1.2)$$

を、 $\mathbf{A}$ の divergence (発散) という。また、 $\mathbf{A}$ から定義されるベクトル

$$\mathbf{rot} \mathbf{A}(x, y, z) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (3.1.3)$$

を $\mathbf{A}$ の rotation または curl (回転) という。

この定義がなぜ「ええ加減」かというと、上の定義は一般の曲線座標では正しくないからである。gradient, divergence などの概念は、本来、座標系に依らないものなので、特定の座標でだけ正しいような定義は困るのだ。「本当」の定義は、これらの定義の意味を考える次節以下で行う。

なお、初めから「正しい」定義を与えない理由は、「正しい」定義をきちんとやるのはちょっと面倒で、かつ「正しい」定義をみたまものが実際にあるのかどうか、すぐにはわからない面があるからだ。(上のデカルト座標の定義なら、微分ができる限りは存在するでしょ?)

記号についての補足

上で定義した諸量は、「ベクトルの形をした微分演算子」

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.1.4)$$

を定義すると、形式的には

$$\mathbf{grad} \phi = \nabla \phi, \quad \mathbf{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.1.5)$$

と書ける。これらは ∇ が3成分のベクトルだと思って、普通にベクトルの演算 — 内積をとったり、外積をとったり — をする、という意味。これはなかなか便利ではあるし、何がベクトルで何がスカラーかを明示してくれるので、使うこともあるだろう。ただし、この記法はデカルト座標系では正しいが、曲線座標系に移ると種々の誤解の種になることは注意しておいて欲しい。

3.2 gradient, potential と線積分

Gradient の意味と「正しい」定義

Gradient の持つ意味は、以下の性質から理解できる。今、スカラー場 ϕ の 方向微分 を考えよう。3次元空間内の単位ベクトル $\mathbf{t}$ を一つ固定したとき、極限

$$D_{\mathbf{t}}\phi \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{r} + h\mathbf{t}) - \phi(\mathbf{r})}{h} \quad (3.2.1)$$

が存在するなら、これを ϕ の $\mathbf{t}$ 方向の方向微分係数という。この量は、その名前の通り、 $\mathbf{t}$ の方向での変化率を表している。この方向微分の一般的な記号は存在しないが、ここでは $\mathbf{t}$ の方向であることを強調するため、 $D_{\mathbf{t}}\phi$ と書くことにした。

方向微分と gradient の関係は以下の命題で与えられる。

命題 3.2.1 (方向微分と gradient)

$$D_{\mathbf{t}}\phi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{r} + h\mathbf{t}) - \phi(\mathbf{r})}{h} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{grad} \phi \quad (3.2.2)$$

が成り立つ。つまり、 $\mathbf{t}$ 方向の方向微分係数は、 $\nabla\phi = \mathbf{grad} \phi$ と $\mathbf{t}$ との内積をとることで得られる。

証明：

方向微分をとるベクトル $\mathbf{t}$ の各成分を t_x, t_y, t_z と書くと、方向微分の定義に現れたニュートン商の分子は、

$$\phi(\mathbf{r} + h\mathbf{t}) - \phi(\mathbf{r}) = \phi(x + ht_x, y + ht_y, z + ht_z) - \phi(x, y, z) \approx \frac{\partial\phi}{\partial x}ht_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}ht_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}ht_z \quad (3.2.3)$$

となっているが、これは $\mathbf{grad} \phi$ と $h\mathbf{t}$ との内積に他ならない。従って、 h で割ると

$$D_{\mathbf{t}}\phi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{r} + h\mathbf{t}) - \phi(\mathbf{r})}{h} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{grad} \phi \quad (3.2.4)$$

が得られる。つまり、(3.2.2) が証明された。□

また、 $\mathbf{t}$ をいろいろな方向に向けた場合、方向微分係数の値が一番大きくなるのは $\mathbf{t}$ が $\mathbf{grad} \phi$ の向きを向いた場合であることが、この表式 (3.2.2) からわかる。これを逆手にとって、 $\mathbf{grad} \phi$ の定義とすることができる。すなわち、

定義 3.2.2 (Gradient の「正しい」定義) $\mathbf{grad} \phi$ とは、以下の 2 つの性質を持ったベクトルと定義することもできる。

- その向きは、方向微分 $D_{\mathbf{t}}\phi$ の値が一番大きくなる $\mathbf{t}$ の向きで、
- その大きさは、方向微分 $D_{\mathbf{t}}\phi$ の最大値である。

この定義なら、座標系の取り方には依らないから、「正しい」定義といえる。

証明：

このような性質をもつベクトルがたった一つ、存在することを示せばよい。しかしこれは (3.2.2) からすぐに出る——(3.2.2) に現れている $\mathbf{grad} \phi$ とは、(3.1.1) の定義によるものである。□

保存力と線積分

力の場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が、あるスカラー関数 $\phi(\mathbf{r})$ から

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad} \phi(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (3.2.5)$$

と書けるとき、 $\mathbf{F}$ は保存力であるという。また、 ϕ を力 $\mathbf{F}$ のポテンシャルという。(保存「力」と言ってはいるが、実際に「力」である必要はない。) 保存力の線積分について考えてみよう。

定理 3.2.3 (保存力の線積分) ポテンシャル ϕ から導かれる力 $\mathbf{F}$ に対しては、任意の曲線 C に関する線積分が

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \phi(\text{始点}) - \phi(\text{終点}) \quad (3.2.6)$$

をみたす。ここで $\phi(\text{始点})$ と $\phi(\text{終点})$ は、それぞれ、曲線 C の始点と終点における ϕ の値を表す。

証明：

計算してみれば、出る。曲線 C のパラメーター表示を $\mathbf{r}(t)$ としよう ($0 \leq t \leq 1$)。 $\mathbf{F} = -\mathbf{grad} \phi$ であることを考えに入ると、線積分は

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_0^1 \mathbf{grad} \phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad (3.2.7)$$

と表される。ところが、連鎖率を使って計算すると (いつもどおり $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と書いた)

$$\frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t)) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \mathbf{grad}\phi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}' \quad (3.2.8)$$

なのである。つまり、上の積分の右辺は

$$-\int_0^1 \mathbf{grad}\phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = -\int_0^1 \frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t)) dt = -\left[\phi(\mathbf{r}(t))\right]_0^1 = -\phi(\text{終点}) + \phi(\text{始点}) \quad (3.2.9)$$

となる。 □

註： 当然、どのような力の場合は保存力か？との疑問が湧くが、その答えは rotation をよく調べてから与えられる。

3.3 Divergence と Gauss の定理

Divergence の持つ意味について、まずは考える。今、3次元空間内に非常に微小な立方体をとろう。立方体の一つの頂点は (x_0, y_0, z_0) 、対角にある頂点を $(x_0 + \Delta, y_0 + \Delta, z_0 + \Delta)$ とし (一辺の長さは Δ)、立方体の表面を S で表す。空間全体でベクトル場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が定義されているものとして、面積分 $\int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r})$ を考える。(法線ベクトルの向きは、この立方体から外に向く向きにとる。)

この面積分は、一般の立方体 S については簡単には計算できない。しかし、立方体が非常に小さく、ベクトル場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が $\mathbf{r}$ にゆっくりとしか依存していない場合は、以下のように近似計算することができる。

立方体には6つの面があるので、まずは x -軸に垂直な、2つの面から考える。 $x = x_0$ の面の法線ベクトルは $(-1, 0, 0)$ 、 $x = x_0 + \Delta x$ の面の法線ベクトルは $(1, 0, 0)$ であるから、これらの面からの面積分への寄与は近似的に

$$\left(F_x(x_0 + \Delta, y_0, z_0) - F_x(x_0, y_0, z_0)\right) \Delta^2 \approx \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta \times \Delta^2 = \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta^3 \quad (3.3.1)$$

である⁵。同様に、 y -軸に垂直な面からの面積分への寄与は

$$\left(F_y(x_0, y_0 + \Delta, z_0) - F_y(x_0, y_0, z_0)\right) \Delta^2 \approx \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta^3, \quad (3.3.2)$$

z -軸に垂直な面からの寄与は

$$\left(F_z(x_0, y_0, z_0 + \Delta) - F_z(x_0, y_0, z_0)\right) \Delta^2 \approx \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta^3 \quad (3.3.3)$$

となる。結果として、

$$\int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \approx \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) \Delta^3 + (\text{higher orders}) \quad (3.3.4)$$

が得られる。ところが、右辺のカッコの中身は (3.1.2) の $\mathbf{div} \mathbf{F}$ に他ならない。そこで、

$$\mathbf{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta^3} \int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \quad (3.3.5)$$

がなりたつことがわかる。(ただし、右辺の S は $\mathbf{r}$ を頂点に持つ、一辺 Δ の立方体)。

これが divergence の意味である。面積分の定義から、右辺の面積分はこの小さな立方体から逃げていく $\mathbf{F}$ の分量を表している。この量は立方体の体積に比例する形でゼロになるので、全体を Δ^{-3} 倍して $\Delta \rightarrow 0$ の極限をとると、単位体積当たりの $\mathbf{F}$ の逃げていく量、が計算でき、これが $\mathbf{div} \mathbf{F}$ なのである。

さて、このような divergence の意味を理解すると、下のガウスの (発散) 定理がアタリマエ⁶に見えてくるだろう。

⁵ このところ、最終結果で Δ^3 より高次の項は無視した、例えば、 F_x の値は面上でも少しずつ違うはずなので、 F_x の引数を $(x_0 + \Delta, y_0, z_0)$ や (x_0, y_0, z_0) と簡単化したのは、本当はウソである。しかし、 F_x が x, y, z について2階くらい連続的微分可能ならば、以上の簡単化による誤差は Δ^4 か、それ以上に小さいことがわかる。

⁶ アタリマエというのは、けなしているわけではなく、褒め言葉である。実際、「アタリマエ」な事というのは、気がついてみれば非常に有用なことが多い。誰もが気づかなかった「アタリマエ」を定式化して本当に「アタリマエ」にしたところに、ガウスの偉大さ (の一端) がある。

定理 3.3.1 (ガウスの発散定理) 単連結な有界領域 V と、その表面 $S = \partial V$, V 上で定義されたベクトル場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ がある。このとき、

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{r}) dx dy dz = \int_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \quad (3.3.6)$$

が成り立つ。

この定理は、右辺の表面積分を左辺の体積積分に直す式とも、その逆とも解釈できる。この定理は電磁気学で微分形と積分形の法則を行き来するのに使ったはずで、皆さんおなじみのものでしょう。

証明：

ええと、まあ、黒板でやりますわ。皆さん、多分、どっかで見たことあると思うしね... □

この定理を逆手にとって、divergence を以下のように定義することもできる。この定義なら、座標系によらずに使えるという意味で、「正しい」。以下の定義では、感じをつかんでもらうために、少しええ加減な書き方をしている (V がどのような形まで許すかとかは書いてない) が、この傾向はこの章の最後まで続くだろう。

定義 3.3.2 (divergence の「正しい」定義) 3次元空間内にベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ がある。このとき、空間内の一点 $\mathbf{r}$ における $\mathbf{A}$ の divergence を、以下のように定義することもできる：

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \lim_{|V| \rightarrow 0} \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \quad (3.3.7)$$

ここで V とは $\mathbf{r}$ を中心にした微小な体積 (立方体や直方体), $|V|$ はその V の体積, ∂V は V の表面 (法線ベクトルは外向きにとる) である。

註： 上ではガウスの定理から divergence の「正しい」定義を導くかのような書き方をしたが、これは誤解を招きやすいかもしれない。というのは、ガウスの定理の証明する際、divergence の「正しい」定義を証明して使っているようなところがあるからだ。

この節を終わるに当たって、ガウスの定理の応用として、グリーン の定理を証明しておく。

定理 3.3.3 (Green) V を 3次元空間の有限領域、その表面を ∂V と書く。 V にて連続的に 2 階微分可能なスカラー関数 ϕ, ψ があると、以下がなりたつ。数式内では積分の場所を表す引数 $(\mathbf{r})$ を省略した。

$$\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dx dy dz = \int_{\partial V} \phi \nabla \psi \cdot d\mathbf{S} \quad (3.3.8)$$

$$\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dx dy dz = \int_{\partial V} (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S} \quad (3.3.9)$$

一つ目を Green の第一定理、二つ目を Green の第二定理という。

証明：

恒等式

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla \cdot \nabla \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) \quad (3.3.10)$$

の両辺を V で積分し、左辺の積分をガウスの定理で表面積分に書き直すと (3.3.8) が出る。また、(3.3.8) と、その ϕ, ψ を入れ替えたものを引き算すると (3.3.9) が出る。詳細は教科書 pp.232–233 を参照。 □

3.4 Rotation と保存力, Stokes の定理

次に、rotation の持つ意味を考えよう。正直、これが一番捉えにくいものだろう。今までと同じように、3次元空間内にベクトル場 $\mathbf{A}$ があるとして、一点 $\mathbf{r}$ の近傍を考える。

$\mathbf{r}$ を一つの頂点とする小立方体を考える. 話を明確にするため, 立方体の2つの頂点が (x_0, y_0, z_0) と $(x_0 + \Delta, y_0 + \Delta, z_0 + \Delta)$ だとしておこう.

点 (x_0, y_0, z_0) を中心とする半径が ϵ の円を考える. 円周をまわる向きを固定し, 右ネジの法則で決まる円の法線ベクトルを $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ と書くことにしよう. このように向きまで決めた円周を C と書く.

ここで, 線積分 $\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ を考えてみる. これと rotation の関係は以下の定理で与えられる.

命題 3.4.1 (線積分と rotation) 単位ベクトル $\mathbf{n}$ を右ネジの方向にみるような, 半径 ϵ の小円を C とすると,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} \quad (3.4.1)$$

が成り立つ. つまり, $\mathbf{n}$ を法線ベクトルにもつ小円での線積分から上の極限を作ると, その値は $\mathbf{rot} \mathbf{A}$ と $\mathbf{n}$ との内積をとることで得られる.

証明:

詳細をプリントにする根性がないので, 要点だけを記しておくから, 興味のある人はやってみるとよい.

まず, C をうまく表す必要がある. そのために, $\mathbf{n}$ そのものの定義からやりなおす. まず, z -軸方向を向いた単位ベクトル $(0, 0, 1)$ を考え, これを y -軸のまわりに α , そのあとで z -軸のまわりに β だけ回転してできるベクトルを $\mathbf{n}$ とする. $\mathbf{n}$ の成分は, 回転の行列をかけて

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.4.2)$$

となる.

次に曲線 C だが, これも xy -平面上の円 $x = \epsilon \cos t, y = \epsilon \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) を同じように回転し, かつそれを $\mathbf{r}_0$ だけ平行移動すれば得られるはずだ ($\mathbf{r}_0$ が円の中心). 計算すると

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon \cos t \\ \epsilon \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{r}_0 + \epsilon \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos t - \sin \beta \sin t \\ \cos \alpha \sin \beta \cos t + \cos \beta \sin t \\ -\sin \alpha \cos t \end{pmatrix} \quad (3.4.3)$$

となる. これから $\mathbf{r}'(t)$ を計算すると

$$\mathbf{r}'(t) = \epsilon \begin{pmatrix} -\cos \alpha \cos \beta \sin t - \sin \beta \cos t \\ -\cos \alpha \sin \beta \sin t + \cos \beta \cos t \\ \sin \alpha \sin t \end{pmatrix} \quad (3.4.4)$$

がわかる. これと $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の内積をとるのが, 今は円 C が十分に小さいと思って, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ を円の中心を基準にしてテイラー展開し, その一次だけを見る. つまり,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}_0) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + O(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2) \\ &= f(\mathbf{r}_0) + \epsilon \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} (\cos \alpha \cos \beta \cos t - \sin \beta \sin t) + \frac{\partial f}{\partial y} (\cos \alpha \sin \beta \cos t + \cos \beta \sin t) + \frac{\partial f}{\partial z} (-\sin \alpha \cos t) \right\} \\ &\quad + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

を, $f = A_x, A_y, A_z$ として用いる. $O(\epsilon^2)$ を無視して $\mathbf{r}'(t)$ との内積をとり, t を 0 から 2π まで積分する. こは

あまりにたくさんの項が出てくるので、積分の結果を一足跳びに書くと、

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \pi\epsilon^2 \left(-\frac{\partial A_x}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial A_x}{\partial z} \sin \alpha \sin \beta + \frac{\partial A_y}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial A_y}{\partial z} \sin \alpha \cos \beta \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial A_z}{\partial x} \sin \alpha \sin \beta + \frac{\partial A_z}{\partial y} \sin \alpha \cos \beta \right) \\ &= \pi\epsilon^2 \left(-\frac{\partial A_x}{\partial y} n_z + \frac{\partial A_x}{\partial z} n_y + \frac{\partial A_y}{\partial x} n_z - \frac{\partial A_y}{\partial z} n_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} n_y + \frac{\partial A_z}{\partial y} n_x \right) \\ &= \pi\epsilon^2 \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} + O(\epsilon^3)\end{aligned}\quad (3.4.6)$$

となることがわかる。もちろん、rotation は円の中心、 $\mathbf{r}_0$ にての値である。これを書き直すと (3.4.1) になる。□

この定理を解釈しよう。(3.4.1) にて $\mathbf{n}$ をいろいろにとった小円での極限を比べてみると、これは $\mathbf{n}$ が $\mathbf{rot} \mathbf{A}$ と同じ向きの時に最大で、その長さは $|\mathbf{rot} \mathbf{A}|$ であることがわかる。これは $\mathbf{grad} \phi$ と似た状況であるので、これをまとめて以下を得る。

定義 3.4.2 (Rotation の「正しい」定義) $\mathbf{rot} \phi$ とは、以下の2つの性質を持ったベクトルと定義することもできる。

- その向きは、(3.4.1) の値が一番大きくなる $\mathbf{n}$ の向きで、
- その大きさは、(3.4.1) の値の最大値である。

さて、rotation については、以下の Stokes の定理がなりたつ。上の命題 3.4.1 はこの定理の特別な場合になっている。

定理 3.4.3 (Stokes) 3次元空間内に適当な曲面 S を考え、その境界の曲線を C とする。 S の法線ベクトルと C の向きは、「右ネジの法則」で決める。このとき、任意のベクトル場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ に対し、

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \quad (3.4.7)$$

が成立する。

証明：

まあ、この証明も黒板で簡単に説明しますわ。□

この定理の系として、以下が成り立つ。

系 3.4.4 ベクトル場 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ が rotation-free, つまり至る所で $\mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ならば、点 A と点 B を結ぶ曲線に沿っての線積分 $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ は始点 A と終点 B のみによって決まり、途中の C の取り方にはよらない。

証明：

A と B を結ぶ曲線を2とおりとって、 C_1, C_2 と書くことにする。 C_2 の向きを変えて B から A に行くようにしたものを $-C_2$ と書くと、 C_1 の次に $-C_2$ をつなげることで、 $A \rightarrow B \rightarrow A$ の閉曲線ができる。この閉曲線全体に関する線積分は

$$\int_{C_1 - C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.4.8)$$

である。ところが、 $\mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$ なので、ストークスの定理から

$$\int_{C_1 - C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} d\mathbf{S} = 0 \quad (3.4.9)$$

である。ここで S は、 $C_1 - C_2$ を境界に持つような任意の曲面。従って、この2つから、

$$\int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.4.10)$$

が得られた。つまり、任意の2つの曲線に関する線積分の値は等しい。 $\square$

3.5 積分の変換

今までにやってきた定理をまとめておこう。この辺りは必要に応じて思い出せば良いので、簡単にすませる。

(1) まず、 V を3次元空間の有限領域、その表面の閉曲面を ∂V とし、両者の間の積分の関係を導こう。基本として、ガウスの定理は

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dx dy dz \quad (3.5.1)$$

を主張するが、これは左辺の表面積分を右辺の体積積分に直す式とも、その逆とも捉えられる。この応用を二つ述べておこう。

(2) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\phi(\mathbf{r})$ [$\mathbf{a}$ は任意の定ベクトル] とおいてガウスの定理を使うと、

$$\int_{\partial V} \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \int_V (\nabla \phi) dx dy dz \quad (3.5.2)$$

も得られる。

(3) $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ [$\mathbf{a}$ は任意の定ベクトル] とおいてガウスの定理を使うと、

$$\int_{\partial V} d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_V (\nabla \times \mathbf{A}) dx dy dz \quad (3.5.3)$$

も成り立つことがわかる。

次に、閉曲面 C で囲まれた有限な曲面を S と書き、両者の上での積分の関係を導こう。気分の問題で $C = \partial S$ と書く。また曲面 S の表裏と曲線 C の向きは、「右ネジの関係」をみたすように決める。

(4) まず、Stokes の定理は

$$\int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (3.5.4)$$

である。この応用として、以下の2つがあげられる。

(5) $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\phi(\mathbf{r})$ [$\mathbf{a}$ は任意の定ベクトル] とおいてストークスの定理を使うと、

$$\int_{\partial S} \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi \quad (3.5.5)$$

が得られる。

(6) また、 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$ [$\mathbf{a}$ は任意の定ベクトル] とおいてストークスの定理を使うと、

$$\int_{\partial S} d\mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_S (d\mathbf{S}(\mathbf{r}) \times \nabla) \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad (3.5.6)$$

が得られる。

3.6 2種類のポテンシャルとベクトルの分解

いままでの結果を基に、ベクトル場と「ポテンシャル」の関係をまとめておこう。(多分、大半は聞いたことのあるはなしでしょうね。)

結果を述べてしまおう。以下ではベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ などが与えられているとする。

一つ目の定理は、 $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ に関するものである。

定理 3.6.1 (rotation-free とスカラーポテンシャル) 以下の同値関係がなりたつ。

すべての場所で $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$

$\iff$

適当なスカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ が存在して、 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{r})$ と書ける (3.6.1)

なお、 $\mathbf{E}$ を与えるスカラーポテンシャルは、付加定数の自由度を除いて (つまり、勝手な定数を足したりひいたりする自由度はあるが) 一意的に定まる。

証明：

下から上は、単なる計算だ。つまり、 $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ ならば $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ であることを計算で示せばよい。

問題は上から下を出す方で、こっちは全然当たり前には見えない (少なくとも初めのうちは)。でも、ストークスの定理 (または系 3.4.4) を思い出すと、簡単である。

いま、点 A と点 B を結ぶ、任意の曲線 C を考えよう。線積分 $\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ の値は、 C の取り方にはよらない。そこで、例えば原点でのポテンシャルの値を一つ勝手に決めて (ϕ_0)、他の点でのポテンシャルを

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0 - \int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (C \text{ は原点から } \mathbf{r} \text{ へ行く勝手な曲線}) \quad (3.6.2)$$

としてやろう。この表式を実際に微分してみると、 $-\text{grad } \phi = \mathbf{E}$ であることはすぐにわかる。つまり、このように定義した $\phi(\mathbf{r})$ が定理の主張するところのスカラーポテンシャルになっていることが確かめられた。

最後に、ポテンシャルの一意性について考えよう。上でポテンシャルの存在は言ったので、このベクトルは「保存力」である。だから、定理 3.2.3 が使えるが、これは任意の 2 点間のポテンシャルの差を一意に決めてしまう。任意の 2 点間のポテンシャルの差が決まっているので、残されたのは空間全体でポテンシャルを同じ量だけ上げ下げする自由度のみである。これは要するに、上の ϕ_0 の自由度だ。□

2つ目の定理は、 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ならどうか、と言うもの：

定理 3.6.2 (divergence-free とベクトルポテンシャル) 以下の同値関係がなりたつ。

すべての場所で $\text{div } \mathbf{B} = 0$

$\iff$

適当なベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ が存在して、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$ と書ける (3.6.3)

また、 $\mathbf{B}$ を与えるベクトルポテンシャルは一意には定まらないが、そのようなベクトルポテンシャルの 2 つを $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$ とすると、その差は適当なスカラー場 ϕ を用いて $\mathbf{A} - \mathbf{A}' = \text{grad } \phi$ と書ける。つまり、 $\text{grad } \phi$ の自由度を除いて一意に決まると言って良い。

証明：

これも、下から上は単なる計算で確かめられる。問題はこの逆だね。

まず、定理を満たすようなベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ の存在は、実際にそのような $\mathbf{A}$ を構成することで証明で

きる. ともかく一つでもそのような $\mathbf{A}$ を作れば良いのだから, 天下りに答えを与えると,

$$\mathbf{A}(x_1, y_1, z_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^{x_1} B_z(x, y_1, z_1) dx \\ \int_0^{y_1} B_x(0, y, z_1) dy - \int_0^{x_1} B_y(x, y_1, z_1) dx \end{pmatrix} \quad (3.6.4)$$

が良いことがわかる. (この $\mathbf{A}$ を微分して実際に $\mathbf{B}$ がでることを確かめるのは良い練習問題だからやってみると良い.) 実のところ, 上のような $\mathbf{A}$ を自力で作るのはちょっと面倒だったので, 適当な本をカンニングした.

一意性については以下になる. まず, $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ ならば,

$$\text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot } (\mathbf{A} - \text{grad } \phi) = \text{rot } \mathbf{A} - \text{rot grad } \phi = \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (3.6.5)$$

なので, $\mathbf{A}'$ も正しいベクトルポテンシャルであることがわかる. 次に, $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}'$ ならば,

$$\text{rot } (\mathbf{A} - \mathbf{A}') = \mathbf{B} - \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (3.6.6)$$

であるが, これはベクトル場 $\mathbf{A} - \mathbf{A}'$ が rotation-free であると主張している. すると, 定理 3.6.1 から, $\mathbf{A} - \mathbf{A}'$ が gradient の形に書けることが結論できる. $\square$

これまでで, divergence-free または rotation-free なベクトル場が, それぞれスカラーポテンシャル, ベクトルポテンシャルで書けることがわかった. でも一般のベクトル場はこのどちらでもない. そのようなベクトル場に対しては, どのようにポテンシャルを導入すべきなのだろうか? そもそも, ポテンシャルで書けるのだろうか? 答えは以下の定理で与えられる.

定理 3.6.3 (一般のベクトルの分解) 任意のベクトル $\mathbf{F}$ は, divergence-free な場 $\mathbf{B}$ と, rotation-free な場 $\mathbf{E}$ の和に分解することができる:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad \text{すべての点で } \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (3.6.7)$$

この分解は一意とは限らないが, 2つの可能な分解を $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$ と $\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2$ とすると, 用いて

$$\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 = \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 = \text{grad } \psi, \quad \text{すべての点で } \Delta \psi = 0 \quad (3.6.8)$$

が成り立つようなスカラー関数 ψ が存在する. 逆に, $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$ が (3.6.7) を満たしている場合, (3.6.8) で関係づけられた $\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2$ も (3.6.7) を満たす.

この定理から直ちに以下を得る.

系 3.6.4 (一般のベクトル場の「ポテンシャル」) 任意のベクトル $\mathbf{F}$ は, 適当なスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を用いて,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \phi(\mathbf{r}) + \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (3.6.9)$$

と表すことができる.

定理 3.6.3 を仮定した系 3.6.4 の証明

定理 3.6.3 でみつかった $\mathbf{E}$ をスカラーポテンシャルで $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ と, また $\mathbf{B}$ をベクトルポテンシャルで $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ と表せばすぐに出る. $\square$

定理 3.6.3 の証明はそう簡単ではない. 少し発見的にやってみよう. 定理の主張のように分解できるとすると,

$$\text{div } \mathbf{E} = \text{div } \mathbf{F}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.6.10)$$

および

$$\text{rot } \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{F}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (3.6.11)$$

が成り立つはずである。ここで $\operatorname{div} \mathbf{F}$ と $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ は $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ から決まっている量だから、右辺が与えられたとして、左辺の $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ を決めればよいわけだ。つまり問題は、以下の質問の答えを見つけることに帰着する。この質問とその答えはそれなりにヤヤコシイので、以下の小節で行うことにした。□

3.6.1 ベクトルの逆問題

上で必要になったのは、以下のような問題である。

Q1 : 与えられたスカラー場 $\psi(\mathbf{r})$ に対して、

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (3.6.12)$$

を満たすようなベクトル場 $\mathbf{E}$ を決定せよ。

Q2 : 与えられたベクトル場 $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ に対して、

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{G}(\mathbf{r}) \quad (3.6.13)$$

を満たすようなベクトル場 $\mathbf{B}$ を決定せよ。

以下、この問の答えを発見法的に求め、最後に定理の形でまとめよう。

Q1 から行く。 $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$ だから、何かのポテンシャル ϕ でもって、 $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ と書いているはず。従って、この ϕ をまず求め、それから $\mathbf{E}$ を求めることにしよう。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) \quad (3.6.14)$$

の両辺の div をとると、

$$\psi(\mathbf{r}) = \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) \quad (3.6.15)$$

となる。ここで出てきた $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ と言うのはラプラシアンと呼ばれるもので、デカルト座標では

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi(x, y, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi(x, y, z) \equiv \Delta \phi(x, y, z) \quad (3.6.16)$$

となっている。ということで、スカラーポテンシャル ϕ は、(もし存在するなら)

$$\Delta \phi(x, y, z) = -\psi(x, y, z) \quad (3.6.17)$$

を満たすべし、ということがわかる。逆に、これさえ満たしている ϕ から作った $\mathbf{E}$ は題意を満たしていることはすぐにわかるので、問題は (3.6.17) を満たす ϕ を求めることに帰着された。

さてさて、(3.6.17) は Poisson の方程式と言われるもので、(普通に性質の良い) $\psi(\mathbf{r})$ に対しては、その解が存在することが知られている。実際、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\psi(\mathbf{q})}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} dv(\mathbf{q}) \quad (3.6.18)$$

と定義された $\psi(\mathbf{r})$ が (3.6.17) を満たすことは少し頑張れば確かめられる⁷。(ここで、 $dv(\mathbf{q})$ は、 $\mathbf{q}$ の3つの成分による、単なる3重積分を表す)。従って、このような ϕ を持ってきて $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r})$ を作ると、問題の答えが得られるわけだ。

Q2 も同様に考える。今度は $\mathbf{B}$ を与えるベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ があるはずである：

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (3.6.19)$$

⁷興味のある人への注：電磁気の講義などで聞いたかもしれないが、ここでは $\Delta_{\mathbf{q}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{q})$ の関係に注目するとよい。ここで $\Delta_{\mathbf{q}}$ は、 $\mathbf{q}$ に関するラプラシアンを表す。また、ここでは無限の広さの3次元空間で考えているが、有限の領域であっても本質的には同じ事である。

この両辺の $\mathbf{rot}$ をとると,

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})) = \mathbf{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{G}(\mathbf{r}) \quad (3.6.20)$$

が得られる。つまり、 $\mathbf{A}$ は上の方程式の解である必要があるし、逆にこれで十分であることはすぐにわかるだろう。さて、問題は (3.6.20) はあるのか、あるとしたら何なのかということだが、これについては $\mathbf{rot}$ についての恒等式

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})) = -\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{grad}(\mathbf{div} \mathbf{A}(\mathbf{r})) \quad (3.6.21)$$

を用いることにする。このままではこいつは扱いにくい、今は条件を満たすベクトルポテンシャルを少なくとも一つ求めればよいのだから、

$$\mathbf{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{すべての } \mathbf{r} \text{ で}) \quad (3.6.22)$$

を要求してしまうことにする。すると、 $\mathbf{A}$ の満たすべき条件は

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mathbf{G}(\mathbf{r}) \quad (3.6.23)$$

となる。これは両辺にベクトルが出ているが、その成分ごとに見ると (3.6.17) と同じ形をしていることがわかるだろう。従って、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{G}(\mathbf{q})}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} dv(\mathbf{q}) \quad (3.6.24)$$

ととれば良いことがわかる。

これで一応、Q 1, Q 2 への答えを得たのだが、これらの答えが一意的かどうかにはあまり触れなかった。ポテンシャルから調べていっても良いが、以下のようにベクトルを直接扱うのが簡単である。Q 1 の答えになる $\mathbf{E}$ が 2 通りあったとして、それらを $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ と書こう。これらは

$$\mathbf{div} \mathbf{E}_i = \psi, \quad \mathbf{rot} \mathbf{E}_i = \mathbf{0} \quad (i = 1, 2) \quad (3.6.25)$$

を満たしているから、 $i = 1, 2$ の対応する式を引き算すると、

$$\mathbf{div} \tilde{\mathbf{E}} = 0, \quad \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad (3.6.26)$$

が得られる ($\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$)。ここで第 2 の式は、 $\tilde{\mathbf{E}}$ が rotation-free であると主張しているから、適当なスカラーポテンシャル $\tilde{\phi}$ を用いて

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{grad} \tilde{\phi} \quad (3.6.27)$$

と書けるはずだ。これを第一の式に入れると

$$\Delta \tilde{\phi} = \mathbf{div} \mathbf{grad} \tilde{\phi} = 0 \quad (3.6.28)$$

が得られる。これが $\tilde{\phi}$ の満たすべき必要条件である。逆に、 $\mathbf{E}$ が (3.6.12) を満たし、かつ $\tilde{\phi}$ が (3.6.28) を満たすときに、 $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{grad} \tilde{\phi}$ も (3.6.12) を満たすことがわかる。つまり、このような $\tilde{\phi}$ は十分でもあるのだ。

つまり、結論として、 $\mathbf{E}$ は、いたるところで $\Delta \tilde{\phi} = 0$ なるスカラー関数 $\tilde{\phi}$ を用いて $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{grad} \tilde{\phi}$ とおきかえても構わない自由度を持っていることがわかる。

Q 2 の方も同様に、もし $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ が共に条件を満たしていれば、 $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$ は

$$\mathbf{div} \tilde{\mathbf{B}} = 0, \quad \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{0} \quad (3.6.29)$$

を満たすことがわかるが、これは (3.6.26) と同じ形であるから、同じ結論になる。

以上をまとめると以下の命題になる。

命題 3.6.5 Q 1 に対する答えは,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad} \phi(\mathbf{r}) + \mathbf{grad} \tilde{\phi}, \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\psi(\mathbf{q})}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} dv(\mathbf{q}) \quad (3.6.30)$$

で与えられる. また, Q 2 の答えは,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{grad} \tilde{\phi}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{G}(\mathbf{q})}{|\mathbf{r} - \mathbf{q}|} dv(\mathbf{q}) \quad (3.6.31)$$

で与えられる. ここで $\tilde{\phi}, \tilde{\phi}$ は

$$\Delta \tilde{\phi} = 0, \quad \Delta \tilde{\phi} = 0 \quad (\text{すべての点で}) \quad (3.6.32)$$

を満たす任意の関数である.

定理 3.6.3 の証明

既に $\mathbf{div} \mathbf{E} = \mathbf{div} \mathbf{F}$ かつ $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$, および $\mathbf{div} \mathbf{B} = 0$ かつ $\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{F}$ である $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ をみつける必要があることは見ている. 問題はこれで十分かということであるが, $\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{B}$ となってくれないと困るから, 上のようなベクトルを勝手に見つけただけでは不十分だ.

この点を解決するため, まず

$$\mathbf{div} \mathbf{E} = \mathbf{div} \mathbf{F}, \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.6.33)$$

となるようなベクトル $\mathbf{E}$ を見つけよう. これは上の命題 3.6.5 で解決済みだ. 次に, $\mathbf{B} = \mathbf{F} - \mathbf{E}$ としてベクトル $\mathbf{B}$ を定義する.

すると,

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = \mathbf{div} \mathbf{F} - \mathbf{div} \mathbf{E} = 0 \quad (3.6.34)$$

が自動的に成り立っている. つまり, このように作った $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ を用いると,

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{B}, \quad \mathbf{div} \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3.6.35)$$

が成り立っている訳だ. これは定理 3.6.3 の条件を満たしているから, そのような $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ の存在が証明された.

一意性については, 命題 3.6.5 の証明と全く同じなので, 省略する. $\square$

(上の証明を見ると, 定理 3.6.3 だけの証明には命題 3.6.5 の Q2 は不要であった — $\mathbf{E}$ の方をちゃんと作れば, $\mathbf{B} = \mathbf{F} - \mathbf{E}$ が Q2 部分の答えを与える. しかし, Q2 はそれ自身で面白いものなので, 命題 3.6.5 では Q2 を別途に考察した.)

3.6.2 おまけ: Poisson 方程式の解の一意性

上の問題と関連して, またガウスの定理 (グリーンの定理) の応用例として, Poisson 方程式

$$\Delta \phi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \quad (3.6.36)$$

の解の一意性について触れておこう.

今, 上の Poisson 方程式を有限の領域 V で考え, その表面を ∂V と書く. ∂V での ϕ の値を与えられた関数 f に固定したとき, ϕ の値は一意に決まるだろうか? (似たような問題として, 無限の 3 次元領域 $\mathbb{R}^3$ を考えて, その境界付近では ϕ がゼロになるとして一意性を問うこともできる.)

この問題を考えるため, 条件を満たす解が 2 通りあったとし, それらを ϕ_1, ϕ_2 とする. 差を $\psi(\mathbf{r}) = \phi_1(\mathbf{r}) - \phi_2(\mathbf{r})$ と書くと,

$$\Delta \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{すべての } \mathbf{r} \in V \text{ で}) \quad (3.6.37)$$

かつ

$$\psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (\text{すべての } \mathbf{r} \in \partial V \text{ で}) \quad (3.6.38)$$

が満たされている。従って、このような ψ が恒等的にゼロであることを言えよ。

ここでガウスの定理 (または Green の第一定理) が登場する。Green の第一定理は

$$\int_V \left(\psi \Delta \psi + (\nabla \psi)^2 \right) dx dy dz = \int_{\partial V} \psi \nabla \psi \cdot d\mathbf{S} \quad (3.6.39)$$

である。しかし、この右辺は境界で $\psi = 0$ 故にゼロ。また左辺の第一項もゼロ。従って、

$$\int_V (\nabla \psi)^2 dx dy dz = 0 \quad (3.6.40)$$

なのだ。でも、この非積分関数は非負だ。それを積分してゼロならば、非積分関数そのものがゼロということになる。つまり、

$$\nabla \psi = 0 \quad (V \text{ の中全部で}) \quad (3.6.41)$$

従って、 ψ は V の中全部で一定の値をとるが、表面でゼロなんだから、内部でもゼロしかない。 $\square$