2 線積分と面積分

前節では，２次元的，３次元的なところでの積分を考えた．これらは１次元での積分の自然な拡張であるが，１次元での積分の拡張はこれだけではない．その重要な例として,「線積分」と「面積分」を考える．後を見てもらうとわかるように,「線積分」は１次元積分の,「面積分」は２重積分の，それぞれ拡張になっているが，それは積分領域が「くにゃくにゃ曲がっている」方向への拡張である．まあ，これではなんのことかわからないと思うので，講義を聴いてくれ.

2.1 曲線とは

わざわざ節を立てるまでもないが,「曲線」の定義を与えておく．我々は直感的に曲線とは何か，知っているつもりだが，どのような変態なものまで許すか考え出すと，それなりに厄介だ．そこで，この講義では以下の定義を採用する.

> **定義 2.1.1 (曲線)** n-次元空間の中の曲線とは，各成分が実数 t の連続関数であるような，n-成分の関数 $\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_n(t))$ の（軌跡の）ことである．このとき，t を，曲線を表す媒介変数（パラメーター）と呼ぶ．また，この講義では t の範囲を常に区間 $[0,1]$ にとることにする.

この定義でわかるように，t を 0 から 1 まで動かすことで，曲線をなぞっていける．この意味で，曲線には向きが自然に定義される．また，$t=0$ での曲線上の点を曲線の始点，$t=1$ の点を曲線の終点という.

なお本来の意味で曲線という場合には，上の定義で t を動かしたときにできる，n-次元空間内での軌跡を指す．この意味で，軌跡が同じならパラメーターの入れ方が違うものでも同じ曲線とみなす．例：原点と $(1,1)$ を結ぶ線分は，$\boldsymbol{r}(t) = (t,t)$ と書いても良いし，$\boldsymbol{r}(t) = (t^2, t^2)$ でも良いし，$\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{t}, \sqrt{t})$ でも良いし... でも，それをいちいち書くと面倒だから，以下では何か一つのパラメーター表示を決めたものとして通す.（興味のある人は，線積分の結果がパラメーター表示を変えても変わらないことを確かめるとよい.）

以下では主に３次元空間の中の曲線を考える．その際は $\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ の代わりに，$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ と書くこともある.

上で定義した曲線はちょっと一般的すぎるので，以下でよく考えるものを改めて定義しておく.

> **定義 2.1.2 (滑らかな曲線)** n-次元空間の中の曲線 $\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_n(t))$ のうち，滑らかな曲線とは以下の２条件を満たすものである：
>
> (1) 各成分 $x_i(t)$ が t の関数として微分可能で導関数が連続，かつ
>
> (2) $\boldsymbol{r}'(t)$ は $0 \le t \le 1$ でゼロベクトルにはならない

2.2 線積分の定義

この節では線積分を定義する．記述を簡単にし，かつイメージが湧きやすいように３次元での話に限定するが，一般の n-次元への拡張は自明であろう.

線積分とは，以下のような問いを考える際に自然に出てくるものである.

> 問：空間内に曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ が与えられており（$0 \le t \le 1$）この曲線に沿って粒子が動いた場合，どのくらいの仕事がなされたかを考えたい．ただし，粒子にかかる力は場所 (x,y,z) ごとに異なり，$\boldsymbol{F}(x,y,z)$ というベクトル形で与えられているとする．簡単のため，曲線の始点は原点 $\boldsymbol{0} = (0,0,0)$，終点は $\boldsymbol{a} = (a,b,c)$ とする.

Step 1. まず簡単のため，考えている曲線は直線で，粒子に働く力は場所に依らない，場合を考える．つまり，粒子は原点から点 (a,b,c) まで直線上を動き，粒子に働く力はこの直線に沿った方向で，大きさが F（一定）だとしよう.

このとき，粒子がなされる仕事の総量は（力の大きさ）×（動いた距離）だから，$F\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ である．この表式は $F>0$（力と運動が同じ向き）の場合も，$F<0$（力と運動が逆向き）の場合も正しい．

Step 2. 粒子は上と同じく原点から点 $\boldsymbol{a}=(a,b,c)$ まで直線上を動くが，粒子に働く力は $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$ というベクトルで必ずしも直線と同じ方向でない（ただし，各成分は一定）場合．

粒子になされる仕事には，力 $\boldsymbol{F}$ の直線に沿った分力が関係する．この分力を表すために，直線の方向ベクトルが $\boldsymbol{n}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$ で表されることに注意しよう．力 $\boldsymbol{F}$ の直線の方向の分力は，向きは $\boldsymbol{n}$ で，大きさ（符号こみ）は $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ である（$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積）．つまり，問題の分力は $(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ である．

これで力の大きさがわかったから，Step 1 に従うと，粒子のされた力の総量は

$$(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}=F_x\,a+F_y\,b+F_zc=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a} \tag{2.2.1}$$

となる．最右辺の表式が有用である：言葉でまとめると「粒子が直線に沿って，一定の力の下で運動するとき，粒子の受ける仕事の総量は（粒子の変位ベクトル）と（力のベクトル）の内積で与えられる」となる．もちろん，Step 1 の結果は上の特殊な場合である．

（この辺りは,「力学」の講義などでやっているはずだが，一応，復習した．以下では,「粒子が曲線に沿って動く」「力が一定ではない」の 2 方向に一般化することで，線積分を導入する．ただし，この 2 方向はほとんど同じ複雑さを要求するので，両方一辺にやる.）

Step 3. 粒子が折れ線に沿って運動し，粒子に働く力は折れ線ごとに一定の場合．

折れ線は原点 $\boldsymbol{r}_0=(0,0,0)$ から出発して，n 個の点 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{a}=(a,b,c)$ を順に結ぶものとする．点 $\boldsymbol{r}_{i-1}$ から $\boldsymbol{r}_i$ を結ぶ折れ線を ℓ_i と書き，各 ℓ_i 上では力が一定（$\boldsymbol{F}_i$ と書く）としよう．折れ線 ℓ_i 上で粒子のされた仕事は，Step 2 から $\boldsymbol{F}_i\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1})$ である．従って，原点から (a,b,c) までの仕事の総量は

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.2}$$

となっているはずだ．

Step 4. 粒子が滑らかな曲線 $\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ に従って運動し（$0\le t\le 1$），粒子に働く力は粒子のいる場所の関数である場合．つまり，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ における力は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=(F_x(x,y,z),F_y(x,y,z),F_z(x,y,z))$ の形のベクトル（各成分が (x,y,z) の関数）で与えられる場合．

これがもっとも一般の場合であるが，Step 3 の自然な拡張として考えられる．滑らかな曲線（曲がっている）のは考えにくいから，今までやってきたことに倣って，まずは曲線を折れ線で近似しよう．すなわち，始点から終点までの曲線上に，順に $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{0},\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\ldots,\boldsymbol{r}_n=\boldsymbol{a}$ の点を取り，曲線を Step 3 のような折れ線で近似することを考える．$\boldsymbol{r}_{i-1}$ から $\boldsymbol{r}_i$ の部分を ℓ_i と書くとき，ℓ_i の長さが十分に小さく，かつ $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{r}$ に滑らかに依存する場合は，各 ℓ_i 上では $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ はほとんど一定のベクトルと思って良いだろう．ここまで近似すると，問題は Step 3 で解いたものになるので，

$$（この近似での仕事量）=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i)\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.3}$$

となるはずである．

そして，本当の答え（滑らかな曲線に沿っての仕事）は，上の近似値の極限，つまり

$$\lim_{\text{分割を細かく}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i)\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.4}$$

で与えられる，と考えるのが自然である.（ここで「分割を細かく」というのは，上での n を無限大にして，すべての i について $\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-1}$ の長さをゼロにする極限を指す.）

以上を動機付けとして，以下のように「線積分」を定義する．

定義 2.2.1 空間内の曲線 $C : \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $(0 \le t \le 1)$ と，空間の各点で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が与えられている（空間全体で定義されていなくても，曲線上の各点で定義されていれば十分）．このとき，C に沿った $\boldsymbol{F}$ の線積分を，以下のように定義する．

- 曲線 C 上に，その順に沿って 始点$=\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n=$終点 の点をとる．これを曲線 C の分割と呼び，Δ で表す．
- $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$\boldsymbol{r}_{i-1}$ と $\boldsymbol{r}_i$ の間（両端も含む）に勝手に点 ζ_i をとる．ζ_1 から ζ_n をまとめて $\vec{\zeta}$ と書く．
- 分割 Δ とその間の点のあつまり $\vec{\zeta}$ に対して，線積分のリーマン和を

$$S(\Delta, \vec{\zeta}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\zeta_i) \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.5}$$

  として定義する．
- 分割を細かくした極限（つまり，$|\Delta| = \max_i |\boldsymbol{r}_{i-1} - \boldsymbol{r}_i|$ がゼロに行く極限）を考える．どのような分割の取り方，および，どのような $\vec{\zeta}$ の選び方に対しても上のリーマン和の極限が同じ値に収束するとき,「曲線 C に沿った $\boldsymbol{F}$ の線積分」が存在するといい，その極限値をこの線積分の値と定義する．記号では

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta, \vec{\zeta}) \tag{2.2.6}$$

１次元のリーマン積分，また２重積分や３重積分の定義を思い出してもらうと，上の定義はこれらの自然な拡張（または親類）になっていることが納得できるだろう．

理解を深めるための問題： 曲線 C を，原点と $(1,1,1)$ をつなぐ放物線（$y = z = x^2$），ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix} \tag{2.2.7}$$

とするとき，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を，上の定義に従って求めよ.（より効率の良い計算方法はすぐ後でやります.）

ここで問題になるのは，どのような曲線，どのようなベクトル場なら線積分が定義できるのか，ということである．曲線に沿っての積分だから，まず曲線の長さが定義できることがほとんど必要であることは納得できるだろう．その上で，$\boldsymbol{F}$ 自身もそれなりに性質の良いことが求められよう．そのような十分条件の一つとして，以下が挙げられる．

定理 2.2.2 (線積分が定義できる十分条件) 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ が定義できる十分条件の一つは，以下の２つが成り立つことである．

- 曲線 C が「滑らかな曲線」（定義 2.1.2 参照）であり，
- ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ は，その引数 x, y, z に関する連続関数である．

（余談）上の定理では曲線が滑らかなことを仮定したが，これはあくまで十分条件である．多分，曲線の各成分 $x_i(t)$ が「有界変動関数」であり，$\boldsymbol{F}$ が連続関数ならば積分可能と思うが，確認する根性がなかった．

2.3 線積分の計算法

上での線積分の定義は，どうにも計算しにくい．しかし，２重積分などがそうであったように，もっと簡単な計算法が導かれる．

定理 2.3.1 (線積分の計算法) 定理 2.2.2 の条件の下では，線積分の値は，以下のように t の積分で計算できる：

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\, dt \tag{2.3.1}$$

ここで，$'$ は t による微分を表し，$\boldsymbol{r}'(t)$ とは，$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ の各成分を t で微分して得られるベクトル $(x'(t), y'(t), z'(t))$ のことである．

すなわち，線積分は曲線の接ベクトル $\boldsymbol{r}'(t)$ と $\boldsymbol{F}(t)$ の内積を積分すれば求められるのだ．

練習問題：前節の「理解を深める問題」を，上の定理を使ってやり直してみよ．

一般的な注意：この辺りで，何がベクトルで何がスカラーかをきっちり区別することが不可欠になる．ベクトルとベクトルの内積はスカラーになったりするからヤヤコシイが，混乱しないように注意すること．この講義ではベクトル量は太字，スカラー量は普通の字体，とできるだけ区別していく．例外は η_i で，これは本当はベクトルの太字で書くべきなのだが，フォントの関係で書けていない．

定理 2.3.1 の証明（説明）

完全な証明はやらないが，感じをつかむだけなら以下のように考えれば割合に簡単である．

今，線積分が定義できる場合を考えているので，線積分の定義に出てくる分割 Δ や点 $\vec{\zeta}$ を都合の良いようにとって，計算すればよい．そこで，パラメーターの区間 $[0,1]$ を n-個に区切って，$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ としてやろう．また，区間 $[t_{i-1}, t_i]$ 内に点 s_i をとる．この t_i に対応して，$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(t_i)$ と，$\zeta_i = \boldsymbol{r}(s_i)$ を定義すると，線積分の定義に出てきたリーマン和は，

$$S(\Delta, \vec{\zeta}) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s_i)) \cdot \bigl(\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})\bigr) \tag{2.3.2}$$

の形になる[2]．

さてここで，t_{i-1} と t_i の差が非常に小さいものとしよう．すると，

$$\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1}) \approx \boldsymbol{r}'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \tag{2.3.3}$$

が成り立つだろう[3]．これを (2.3.2) へ代入して，

$$S(\Delta, \vec{\zeta}) \approx \sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s_i)) \cdot \boldsymbol{r}'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \tag{2.3.4}$$

となる．$\boldsymbol{r}'(t)$ は連続関数であること（定理の仮定），および t_{i-1} と s_i が非常に近いことを用いると，上の $\boldsymbol{r}'(t_{i-1})$ を $\boldsymbol{r}'(s_i)$ で置き換えても良いだろう．結果として，

$$S(\Delta, \vec{\zeta}) \approx \sum_{i=1}^n \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s_i)) \cdot \boldsymbol{r}'(s_i)(t_i - t_{i-1}) \tag{2.3.5}$$

を得る．ところが，この表式は積分 $\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\, dt$ のリーマン和による近似に他ならない．従って，線積分が存在するとの仮定の下では，分割を細かくしていった極限で，(2.3.9) は $\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\, dt$ に収束するはずなのである．(興味のある人は，上で $\approx$ と誤魔化したところを埋めてみよう.) □

[2]実のところ，曲線をパラメーター表示したから，(2.2.5) のリーマン和は，適当な t_i, s_i を用いて，必ず (2.3.2) の形に書ける．この意味で，ここまでは前節の書き直しに過ぎない．前節でそのようにパラメーター t を用いて書かなかったのは，そのようにすると $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t_i))$ などと引数が増えて式がややこしくなり，見にくくなると考えたからである

[3]興味のある人への注：ここを厳密に評価するには，平均値の定理を用いる

2.3.1 （少し脇道）曲線の長さの表式と線積分

もしかしたら高校か大学一年で，曲線の長さについて習ったかもしれない．これは大ざっぱには，

$$\int_0^1 \|\boldsymbol{r}'(t)\|\,dt \tag{2.3.6}$$

で与えられるものである.（ここで，ベクトル $\boldsymbol{a} = (x, y, z)$ に対し，その長さを $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で定義した.）これは，今まで定義してきた線積分において

$$\boldsymbol{F}\bigl(\boldsymbol{r}(t)\bigr) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|} \tag{2.3.7}$$

としたものに等しい．なぜこれでよいのか，考えてみよう.（ヒント：上のベクトルは，長さが 1 の，曲線の接ベクトルになっている.）

なお，本によっては「弧長（曲線の長さ）による線積分」と称して，スカラーの関数 $f(x, y, z)$ に対する積分

$$\int_0^1 f(x, y, z)\|\boldsymbol{r}'(t)\|\,dt \tag{2.3.8}$$

が挙げられていることもある．しかし，この積分は，我々の線積分の定義において

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|}\,f(\boldsymbol{r}(t)) \tag{2.3.9}$$

ととったものに等しい．つまり我々の定義の特殊な場合に過ぎないので，この講義では (2.3.8) の定義はあからさまには採用しなかった（これがなぜ「弧長に関する線積分」と呼ばれるか，考えてみよう）.

(2.3.8) について，もう少し補足しておく．これまでに主に扱った線積分 (2.3.1) は

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,dt \tag{2.3.10}$$

というもので,（物理的応用の「仕事量」で言ったように）曲線の向きにどれくらい $\boldsymbol{F}$ が向いているか，を表す量である．しかし，このようなベクトル量以前に，スカラー量を線積分したくなる場合もある．例えば,

> 曲線 C の形をした細い針金があり，その線密度は ρ で与えられている（針金の場所ごとに変わる)．針金全体の重さはいくらか？
>
> 曲線 C に沿って粒子が運動するとき，大きさが場所による摩擦力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を受ける．粒子のされた仕事はいくらか？

1 番目の問題では針金の密度を針金に沿って積分していったものが答えのはず．つまり

$$\int_0^1 \rho(\boldsymbol{r}(t))\big|\,|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt \tag{2.3.11}$$

が答え．また 2 番目の問題では，粒子の運動する向きと正反対の方向に力がかかっているわけだ．従って，この場合は力の大きさ $|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})|$ を，曲線の長さで積分したもの（の符号を変えたもの）が答えになるだろう．つまり,

$$-\int_0^1 \bigl|\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\,\bigr|\,|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt \tag{2.3.12}$$

が答えのはずである．このように，一成分（スカラー）の関数 $f(\boldsymbol{r})$ を曲線の長さで積分したものも「線積分」と呼び,

$$\int_C f(\boldsymbol{r})\,ds \qquad \text{または} \qquad \int_C f(\boldsymbol{r})\,|d\boldsymbol{r}| \qquad \text{または} \qquad \int_0^1 f(\boldsymbol{r}(t))\,|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt \tag{2.3.13}$$

などと書く（最後のは記号と言うよりは計算方法だけど)．この書き方を使って線積分 (2.3.1) をむりやり書くと,

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,dt = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\;|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt = \int_C (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})ds \tag{2.3.14}$$

となる．ここで曲線の接ベクトル（長さ 1）を

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$$

として導入した．このように「線積分」には２通りのものがあるから区別が必要である．

なお，この２番目の線積分も説明したのは，$\int_C (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})ds$ などの書き方が，

> $\boldsymbol{F}$ の接線方法の成分 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}$ を曲線の長さ ds で積分

という意味づけがはっきりするかもしれないと考えたからである.（これから見るように，面積分でも２通りの定義がある.）

2.4 面積分の定義

線積分と同じく，面積分の定義にも大きく分けて２つある．曲線は曲面よりも厄介だし，図を描くのも大変だから，少し大まかな話になってしまうが，ご了承されたい．

以下の２通りの問題を考える．

> 問１．曲面 S があり，その面密度は（場所ごとに違うが）$\rho(\boldsymbol{r})$ と与えられている．この曲面全体の質量を求めよ.（この答えは「曲面積による積分」で与えられる.）
>
> 問２．曲面 S があり，その表面を時間的には一定の速さで流体が貫いて流れている．貫いて流れる流体の速度は（場所ごとに違うが）$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ で与えられている．単位時間にこの曲面全体を貫いて流れる流体のの重さを求めよ．流体の密度はいつでもどこでも１だとする.（この答えは単に「面積分」と呼ばれるもので与えられる.）

見てのとおり，問１が前節の最後に補足した「弧長についての線積分」に相当し，問２が「力による仕事」に相当する．この２つは密接に結びついているが，今回は問１から始めるのがわかりやすいだろう．ただし，皆さんが工学部の学生さんであることに考慮し，この講義では主に上の問２に相当するものを扱う．

面積による面積分（問１；教科書の p.166）.

問１に答えるのは,（少なくとも概念的には）簡単だ．全体の重さを出すには,（密度）かける（面積）をやればよいが，今の場合，密度が曲面の場所ごとに変わっているのがちと厄介．でも曲面を細かく区切ってやると，それぞれの細かい部分の重さは

> （細かい部分の密度） × （細かい部分の面積）

で与えられるわけだから，これを全部足し挙げればよい．これは「曲面の密度を，その面積で積分した」と言ってもよいだろう．従って，面積分の第一の定義に導かれる：

$$\int_S f(\boldsymbol{r})\,d\sigma(\boldsymbol{r}) = \lim_{\text{分割を細かく}} \sum（\text{細かい部分の面積}）\times（\text{そこでの } f \text{ の値}） \tag{2.4.1}$$

この左辺は基本的には右辺で定義される，単なる記号である．ただし，記号にも少しは意味があって，$d\sigma(\boldsymbol{r})$ というのは「$\boldsymbol{r}$ における細かい部分の面積」を表しているつもりだ．

後のことを考えてもう少し具体的に書いておくと以下のようになる．

- ともかく，曲面を細かく分ける（２重積分の時にやったようなつもりで）．分けたもの（分け方）を Δ と書く．また，曲面が分けられた細かい破片の一つ一つを $S_1, S_2, S_3, \ldots$ と書く．
- 細かい破片 S_i の上の一点 η_i を適当にとる．
- 細かい破片 S_i そのものはまだ曲がっているかもしれず，その面積は定義しにくい．そこで，S_i の，η_i における接平面を考える．そして，S_i をこの接平面に射影した部分の面積を $\tau_i(\eta_i)$ と書く．

- リーマン和に相当するものとして，
$$S(\Delta, \vec{\eta}) = \sum_i f(\eta_i)\, \tau_i(\eta_i) \tag{2.4.2}$$
を考える．

- 求める「曲面積による積分」は，分割 Δ を細かくした先の
$$\int_S f(\boldsymbol{r}) d\sigma(\boldsymbol{r}) = \lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta; \vec{\eta}) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i f(\eta_i)\, \tau_i(\eta_i) \tag{2.4.3}$$
として定義する — もちろん，この極限が $\vec{\eta}$ の取り方によらずに存在する場合に限って定義する．極限が存在しない場合，積分は定義できないと考える．

なお，上では暗黙のうちに「曲面 S に対する接平面がどこででも作れる」ことを仮定している．これが成り立たないような曲面では曲面積すら定義できないこともあるので，これは妥当な仮定だろう．

曲面の向きに関する注意（問２に向けて）

これから第２の問題を考えるが，それには「曲面の向き」を決めてかかる必要がある．つまり，曲面に「裏」と「表」を決め，流体が曲面を「裏から表」の向きに貫いているなら流量はプラス,「表から裏」に貫いているなら流量はマイナス，とする．曲面のどっちを表，どっちを裏にするかは全く勝手であるが，ともかくどっちが表でどっちが裏かを決めたら，後はその定義を変えないことが大事である．以下では表と裏は既に決めたものとして話を進める．

- 数学の本では「表」「裏」とはあまり言わず,「裏から表の向き」のことを単に「曲面の外向き」と呼ぶことが多いので，以下でもそれに従う．
- 曲面によっては，表と裏が分離できないものもある（メビウスの帯など）．表と裏が分離できる曲面を「向き付け可能」な曲面といい，以下では向き付け可能なものだけを考える．

普通の面積分（問２；教科書ではあまり明確にでてこない．p.202 の (6.1) 式の右辺の量が一例）

第２の問題の答えを先に言うと，それは以下のような「面積分」で与えられる．
$$\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \equiv \int_S \bigl(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\bigr)\, d\sigma(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.4}$$
ここで左辺は新しく導入した記号で，右辺がその定義を与えている．ここで $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ とは，曲面上の点 $\boldsymbol{r}$ における曲面の外向き法線ベクトル（長さ 1）であり，右辺は $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{n}$ の内積（つまり，$\boldsymbol{F}$ の曲面の法線方向の成分）を曲面の面積で積分すべし，と言っているのだ．左辺の記号について言うと，$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} d\sigma$ とは $d\sigma$ の親戚でやはり微少面積を表すが，今はそれが外向き法線ベクトルの向きを向いている.（$d\boldsymbol{S}$ を曲面の微分要素，または簡単に「面素ベクトル」という.）

この２つ目の定義の意味を理解するには，問２に戻って曲面の小さな部分に分けて考えていくのが良いだろう．

Step 1. 考えている曲面が平面の一部で，かつ流体の速度は場所によらず一定で，面に垂直な場合．

このときは考えている曲面を通過する液体の分量は，単に（曲面の面積）と（液体の速度）をかけたものになる．考えている曲面の面積を S，流体の速度の大きさを u とすると，答えは Su.

Step 2. 考えている曲面は平面の一部で，流体の速度 $\boldsymbol{u}$ は場所によらず一定の場合．

考えている曲面を通過するのに有効な速度は，液体の速度 $\boldsymbol{u}$ のうちの曲面に垂直な成分である．これは曲面の外向き法線ベクトル（長さ 1）を $\boldsymbol{n}$ と書くと，$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$ で与えられる．従って，Step 1 から答えは $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n})\, S$.（ただし，これは流体が曲面の裏から表へ抜けている場合である．向きが逆なら符号も逆になる.）

Step 3. 考えている曲面が小さな三角形の集まりで，流体の速度 $\boldsymbol{u}$ は場所によるが，小さな三角形の内部では一定の場合．

小さな三角形を S_i，その面積も S_i と書くことにしよう．S_i の外向き法線ベクトル（長さ 1）を $\boldsymbol{n}_i$ と書くと，S_i を通り抜ける流体の量は（Step 2 から）$(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{n}_i)S_i$ である（ここで $\boldsymbol{u}_i$ は S_i での流体の速度ベクトル）．よって，全体の流体の量は

$$\sum_i (\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{n}_i)\, S_i \tag{2.4.5}$$

である．数式の通りであるが，それぞれの三角形における速度ベクトルの法線方向成分（$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{n}_i$）と，その三角形の面積 S_i をかけて和をとった形である．

Step 4. 一般の場合.

やるべき事はもう明らかだろう．くにゃくにゃ曲がっている曲面は扱いにくいので，こいつをまず，細かく分け，分け方を「分割」Δ とする．分けたそれぞれを S_i と書き，Step 3 へ持ち込みたい．しかし，細かく分けられた一つ一つは小さいとはいえ，曲がっているかもしれないので，平面で近似しなければ面積が決められない．そこで S_i 内の一点 η_i をとり，η_i での S_i への接平面を考える．そして S_i をこの接平面に射影した部分の面積を $\tau_i(\eta_i)$ とする．（分割が細かくなれば S_i とその接平面はほとんど重なり，$\tau_i(\eta_i)$ は S_i の面積に近いだろう，と期待する.）

τ_i の部分を通過する流体の量は，ここでの外向き法線ベクトル（長さ 1）$\boldsymbol{n}_i$ とここでの流体の速度ベクトル（$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}(\eta_i)$）を用いて $(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{n}_i)\tau_i(\eta_i)$ と書けるはずだ．従って，曲面全体を貫く流量の近似値として，リーマン和

$$S(\Delta, \vec{\eta}) = \sum_i (\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{n}_i)\tau_i(\eta_i) = \sum_i \big(\boldsymbol{u}(\eta_i) \cdot \boldsymbol{n}(\eta_i)\big)\tau_i(\eta_i) \tag{2.4.6}$$

が得られる．後は分割を細かくした極限を考え，これが $\vec{\eta}$ の取り方にかかわらず同一の極限を持つなら，その極限を面積分の値と定義する：

$$\int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_i \big(\boldsymbol{u}(\eta_i) \cdot \boldsymbol{n}(\eta_i)\big)\, \tau_i(\eta_i) \tag{2.4.7}$$

以上が面積分の定義だが，右辺のリーマン和の形をよく見ると，これは $f(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ としたときの「曲面積による面積分」(2.4.3) と同じである．従って，上で定義した面積分は,「曲面積による面積分」を用いて，

$$\int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\, d\sigma \tag{2.4.8}$$

とも書けるはずであって，これが (2.4.4) の意味である．

2.5 面積分の計算法

面積分を一応，定義したのだが，実際の計算にはもう少しの考察が必要だ．特に,「微少な面積 $d\sigma$ をどう表すか」「曲面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ をどう書くか」が問題である．この２つを考えていこう．

その前に：ベクトルの外積についての補足（詳しくは教科書の 2.6 節を参照）

もう知っていることとは思うが，簡単に述べておく，３次元空間内のベクトル $\boldsymbol{a} \equiv (a_1 a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b} \equiv (b_1, b_2, b_3)$ に対して，その外積と呼ばれるベクトル（$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と書く）を

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \tag{2.5.1}$$

として定義する．このベクトルの長さは $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\theta$ であり（θ は２つのベクトルのなす角度)，向きは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方に垂直な向きである．

また，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が与えられると，この２つのベクトルを２辺とするような平行四辺形が定まる．その面積は $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ になる．

（本題に戻る）まず，考えている曲面は $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ のように，パラメーター (u, v) の関数として表現されているものとする.（これは曲線が $\boldsymbol{r}(u)$ と，１パラメーターの関数で表されたのと同じ.）この表現には当然，$z = f(x, y)$ と言うものも含まれることに注意（$x = u, y = v, z = f(u, v)$ というパラメーター表示とみなせるから）．なお，曲面 S を表すためには，パラメーター (u, v) は領域 U をくまなく動くものとしておく．

我々は「曲面積に関する積分」$\displaystyle\int_S f(\boldsymbol{r})d\sigma(\boldsymbol{r})$ を，領域 U に関するなんらかの uv-積分として表したい．どうすべきだろうか？

ええ加減に考えて，

$$\int_U f(\boldsymbol{r}(u,v))\,dudv \qquad \text{（間違い！）} \tag{2.5.2}$$

のようなものが出てくるのではないかと思われる —— $\boldsymbol{r}$ は曲面 S をくまなく動くのだから，(u,v) でみればこれは U を動くし，f の引数 $\boldsymbol{r}$ は当然，$\boldsymbol{r}(u,v)$ と表すべきだ．問題は $d\sigma$ の部分なのだが，これは単純な $dudv$ にならない．

その理由は２重積分の変数変換を思い出すとわかりやすい．そこでは $\iint_A f(x,y)dxdy$ を新しい変数 (u,v) の積分で書き直すことを考えた．答えは $\iint g(u,v)dudv$ ではなくて，ヤコビアン $J(u,v)$ が入って $\iint g(u,v)|J(u,v)|dudv$ となった．ヤコビアンの出た理由は，$dxdy$ の表す面積と $dudv$ の表す面積の比を補正するためだった．((u,v)-平面を区切って作った細かい部分 $dudv$ が，xy-平面ではどのような部分に対応しているのか，かつその面積比はどうか，などの議論をしたことを思い出そう.)

今も同じ事である．uv-平面を細かく区切って小さな長方形を作った場合，それが曲面上ではどのような図形に対応しているか（かつその面積は？）を考えよう（この辺りはクライツィグの 4.5 節が参考になるだろう）．

uv-平面上での小さな長方形の左下を (u,v)，右上を $(u_2,v_2)=(u+\varDelta u, v+\varDelta v)$ とする（もちろん，$\varDelta u, \varDelta v$ は非常に小さい）．これが曲面上では，長方形を少し変形したもの（平行四辺形に近い）に移るはずで，その頂点の座標は，(u,v) に対応するものが $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，(u_2,v_2) に対応するものが $(x(u_2,v_2),y(u_2,v_2),z(u_2,v_2))$ である．これを近似的に平行四辺形とみなすと，その２辺を張るベクトルは

$$(x(u_2,v),y(u_2,v),z(u_2,v))-(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \approx \Bigl(\frac{\partial x}{\partial u}\varDelta u, \frac{\partial y}{\partial u}\varDelta u, \frac{\partial z}{\partial u}\varDelta u\Bigr) = \Bigl(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\Bigr)\varDelta u \tag{2.5.3}$$

と

$$(x(u,v_2),y(u,v_2),z(u,v_2))-(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \approx \Bigl(\frac{\partial x}{\partial v}\varDelta v, \frac{\partial y}{\partial v}\varDelta v, \frac{\partial z}{\partial v}\varDelta v\Bigr) = \Bigl(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\Bigr)\varDelta v \tag{2.5.4}$$

よって，この小さな近似的平行四辺形の面積は，これら２つのベクトルの外積で与えられる．記号が大変なので，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ に対して，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \equiv \Bigl(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\Bigr), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \equiv \Bigl(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\Bigr) \tag{2.5.5}$$

を定義すると，問題の近似的平行四辺形を張るベクトルは

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\varDelta u \qquad \text{と} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\varDelta v \tag{2.5.6}$$

であり，その面積は

$$\Bigl|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\,\varDelta u\varDelta v\Bigr| = \Bigl|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Bigr|\,\varDelta u\varDelta v \tag{2.5.7}$$

で与えられる．これが $d\sigma$ に相当するものだから，$dudv$ と $d\sigma$ との比は $\Bigl|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Bigr|$ であることがわかった.

従って，このファクターを補正してやると,「曲面積による積分」は

$$\int_S f(\boldsymbol{r})d\sigma(\boldsymbol{r}) = \int_U f\bigl(\boldsymbol{r}(u,v)\bigr)\Bigl|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Bigr|\,dudv \tag{2.5.8}$$

である，ことがわかる．ともかく，この公式を使えば積分は計算できそうだね.

次に，通常の面積分 (2.4.4) を考えよう．これは右辺から見ていくのが良い．$d\sigma$ については既に解明したから，$\boldsymbol{n}$ は何か，を考える．この法線ベクトルは平行四辺形の２つのベクトル (2.5.6) に垂直なものであるから，その成分は

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \tag{2.5.9}$$

に比例しているはずである．長さを１にするにはこいつの長さで割ればよい，よって，

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \pm\frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\Bigl|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Bigr|} \tag{2.5.10}$$

となるはず．ここで ± となっているのは，求めた外積が我々の決めた「外向き」になっているかどうかを調整するためのものである．(パラメーター (u, v) の入れ方によって，この外積の向きはどうにでもなるから，ここは注意すべし.)

結局，求める面積分は

$$\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \pm \int_U \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|} \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| du dv = \pm \int_U \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) du dv \quad (2.5.11)$$

と書けることがわかった．($\boldsymbol{n}$ を規格化した分母がちょうどキャンセルしたことに注意.）ここでも ± は，$\boldsymbol{n}$ が正しく外向きになるように調節するためのものであり，最右辺の非積分関数は $\boldsymbol{F}$ と $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ の内積である..

折角，面積分の定義をやったので，非常に重要な応用例について，考えておく．すなわち，半径 r の球面を考え，その動径方向を「裏から表の向き」とした場合，面積分が極座標でどのように表されるか，考えてみよう．２通りの方法でやっておく．

（方法１）前回のプリントのように，律儀に計算する方法.

球面を極座標で表すと，$x = r \sin\theta \cos\phi, y = r \sin\theta \sin\phi, z = r\cos\theta$ である．曲面を表すパラメーターは θ, ϕ だから，前回のプリントにあるように計算していくと，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = r(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = r(-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0) \quad (2.5.12)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = r^2 \sin\theta\,(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \quad (2.5.13)$$

となる．実は上をよく見ると，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = r^2 \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{r}} \quad (2.5.14)$$

となっていることもわかる．ここで $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/\|\boldsymbol{r}\|$ は $\boldsymbol{r}$ の向きを向いた単位ベクトルで，曲面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ に相当する．したがって,「曲面積による積分」は

$$\int_U f(\boldsymbol{r})\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \quad (2.5.15)$$

と書けることがわかった．面積要素の大きさは $r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$ である.

また，通常の面積分は,

$$\int_U \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{r}}\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \quad (2.5.16)$$

と書けることもわかる.

（方法２）

実質的には上と同じだが，もうちょっと直感的に誤魔化す方法．要するに，$\varDelta\theta \times \varDelta\phi$ に相当する球面上の面積が何か，を求めるのである．これは球面の図を書いて考えると良い（講義で説明）．球面の法線ベクトルが動径の方向であるのは明らかだから，この面積の変換さえ考えれば良いわけだ.