

1.3 重積分はいつ定義できるのか?

前節で2重積分を「定義」したが、どのような関数に対して、この定義が意味を持つのか、を知っておくことは大切だ(この定義が有効な例が極端に少なかったりしたら、意味がないから。)やりたいことは下の3つの命題に要約される。

その前に設定や補助的な定義などから。

- 先週と同じく、長方形 $A = [a, b] \times [c, d]$ 上で関数 $f(x, y)$ を積分することを考えている。 f はこの長方形上で有界としておく。
- A を横方向に n 個、縦方向に m 個に分割して分割 Δ を作り、その中の点 ζ_{ij} をとる(前回のプリント参照)。
- リーマン和は $S(\Delta, \vec{\zeta}) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$
- $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta, \vec{\zeta})$ の極限が存在するとき、 f は A 上で積分可能と言い、その極限を $\iint_A f(x, y) dx dy$ と定義する。
- 分割 Δ に対して以下のように定義する: 小さな長方形(ブロックとよぼう) I_{ij} における $f(x, y)$ の最大値と最小値(正確には上限と下限)を M_{ij}, m_{ij} と書くとき、

$$\bar{S}(\Delta) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \quad (1.3.1)$$

$$\underline{S}(\Delta) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \quad (1.3.2)$$

また、

$$\bar{S} = \inf\{\bar{S}(\Delta) \mid \Delta \text{ は } A \text{ の分割}\}, \quad \underline{S} = \sup\{\underline{S}(\Delta) \mid \Delta \text{ は } A \text{ の分割}\} \quad (1.3.3)$$

と書く。 \bar{S} を上積分、 \underline{S} を下積分という。

上積分、下積分の定義から、 $\vec{\zeta}$ の取り方にかかわらず、

$$\underline{S}(\Delta) \leq S(\Delta, \vec{\zeta}) \leq \bar{S}(\Delta) \quad (1.3.4)$$

であることはわかる。次の定理は、上積分や下積分は、自分自身では良い極限を持つことを保証する。

定理 1.3.1 (Darboux の定理) 分割 Δ を限りなく細かくするとき(つまり、 $|\Delta| \rightarrow 0$ で)、上積分 と 下積分 はそれぞれ一定の値に収束し、その行き先は \bar{S} と \underline{S} である。つまり、

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \bar{S}(\Delta) = \bar{S}, \quad \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \underline{S}(\Delta) = \underline{S}. \quad (1.3.5)$$

(ただし、 $\bar{S} = \underline{S}$ とは限らない。)

では、上積分・下積分と積分可能性の関係はどうか? \underline{S} と \bar{S} の \sup, \inf としての定義から

$$\underline{S} \leq \bar{S} \quad (1.3.6)$$

であることはわかるが、問題はこの2つがいつ、等しいかだ。これは積分可能性と同値だ、というのが下の定理。

定理 1.3.2 (積分可能性の必要十分条件) f が長方形 A 上で積分可能である必要十分条件は、上積分と下積分が一致することである。つまり

$$\bar{S} = \underline{S} \iff f \text{ は可積分で, } \iint_A f(x, y) dx dy = \bar{S} = \underline{S} \quad (1.3.7)$$

最後に、簡単な十分条件を挙げておく:

定理 1.3.3 (連続関数は積分可能) 関数 $f(x, y)$ が長方形 A 上で連続なら、 f は A 上で積分可能である。また、有限個の点を除くと連続な場合も積分可能である。

今年は演習との兼ね合いもあって、これらの定義や定理の詳しい説明は後回しにする．当面は上の定理 1.3.3 の主張がわかれば十分である（証明はわからなくても良い）．

上の3つの定理の証明は、1次元の積分の時と全く同じであり、何重積分かは全く関係ない．講義では1次元積分の場合を思い浮かべながら説明する予定．

証明の基本になるのは、以下の2つの性質である．

(1) $\bar{S}(\Delta)$ は分割を細かくすると減少する．より正確にいうと、勝手な分割 Δ_1, Δ_2 をとってきて、これを合わせた（つまり、両方の分割の分点を全部集めた）分割を $\Delta_{12} = \Delta_1 \cup \Delta_2$ と書くと、 $\bar{S}(\Delta_{12}) \leq \bar{S}(\Delta_1)$ および $\bar{S}(\Delta_{12}) \leq \bar{S}(\Delta_2)$ である．

(1') 同様に、 $\underline{S}(\Delta)$ は分割を細かくすると増加する．

(2) 有界な集合上の連続関数は一様連続である．つまり、任意の $\epsilon > 0$ に対して適当な $\delta > 0$ がとれて、

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad (1.3.8)$$

が成立する¹．

定理 1.3.1 の証明 \bar{S} の方のみ、証明する．

ちょっと考えると、これは当たり前に見える．なぜなら (1) より、 $\bar{S}(\Delta)$ は単調減少っぽく見えて、「有界な単調減少列は極限を持つ」から．しかし、これはウソだ．というのは (1) は「 Δ をより細かくしたら $\bar{S}(\Delta)$ は非増加」と言っているだけで、他の分割から出発して細かくした行き先が、この Δ から出発した行き先と等しいかどうかは保証の限りではない．この問題を解決するため、以下のように進む．

まず、 \inf としての定義からどんな分割 Δ に対しても $\bar{S} \leq \bar{S}(\Delta)$ である：

$$\forall \Delta, \quad \bar{S} \leq \bar{S}(\Delta) \quad (1.3.9)$$

また、 \inf であるから、 \bar{S} と $\bar{S}(\Delta)$ の差がいくらでも小さくなるような分割 Δ もある：

$$\forall \epsilon > 0, \exists \Delta, \quad \bar{S}(\Delta) \leq \bar{S} + \epsilon. \quad (1.3.10)$$

問題は、(1.3.10) が $|\Delta'| \rightarrow 0$ なる任意の Δ' に対して成り立つか、つまり

$$(?) \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad |\Delta'| < \delta \implies \bar{S}(\Delta') \leq \bar{S} + \epsilon \quad (1.3.11)$$

となっているか、ということである．

そこでまず、(1.3.9) の Δ を固定し、十分細かい分割 Δ' を、「 Δ' の各ブロック内に Δ の分点が高々一つしかない」ようにとる．これは $|\Delta'|$ を $|\Delta|$ より小さくすれば絶対に実現できる．次に、 Δ と Δ' を合わせた分割を考えると、これは Δ, Δ' よりも細かいから (1.3.9) から

$$\bar{S}(\Delta \cup \Delta') \leq \bar{S}(\Delta) \quad (1.3.12)$$

ではある．しかし同時に、 p を Δ の分点の数、 M, m は A 内での f の上限と下限とすると、

$$\bar{S}(\Delta') - \bar{S}(\Delta \cup \Delta') \leq p(M - m)|\Delta'|^2 \quad (1.3.13)$$

が成り立つ．なぜなら、左辺の差への寄与は Δ' の分割ブロック中に Δ の分点が入っているときのみゼロでないが、このような分点の数は最大で p 個しかなく、そのような一つのブロックからの寄与は $(M - m)|\Delta'|^2$ で押さえられるからだ．(1.3.12) と (1.3.13) から

$$\bar{S}(\Delta') \leq \bar{S}(\Delta \cup \Delta') + p(M - m)|\Delta'|^2 \leq \bar{S}(\Delta) + p(M - m)|\Delta'|^2 \quad (1.3.14)$$

¹ 2変数の関数 f を考えているつもりだが、引数を2成分まとめて x などと表した

が結論できた。これと (1.3.10) を組み合わせ、更に Δ' を十分細かく、 $p(M-m)|\Delta'|^2 < \epsilon$ となるようにとると (ここで、 p は Δ のみで決まり、 Δ' には関係ないことが効いている)、

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |\Delta'| < \delta \implies \bar{S}(\Delta') \leq \bar{S} + 2\epsilon \quad (1.3.15)$$

が言える。よって (ϵ は任意だから 2ϵ を ϵ と思い直して) (1.3.11) が結論できる。□

定理 1.3.2 の証明

(十分であること) Darboux の定理の証明中、任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $\delta > 0$ がとれて、

$$|\Delta| < \delta \text{ ならば } \bar{S}(\Delta) < \bar{S} + \epsilon \text{ かつ } \underline{S}(\Delta) > \underline{S} - \epsilon \quad (1.3.16)$$

であることを見た — (1.3.15) 式。ところで、その定義から、リーマン和は

$$\underline{S}(\Delta) \leq S(\Delta, \vec{\zeta}) \leq \bar{S}(\Delta) \quad (1.3.17)$$

を満たす。従って、 $|\Delta| < \delta$ である限り、どんな分割でも、どんな分点 $\vec{\zeta}$ の取り方に対しても、

$$\underline{S} - \epsilon \leq \underline{S}(\Delta) \leq S(\Delta, \vec{\zeta}) \leq \bar{S}(\Delta) \leq \bar{S} + \epsilon \quad (1.3.18)$$

が成り立つことがわかる。ここでもし、定理の仮定のように $\underline{S} = \bar{S}$ であれば、 $\delta \downarrow 0$ として

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta, \vec{\zeta}) = \bar{S} = \underline{S} \quad (1.3.19)$$

が結論できる。リーマン和の極限が確定するから、積分可能である。

(必要であること) ほとんど自明である。というのも、 \sup, \inf として定義から、 $\bar{S} - \underline{S} = c > 0$ と仮定すると、

$$\underline{S}(\Delta) \leq \underline{S} = \bar{S} - c \leq \bar{S}(\Delta') - c \quad (1.3.20)$$

が勝手な Δ, Δ' に関して成り立つ。つまり、いくら頑張っても $\bar{S}(\Delta)$ と $\underline{S}(\Delta')$ のギャップを埋めることはできず、リーマン和の極限が存在しない (そのような分点をいくらでもとれる)。□

定理 1.3.3 の証明

証明のキーは「一様連続性」である。定理 1.3.2 を考えに入れると、 $\bar{S} = \underline{S}$ が言えれば十分だ。そのためには、

$$(?) \text{ 任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して } 0 \leq \bar{S}(\Delta) - \underline{S}(\Delta) < \epsilon \text{ なる分割 } \Delta \text{ がとれる} \quad (1.3.21)$$

ことを証明すればよい。さて、積分領域の面積を $|A|$ と書くことにし、 $\epsilon' = \epsilon/|A|$ とおく。 f の一様連続性から $\delta > 0$ が存在して、

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon' \quad (1.3.22)$$

とすることができる。そこで、分割 Δ を、 $|\Delta| < \delta$ となるようなものにとろう。この分割は十分小さいので、同じブロック I_{ij} に属する x, y は $|x - y| < \delta$ を満たしており、したがって $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$ も満たされる。よって、 I_{ij} 上での f の上限 M_{ij} と下限 m_{ij} は $0 \leq M_{ij} - m_{ij} \leq \epsilon'$ を満たす。これを i, j について和をとると、

$$0 \leq \bar{S} - \underline{S} = \sum_{ij} (M_{ij} - m_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \leq \sum_{ij} \epsilon' (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \epsilon' |A| = \epsilon \quad (1.3.23)$$

が得られる。つまり、この Δ を用いて (1.3.21) が証明できた。メダシメダシ。□

理解を深めるための問題：

重積分の定義に従って (上の定理を使っても良い)、積分 $\iint_A f(x, y) dx dy$ を求めてみよ。ここで

$$A = [0, 1] \times [0, 1], \quad f(x, y) = xy \quad (1.3.24)$$

とする。余力のある人は他の $f(x, y)$ の場合も (例: $f(x, y) = x^2$) やってみようか。

この問題の計算は大変である。1次元の積分でも大変だったことを思い返せば当然だろう。しかし、一回はやっておいた方が、後々のためになる。また、その過程で、来週にやる予定の「累次積分」の感覚も掴めると思う。だから面倒でも自分でやってみることを奨める。

まあ、定義に従って重積分を求めるのは大変だ (上の問題をやった人は同意するだろう)。この後で重積分を一次元積分 2 回に直してやる方法を考える。これで重積分の計算は非常に簡単になるのだ。

1.4 一般の領域での重積分

1.2 節への補足として、一般の領域での重積分の定義を簡単に述べておく。この節の内容は、まあ常識的なものだから、「油断すると変なこともある」点以外はそれほど気にしなくてよい（ただし「縦線図形上の積分」は後で一杯出てくる。）

今までは xy -平面の長方形 $A = [a, b] \times [c, d]$ 上の積分を考えてきた。 xy -平面の一般の図形 B での積分はどう定義したら良いだろうか？まず天下一りに定義を与え、その後で意味を説明する。

B を xy 平面内の有界な図形とする。 B の 特性関数 (定義関数) と呼ばれる関数 $\chi_B(x, y)$ を、

$$\chi_B(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in B \text{ のとき} \\ 0 & (x, y) \notin B \text{ のとき} \end{cases} \quad (1.4.1)$$

と定義する。また、 B をその内部におさめられるような、十分大きな長方形 B^* をとる。

この準備の下で、まず図形 B の面積を定義しよう。

定義 1.4.1 (一般の図形の面積) 図形 B の面積は、重積分

$$\iint_{B^*} \chi_B(x, y) dx dy \quad (1.4.2)$$

によって定義する。この積分が存在しない場合は、 B の面積は定義できないと考える。この積分が存在する場合、 B は 面積確定 であるという。

上の定義の右辺は、 B^* が長方形であるから、前節までの定義によって解釈できる。 χ_B の定義を見ればわかるように、この右辺では積分に実質的に効いてくるのは B の中だけである。この意味で上の定義は直感的に「正しい」ものと考えて良い。

図形 B の「面積」とは何か？は決してアタリマエの事ではない。我々が日常見かけるような図形は、その境界が滑らかな曲線であるから、その面積は直感的にも定義できる。しかし、その境界が連続な曲線まで広げると、既に上の定義では面積が確定できない図形も多々ある。物理や工学に出てくる曲線でも滑らかでないものもある（例：ブラウン運動の軌跡。もう少し講義で）。

この意味で「図形の面積」は我々が苦勞して、意識的に 定義すべき ものである。以下に、面積が確定するための十分条件を少し挙げる。

定理 1.4.2 (B の面積確定のための十分条件) 図形 B の面積が定義できるための十分条件のいくつかは以下の通りである：

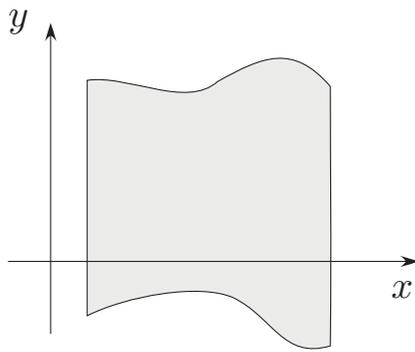
(1) B の境界が滑らかな曲線であること。つまり、 $x = x(t), y = y(t)$ という閉曲線 ($0 \leq t \leq 1$ かつ $x(0) = x(1), y(0) = y(1)$) があって、その内部が B であり、かつ、 $x(t), y(t)$ が t の関数として C^1 -級 (一階微分可能で、導関数が連続) であること。

(2) $x = a, x = b$ の2つの直線と $y = \varphi(x), y = \psi(x)$ (ただし $a \leq x \leq b$ で $\varphi(x) \leq \psi(x)$, かつ $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ は x の連続関数) なる2つの曲線で囲まれた部分が B であること。

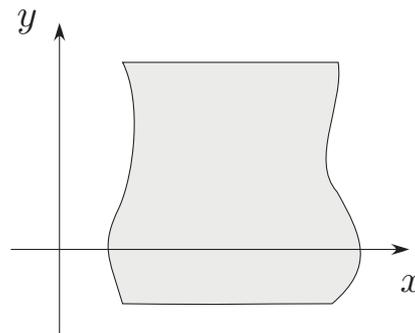
定理の(2)に出ているような図形を 縦線図形 という (下図参照)。上では y -方向の「縦線」でできた図形の例を示したが、 x -方向の「横線」でできた図形、つまり

$$y = c, \quad y = d, \quad x = \varphi(y), \quad x = \psi(y) \quad \text{で囲まれた図形} \quad (1.4.3)$$

に対しても定理は成り立つ。これは本来「横線図形」と呼ぶべきだろうが、このような図形も「縦線図形」という。



縦線図形



横線図形

この準備の下で,

定義 1.4.3 (面積確定の図形の上の重積分) 面積が確定する図形 B が与えられたとする. B 上で定義された関数 $f(x, y)$ が与えられたとき, f の B での積分は, 重積分

$$\iint_B f(x, y) dx dy \equiv \iint_{B^*} f(x, y) \chi_B(x, y) dx dy \quad (1.4.4)$$

によって定義する. 右辺の積分が定義できる場合は f は B で可積分 (積分できる), 定義できない場合は f は B で積分できないという.

最後に, 積分可能の十分条件を挙げておく. 図形 B が面積確定との条件をつければ, だいたい, 長方形上での積分と同じ事になる.

定理 1.4.4 (積分可能の条件) 図形 B の面積が定義できる時, その上の関数 f が B で積分可能なための十分条件は, f が B 上で連続な事である.

1.5 重積分と累次積分

1.3 節の「理解を深めるための問題」にあるように, 重積分をその定義から (分割を使って) 求めるのは大変だ. ところが, n 重積分は (大抵の場合) n 個の 1 次元積分のくり返しで求められる. これは非常な省力化であり, 実用上も非常に有り難い. この節ではこの重要な性質を学ぶ.

まずは簡単のために, $A = [a, b] \times [c, d]$ (長方形) の上での $f(x, y)$ の重積分を考える. 図形 A が前小節の「一般の図形」の場合については後で少しだけ触れる.

定理 1.5.1 (累次積分への帰着) 関数 $f(x, y)$ が A 上で積分可能とする. このとき, すべての $x \in [a, b]$ に対して

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad (1.5.1)$$

を定義できるならば,

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (1.5.2)$$

が成り立つ. x, y を入れ替えた形の定理もちろん, なりたつ. すなわち, すべての $y \in [c, d]$ に対して

$$G(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (1.5.3)$$

を定義できるならば,

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_c^d G(y) dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (1.5.4)$$

である.

講義で詳しく説明するが, $z = f(x, y)$ のグラフの下の体積を求めると思えば, この定理の主張を高校までの積分で理解できる. 高校では, このような立体を x -軸に垂直な面で切り, その断面の面積を積分することで体積を求めた. (1.5.4) は, 正にこれになっている [$F(x)$ が断面の面積に相当].

記号: (1.5.4) の積分は, 通常はカッコを省略して

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \quad (1.5.5)$$

と書かれる (a, b, c, d と x, y の順番に注意). ただ, これでは x, y どちらの変数がどこまで動くのかが混乱しがちなので, 積分範囲を明確にするために

$$\int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) \quad (1.5.6)$$

と書くことも多い (物理や工学では後者の書き方が一般的である.) 後者では「積分記号の直後にある積分変数とその範囲を動く」点が変わりやすいが, その反面, この後に更に数式が続いた場合など, 「どこまでが非積分関数か」わかりにくい面もある ...

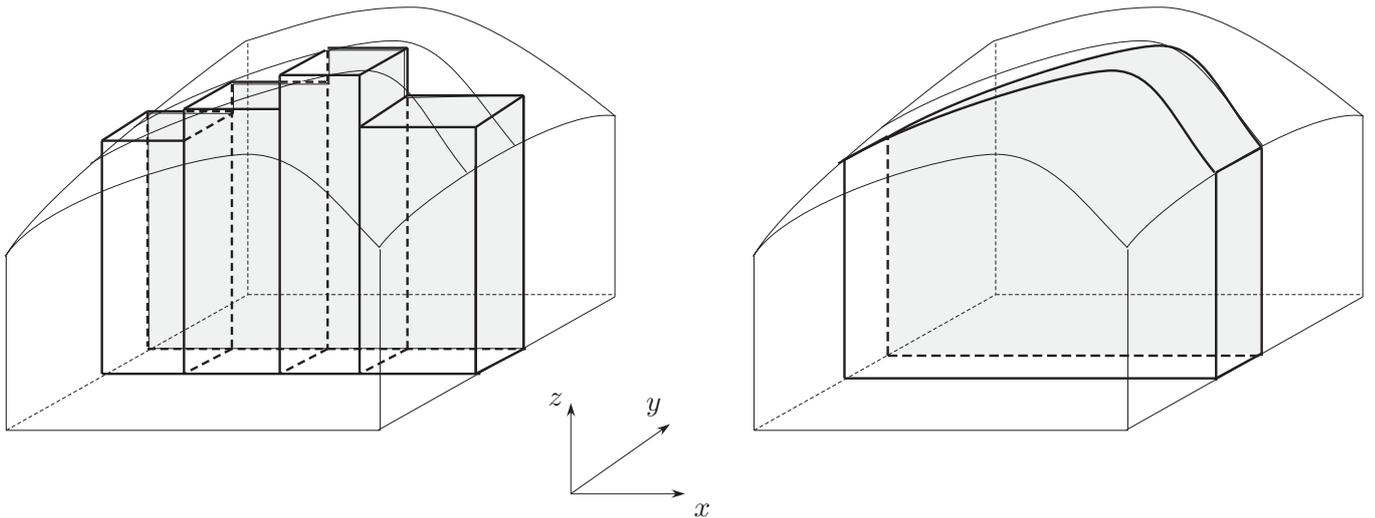
系 1.5.2 (Riemann 積分に対する Fubini の定理) 関数 f が A 上で積分可能のとき (両辺に意味がつく限り)

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (1.5.7)$$

が成り立つ. つまり, 累次積分の順序を交換できる.

定理 1.5.1 の証明について: 立体の体積だと思えばアタリマエのようなものだが, 一応, 講義では大体の感じを説明する. 要点は以下の通り:

重積分の定義において, x -方向の分割だけを先に細かくして, x -方向の分割の幅がゼロに行った極限を考える. y が一定の面で切った切り口を考えると, このとき, 切り口に見えている短冊は素直に細くなって行くので, この切り口の面積が出てくる. この後に y -方向の分割を細かくすると, この切り口の面積を y -方向に積分したものが得られて, 累次積分の公式に到達する. □



この定理は、その証明は大まかなアイデアがわかれば良い。それよりは実際に計算できる事が至上命題だ。いくつか例題を掲げておくからやっておくように (類題は演習の方でもやるはずだ。)

問 1.5.1 A 上で積分可能であるが、上の $F(x)$ が (ある $x \in [a, b]$ に対しては) 定義できないような $f(x, y)$ の例を作れ。

問 1.5.2 以下の重積分を計算せよ。 $A = [0, 1] \times [0, 1]$ 。

$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy, \quad \iint_A xy dx dy, \quad (1.5.8)$$

問 1.5.3 以下の場合に、重積分 $\iint_A f(x, y) dx dy$ を計算せよ ..

a) $A = [1, 3] \times [0, 2], f(x, y) = xy.$

b) $A = [0, 1] \times [0, 1], f(x, y) = \frac{1}{3x + y + 1}.$

c) A は 3 直線 $x = 0, y = 0, x + y = 1$ で囲まれた図形, $f(x, y) = \frac{1}{3x + y + 1}.$

d) A は直線 $y = x$ と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形, $f(x, y) = (y - x^2)^2.$

(少し進んだ話題)

1. 定理 1.5.1 では $F(x)$ や $G(y)$ が定義できることを仮定したが、これを仮定しないバージョンは以下のようになる: f が A で可積分の時, $\int_c^d f(x, y) dy$ の上積分と下積分をそれぞれ $\overline{F}(x), \underline{F}(x)$ で表すと,

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \overline{F}(x) dx = \int_a^b \underline{F}(x) dx \quad (1.5.9)$$

である (上積分, 下積分はいつでも存在するから, f の可積分性のみを仮定すれば十分。)

2. 定理 1.5.1 は「 $f(x, y)$ が A で積分可能ならば、重積分は累次積分で書ける」ことを主張している。この逆は成り立つかを考えたい。つまり,

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (\text{累次積分が定義できて積分順序によらない}) \quad (1.5.10)$$

ならば、 f は A で可積分だろうか?

残念ながら、そうとは限らない。次のやや人工的な f は (1.5.10) が成り立つにもかかわらず、 A で積分できない例である。このような意味で、累次積分の性質からもとの重積分が定義できるかどうかを判定することはできない。

例: 正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ を S と書く. また, k -番目に大きい素数を p_k と書く ($k = 1, 2, \dots$). 更に, 適当な 1 以上の整数 k と整数 m, n を用いて $\left(\frac{m}{p_k}, \frac{n}{p_k}\right)$ の形に書ける S の内点の全体を T と書く:

$$T = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{m}{p_k}, \frac{n}{p_k} \right) \mid 0 < m < p_k, 0 < n < p_k \right\} \quad (1.5.11)$$

更に,

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & ((x, y) \in T) \\ 1 & ((x, y) \in S \setminus T) \end{cases} \quad (1.5.12)$$

と定義する. このとき,

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy = 1 \quad (1.5.13)$$

であるが, $\iint_S f(x, y) dx dy$ は定義できない.

3. このように, Riemann 積分では何かと話がヤヤコシイのだが, この点は Lebesgue 積分を考えると大幅に改善される. 粗っぽくいうと, 上の反例などは大体が非常に些細なところから出ているので, その部分を「無視」するような定義を用いれば反例が消滅する. Lebesgue 積分というのはどの部分が「些細」で無視して良いかを合理的に決めたものとも考えられる. このような点から Lebesgue 積分は非常に自然なので, 現在の数学では Lebesgue 積分が (Riemann 積分に替わって) 用いられるようになった.

一般の図形上での積分に対する累次積分

長方形でない図形 B 上での積分を累次積分に帰着することも, 同様に考えていける. たとえば, B が

$$x = a, \quad x = b, \quad y = \varphi(x), \quad y = \psi(x) \quad (1.5.14)$$

で囲まれた縦線図形の場合 ($a \leq x \leq b$ で $\varphi(x) < \psi(x)$),

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (1.5.15)$$

が成り立つ.

重積分の順序交換

系 1.5.2 (Fubini の定理) で非積分関数が「良い」性質を持っていれば重積分の順序は交換できる, ことをみた. これは重積分を累次積分に帰着することから出てきたもので, 考え方は非常に単純である — 要するに, 与えられた積分範囲をどんな順番でも良いから尽くすように覆えばよいわけだ. でもこれは応用上, 非常に大事なものである.

例えば, 問 1.5.3 c) では $x = 0, y = 0, 2x + y = 1$ で囲まれた三角形の領域での積分を考えた. 上の解答にも載せたように, x, y どちらの積分を先にやっても構わない. また, 例えば x での積分を先にやる形の累次積分で与えられた積分の順序を変えて, y から積分しても良い. 問題によっては, このように順序を変えることで簡単に計算できる場合があるので, これは実際問題としては大事である (以下の具体例をみよ.)

問 1.5.4 積分領域 B を, $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ と $y \geq 0$ で囲まれた図形として, 積分 $\iint_B x^2 y dx dy$ を計算せよ. (この問題は x, y のどちらか一方を先にやると簡単にできる. 順序を逆にすると大変だよ.)

順序交換は応用上, 非常に大事だから, いくつか例題を挙げておく:

問 1.5.5 以下の積分の順序交換を納得せよ (f は適当な関数, $a, b > 0$ は定数)

$$\int_0^a dx \int_{-bx}^{bx} dy f(x, y) = \int_0^a dy \int_{y/b}^a dx f(x, y) + \int_{-ab}^0 dy \int_{-y/b}^a dx f(x, y),$$

$$\int_0^{1/2} dx \int_{x^2}^x dy f(x, y) = \int_0^{1/4} dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx f(x, y) + \int_{1/4}^{1/2} dy \int_y^{1/2} dx f(x, y)$$

このような問題では, 積分領域の図を描いて, 間違わないように書き換えるのが良い.