

発展問題:

重積分の順序交換の応用として, 1変数関数のテイラーの定理(剰余項の表式つき)を導いてみよう. 簡単のため, 関数 $f(x)$ はすべての x で無限階微分可能だとする.

1. 微分積分学の基本定理から以下が成り立つことに注意しよう(ここで $f'(t)$ は $f(t)$ の, t に関する導関数)

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, \quad \text{同様に, } f'(t) = f'(a) + \int_a^t f''(s)ds \quad (1.5.16)$$

2. 右の式を左の式に代入して, $f(x)$ の表式を作れ. そこに出てくる2重積分の順序を交換して

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-s)f''(s)ds \quad (1.5.17)$$

が成り立つことを示せ.

3. これを帰納法的にくり返して, $f(x)$ の n 次のテイラー展開の式を求めよ.

この結果として得られる表式は剰余項を積分で与えてくれるものなので, かなり使いやすい. 通常は「区間 $[a, x]$ 中の一点 x_1 があって, $f^{(n+1)}(x_1)(x-a)^{n+1}/(n+1)!$ が剰余項」などとするが, これでは x_1 がどこにあるのかわかりにくいので, 困ることがある.

1.6 重積分の変数変換

1変数関数の積分では変数変換(置換積分)の公式が存在した, 多重積分においても同様の公式が存在し, かつ實際上, 非常に有用である.

1次元の場合を思い出そう. この場合, $x = x(t)$ と変数変換すると,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t)) x'(t) dt \quad (1.6.1)$$

であった(t_1, t_2 は $x(t)$ がそれぞれ x_1, x_2 になる t の値). x と t の間で, 座標が伸び縮みした分を考慮に入れるために, $x'(t)$ が必要になったのである.

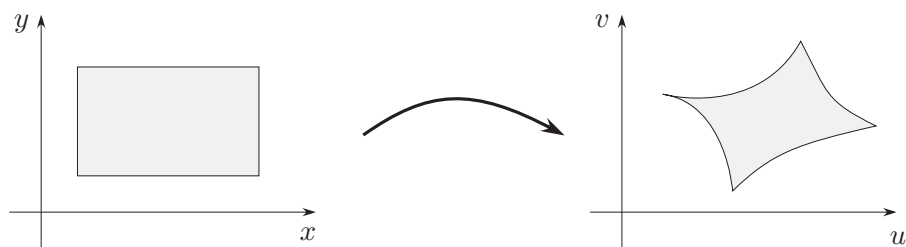
2重積分の時に, これに相当するものは何だろうか? 今, (x, y) から新しい座標 (u, v) に移ることを考える. ここで新しい座標系が (u, v) だが, 後々が楽になるので, (x, y) と (u, v) の関係を

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (1.6.2)$$

と書くことにする. 例としては, $x = u + v, y = u - v$ などを想定して欲しい. このとき, (x, y) でみた時の積分領域 A が, (u, v) では B になるとしよう. また, 上の変数変換をして f を表したものを $g(u, v)$ と書こう:

$$g(u, v) \equiv f(x(u, v), y(u, v)). \quad (1.6.3)$$

さて, 問題: 重積分 $\iint_A f(x, y) dx dy$ は, u, v での重積分として, どのように書けるだろうか?



単純に考えて、積分領域 A が B になるのだから、

$$\text{(間違い!!!)} \quad \iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B g(u, v) du dv \quad \text{(間違い!!!)} \quad (1.6.4)$$

となると思ったら、一般には間違いである。これが間違いであることは、1次元の時を思いだせば、ある程度は理解できる。1次元の場合、区間 $[x_1, x_2]$ が区間 $[t_1, t_2]$ に変わったからと言って、

$$\text{(間違い!!!)} \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t)) dt \quad \text{(間違い!!!)} \quad (1.6.5)$$

ではなかった。変数変換によって区間が伸び縮みする効果を考えに入れるために、 $x'(t)$ が必要だったわけね。

重積分でも事情は同じで、変数変換によって座標が伸び縮みした効果を表すものが必要である。ただし、考えている座標の変換が2次元的だから、伸び縮みだけでなく、「ひねり」の要素も加わるので、話がややこしい。

答えを言ってしまうと、以下のようになる。

まず、変数変換に対応して、ヤコビアン と呼ばれる関数 $J(u, v)$ を、以下の行列式で定義する：

$$J(u, v) \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}. \quad (1.6.6)$$

また、変数変換は十分に性質の良いもの、つまり

- 領域 A と B の点が1対1に対応し、
- $x = x(u, v)$ と $y = y(u, v)$ が偏微分可能で導関数が連続、
- B 内でヤコビアン $J(u, v)$ がゼロでない

だとする。このとき、

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_B g(u, v) |J(u, v)| du dv \quad (1.6.7)$$

である。

なお、上の定理では、ヤコビアンの絶対値をとったものが現れていることにも注意しよう。1次元の積分では $x'(t)$ (絶対値ではない) が出ていたこととちょっと違う。この理由は、重積分では本質的に「積分の向き」がないことに関係している。

非常に重要な例：平面の極座標

直交座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への変換を考えよう。座標変換の式は

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1.6.8)$$

であるから、ヤコビアンは

$$J(r, \theta) = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \quad (1.6.9)$$

というわけで、皆さんのよく知っている(はずの) $dx dy$ を $r dr d\theta$ に変換するのが出てきた..

言うまでもなく、このような変数変換は、それをやることによって初めて積分できる場合が多いから重要なのだ。

例えば積分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ はこのままでは積分が非常に難しい。しかし、極座標に変換すると

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^1 dr r \int_0^{2\pi} d\theta e^{-r^2} = 2\pi \int_0^1 e^{-r^2} r dr = 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^1 = \pi(1 - e^{-1}) \quad (1.6.10)$$

と計算できる .

このような応用例としては

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \tag{1.6.11}$$

の証明がある . 答えを知ってないととても出来そうにないが , これは

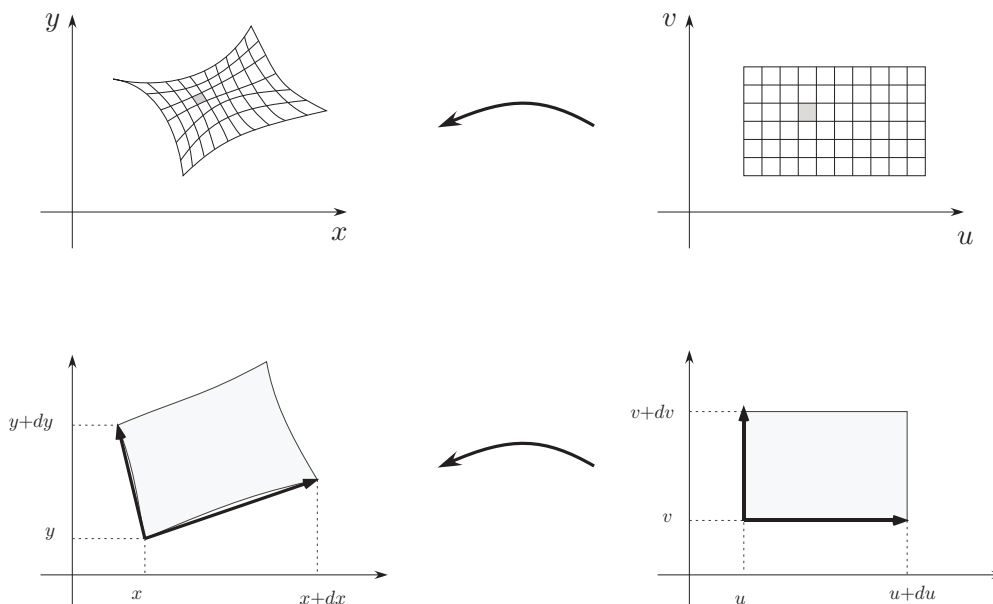
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \tag{1.6.12}$$

と考えると極座標に変換すると計算できるのだ .

ヤコビアンの意味

上の変数変換の式 (ヤコビアン) が出てくる理由を述べよう . そのためには重積分の定義に戻って考えるのが良い .

何度も強調したように , $\iint_A f(x, y) dx dy$ とは , xy 座標系を細かく四角に区切って , その四角の面積と $f(x, y)$ の値をかけたものを足し併せ (たものの極限をと) る , ことだった . 同様に , $\iint_B h(u, v) du dv$ は , uv 座標系での四角の面積と h の値をかけて和をとるわけ .



さて , uv -平面での小さな四角 $[u, u + du] \times [v, v + dv]$ を考えよう . これがもとの xy -平面で囲む図形は , その4つの頂点が

$$(x(u, v), y(u, v)), (x(u + du, v), y(u + du, v)), (x(u, v + dv), y(u, v + dv)), (x(u + du, v + dv), y(u + du, v + dv)) \tag{1.6.13}$$

で与えられる , 近似的な平行四辺形になる . この平行四辺形を作る2つのベクトルは du, dv が非常に小さいとすると ,

$$\begin{bmatrix} x(u + du, v) - x(u, v) \\ y(u + du, v) - y(u, v) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du \\ \frac{\partial y}{\partial u} du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} du \quad \text{と} \quad \begin{bmatrix} x(u, v + dv) - x(u, v) \\ y(u, v + dv) - y(u, v) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} dv \tag{1.6.14}$$

である . ところで , ベクトル (a, b) と (c, d) の作る平行四辺形の面積は , 行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の行列式 , つまり $ad - bc$ (の絶対値) で与えられた (線形代数の講義を思い出そう ; 忘れていても , 初等的にも導けるよ) . これを用いると , 考えている近似的な平行四辺形の面積は以下 (の絶対値) になるはずだ .

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ \frac{\partial y}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} du dv = J(u, v) du dv \tag{1.6.15}$$

このようにしてヤコビアンが登場するのである。 □

1.7 3次元以上の重積分

いままで、平面上の領域での重積分を考えてきた。空間内での積分(3重積分)は平面の場合と全く同様のアイデアで定義される。ただし、平面の場合には考える積分領域(2次元)を細かい長方形のメッシュで覆ったが、3次元の場合には積分領域(3次元)を細かい直方体で覆うところが異なる(これ以外は全く同じだからくり返さない。でもよく考えると、1次元と2次元の差も、覆う対象が1次元の領域か2次元の領域か、それに依じて分け方を変えただけだった。)

4次元以上での積分(4重積分, 5重積分)も同様に定義できるが、同じなのでくり返さない。

これらの n 重積分も、2重積分と同様の性質を持っている。すなわち、

1. n 重積分は、非積分関数と積分領域の性質が良ければ、 n 個の累次積分で表せる。実際に累次積分に直すには、 n -次元空間での積分領域を図示して(4次元以上では不可能だが、少なくともできるだけ思い浮かべて)、丁寧に直していけばよい。
2. n 重積分においても、性質の良い変数変換に対しては、ヤコビアンを用いた変数変換の公式が成り立つ。勿論、この場合のヤコビアンは $n \times n$ 行列の行列式である。

ヤコビアンについて補足しておく。 n 次元での元々の座標が (x_1, x_2, \dots, x_n) 、新しい座標が (u_1, u_2, \dots, u_n) で、各 x_i は u_1 から u_n の関数として書けているとする。このとき、

$$\iint \cdots \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \iint \cdots \int_B g(u_1, u_2, \dots, u_n) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} \right| du_1 du_2 \cdots du_n \quad (1.7.1)$$

となる。ここで B は新しい座標 (u_1, u_2, \dots, u_n) で見た積分領域 A のことであり、 g は対応する点での f の値を表す。また、ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \quad (1.7.2)$$

という $n \times n$ 行列の行列式である。

座標変換で最も重要なのは極座標への変換であろう。3次元の場合、これは

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (1.7.3)$$

で、 (r, θ, ϕ) の動く範囲はそれぞれ $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ である。この場合のヤコビアンは(各自確かめる)

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \det \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix} = r^2 \sin \theta \quad (1.7.4)$$

となる。以下に極座標関連の発展問題を2つ載せる。どちらもかなり大変だから、無理にできるようになる必要はない。今できることよりも、将来、何らかの役に立つだろうと思って載せている。

発展問題:

4次元以上の極座標と、そのヤコビアンがどうなるか、一度はやってみると良い。ただし、一般次元では計算が非常に大変であるから、相当の覚悟が必要。

発展問題その2:

n を3以上の整数とする。原点を中心とする半径 r の n -次元球とは、 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2$ を満たす点の集合である。こいつの体積 $V_n(r)$ を求めるには、いくつかの方法がある。

- 上の発展問題で求めたはずのヤコビアンを用いて, n -次元極座標へ変換した積分を行う. 非積分関数には, この球の定義関数をとればよい. この方法は一番の基本だが, ヤコビアンの計算が大変で死ぬことが多い...
- この球を x_n が一定の面で切ると, その切り口は半径が $\sqrt{r^2 - x_n^2}$ の, $(n-1)$ 次元球になる. この切り口の面積 (体積) を x_n で積分することで, n 次元球の体積が求められるはずだ:

$$V_n(r) = \int_{-r}^r dx_n V_{n-1}(\sqrt{r^2 - x_n^2}) \quad (1.7.5)$$

一方, 相似な図形の体積を考えると, 半径 r と半径 1 の球の体積の比は丁度 r^n のはずである:

$$V_n(r) = r^n V_n(1) = r^n \times a_n \quad (1.7.6)$$

この2つの式を組み合わせると, a_n と a_{n-1} の間の漸化式が得られる. 2次元球 (円) や3次元球では $a_2 = \pi, a_3 = 4\pi/3$ を知っているから, 漸化式を解くことで a_n と $V_n(r)$ がわかる.

- n 次元のガウス積分 $\int \dots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 dx_2 \dots dx_n$ を以下の別々の方法で計算して, 結果を比較する.
 - 指数関数が積に分かれることから, 各成分でバラバラに積分する. 結果は $\pi^{n/2}$ のはず.
 - n 次元の極座標に変数変換するつもりになる. しかし, 今は非積分関数が球対称だから, 角度成分は積分できてしまって, 結局 $\int_0^\infty dr r^{n-1} c_n e^{-r^2}$ の形になるはずだ. ここで c_n は n -次元の立体角 (半径 1 の n -次元球の表面積) であり, a_n とは, $c_n = n a_n$ の関係にある.

両者を等置して,

$$\pi^{n/2} = n a_n \int_0^\infty dr r^{n-1} e^{-r^2} \quad (1.7.7)$$

となるはずで, これから a_n と $V_n(r)$ が求まる (右辺の積分 Γ -関数で表される.)

1.8 おまけ: 広義多重積分

1変数関数の場合, 広義積分というのは $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ や $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ のように, (1) 非積分関数がある点で無限大になってしまうもの (2) 積分区間が無限の大きさを持つてしまうもの, などを言った. これらは共に, 最低限のリーマン積分の定義からはみ出しており, 何らかの補足的な定義を必要とするからである.

そして実際, これらの積分は以下のような極限として定義 (解釈) された:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{1}{1+x^2} dx \quad (1.8.1)$$

(これらの極限が存在する場合, その極限値を広義積分の値と定義する.) 左の例では $x=0$ で非積分関数が無限大になるので, そこを ϵ だけ避けた形の積分をまず考え, $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を考えている. 右の例では積分区間が無限に広いから, $[0, R]$ という有限のところでの積分をまず考え, $R \rightarrow \infty$ とすることで無限区間での積分を再現したつもりになっている.

なお, $\lim_{\epsilon \downarrow 0}$ というのは, ϵ を正のままゼロに近づける, の意味であり, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0+}$, $\lim_{\epsilon \rightarrow +0}$ などとも書く.

重積分の場合も広義積分は極限として定義するが, 極限の取り方がもっと色々あるから大変だ. 例えば, 「平面全体」で積分する場合, どのような形の有限領域を拡大していくかで極限が異なる可能性がある (1次元の時でさえ, $\int_{-\infty}^\infty dx f(x)$ とは, プラスとマイナスの方向を別々に無限大にすることだった.)

一応, 定義に類するものを与えておこう.

定義 1.8.1 (広義積分のちょっといい加減な定義) 平面内の図形 A で関数 f を積分し, $\iint_A f(x, y) dx dy$ を求めたいが, 非積分関数が無限大になったり, 積分領域が無限に広がったりして, いままでの重積分の定義が適用できないとしよう. このとき, 以下のような積分領域の列を考える.

- (a) 図形 A は有界だが, その内の一点 a で f が無限大になる場合: このときは一点 a とその周囲を少し除いた形の領域の列 $\{A_n\}$ で, $n \rightarrow \infty$ では A に一致するようなものを考える.
- (b) 図形 A が無限の広がりを持つ場合: このときは, 有界な領域の列 $\{A_n\}$ で, $n \rightarrow \infty$ では A に一致 (近づく) ようなもの考える.

このどちらの場合でも, もし, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{A_n} f(x, y) dx dy \quad (1.8.2)$$

がすべての $\{A_n\}$ の取り方に対して存在し, かつその極限が $\{A_n\}$ の取り方に依らないならば, この極限を広義積分 $\iint_A f(x, y) dx dy$ の値と定める. 極限が存在しなかったり, 極限が $\{A_n\}$ の取り方によるばあいは, 広義積分 $\iint_A f(x, y) dx dy$ は存在しない, という.

上の (a), (b) の両方に該当する場合や f が無限大になる点が複数ある場合などは, その都度, 適当に A_n をとって考える. なお, 問題によっては, 特定の列 $\{A_n\}$ についてのみ極限があればよしとする場合もあるので注意.

あまり一般的にやってもややこしくなるだけなので, 以下の2つの例を中心に考える ($\alpha > 0$ は定数).

$$(a) \int_{0 < x^2 + y^2 \leq 1} \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy, \quad (b) \int_{x^2 + y^2 \geq 1} \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy \quad (1.8.3)$$

(a) の場合, 非積分関数が原点で無限大になるが, とにかく半径1の円内で積分したい. そこで, A_n として, 円環 $\frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1$ をとってみる. 原点でやばいことがおこっているので, そのまわりを少しだけ除いた訳だ.

極座標に移ると, A_n は $\frac{1}{n} \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ の領域に移る. 従って,

$$\iint_{A_n} \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/n}^1 dr r \frac{1}{r^{2\alpha}} = 2\pi \int_{1/n}^1 dr r^{1-2\alpha} \quad (1.8.4)$$

が得られた. この積分は $\alpha < 1$ ならば, $n \rightarrow \infty$ でも存在する. 一方, $\alpha \geq 1$ では, $n \rightarrow \infty$ の時に発散してしまう. 従って, 元の重積分が定義できるためには, $\alpha < 1$ が必要であることがわかる.

なお, 広義積分の定義では, 上のような円環以外の A_n についての極限も考察し, それらがすべて同じであることを確かめねばならない. これはなかなか大変なのであるが, 今の場合非積分関数が正であるため, 積分の値は領域 A_n について単調増加である. つまり

$$A \subset B \quad \text{なら,} \quad \iint_A \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy \leq \iint_B \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy \quad (1.8.5)$$

が成り立つ. この性質を利用して, 一般の A_n での積分の値を, 上で定義した円環での積分の値で挟み込むことができ, このような議論からどのような A_n についても積分の極限值は等しいことがわかる. つまり, $\alpha < 1$ がこの広義積分の存在のための必要十分条件だ.

(b) の場合, 今度は積分領域が無限に広いので, $1 \leq x^2 + y^2 \leq n^2$ なる円環を A_n としてやろう. 極座標に移って同様に計算すると,

$$\iint_{A_n} \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy = \int_1^n dr r \frac{1}{r^{2\alpha}} = \int_1^n dr r^{1-2\alpha} \quad (1.8.6)$$

が得られる. この積分は $n \rightarrow \infty$ の時, $\alpha > 1$ なら収束するが, $\alpha \leq 1$ なら発散する. (a) の場合と同様に単調性を使って議論すると, この広義積分が定義されるためには $\alpha > 1$ が必要十分であることがわかる [(a) の場合と不等号の向きが逆なことに注意].