

2006.4.20.

微分積分続論 (SII-15 クラス)

担当：原 隆 (数理学研究院)：六本松 3-312 号室, tel: 092-726-4774, e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp,

<http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html>

Office hours: 月曜の午後 4 時半～6 時頃, 僕のオフィスにて. なお, 講義終了後にも質問を受け付けます.

概要：この講義は (互いに関連する) 2 部に分かれる. 第 1 部では「多重積分」を, 第 2 部では「線積分・面積分とベクトル解析の初歩」を学ぶ. これらの積分は今までに習ってきた積分の概念を拡張するものであるが, 物体の体積, 力による仕事, 電磁気のいろいろな現象などで自然に出てくるものである. その意味であまり恐れず, 基本的なところをマスターしてもらいたい.

キーになる概念：多重積分, 累次積分, 線積分, 面積分, ベクトル解析の初歩.

内容予定：(以下は大体の目安です. 皆さんの理解の程度などにより, ある程度の変更はあり得ます.)

I. 多重積分について (5～6 回程度)

1. (復習) 定積分とは何だったか?
2. 2 重積分の定義
3. 2 重積分を累次積分で計算すること
4. 2 重積分の変数変換とヤコビアン
5. 3 重積分 (および 4 重積分以上) について, 上と同様のこと

挿入. I か II の後で中間試験! (日と範囲は後で決める)

II. 線積分と面積分：これらの概念を理解し, 計算できるようになる (3 回程度)

1. 線積分の定義とその意味, 計算練習
2. 面積分の定義とその意味, 計算練習

III. ベクトル解析の初歩 (4 回程度)

1. スカラー場の gradient, ベクトル場の divergence, rotation などの定義を理解
2. ガウスの定理とグリーンの定理

教科書：

- 小林昭七「続 微分積分読本」(裳華房)

参考書：

- 高木貞治「解析概論」(岩波). 今の学生さんには難しすぎる, とかスタイルが古い, との意見もあるが, やはり名著だ. 持っていて損はないぞ.
- 「パークレー物理学 2：電磁気学」(丸善) — この講義後半のテーマの非常に良い応用例が力学・電磁気学・流体力学である. 皆さんは理学・工学の学生なんだから, これを利用しない手はない. 特に, 「物理は良くわかってるつもりなんだけど数学はイマイチ」という人はこのパークレーの本を適宜参照すると良い. パークレーの本でなくても力学や電磁気学の教科書は参考になるはず.

評価方法：中間試験と期末試験の成績を総合して評価し, ボーダー付近ではレポートの成績も用いる.

- 最終成績は一旦, 100 点満点に換算してから, この大学の様式に従ってつける.
- その 100 点満点 (最終素点) は, 以下のように計算する.
 - まず, 「中間試験の点」「期末試験の点」をそれぞれ 100 点満点で出す.
 - 次にこの 2 つを以下の式で「平均」し, 一応の総合点を出す:

$$(\text{総合点 } A) = 0.50 \times (\text{中間の点}) + 0.50 \times (\text{期末の点})$$

- ただし, 上の計算式の重みを若干変更する可能性はあることを承知されたい (例えば, 総合点 A で, 中間と期末の比を 4:6 にするなど).

－ 最終素点は

$$(\text{最終素点}) = \max\{(\text{総合点 } A), (\text{期末の点})\}$$

とする。つまり (総合点 A) と (期末の点) を比べて、良い方をとるのだ。

- 上の「最終素点」をよく見て、必要ならば全体に少し修正 (例: 全員に下駄をはかせるとか) を加えたものをつくり、これをこの大学の基準と合わせて最終成績を出す。
- 上の出し方では合格基準に少し足りない人は、それまでに課題したレポートがあるなら、その結果も参考にして判断する。

(期末一発逆転を可能にする理由) この講義では (上位 10% の人だけがわかるような) 進んだ話題はあまり扱わない。そのため「できる」人が退屈することも考えられる。そのような人には自主的な学習を奨める意味で、「期末で一発逆転」も可能なようにした。ただし、「期末の一発勝負」がうまくいく人はそれほど多くないだろう (期末試験は中間試験やレポートよりは難しい) から、あくまで自己責任でやってくれ。期末の一発勝負で成績が悪くても、苦情は一切受け付けられないからね! (できる人が少ないだろうけどもこの形式をとるのは、僕の美学にこだわっているからである。)

「学習到達度再調査」(?) について: この大学には「学習到達度再調査」なる変な制度があるらしい。この科目には進級のかかっていることでもあり、これに急に期待する人がいるかもしれないので、ここでははっきり宣言しておこう。

「再調査」は行わない可能性が高い。もし行うとしても、その権利を得るのはギリギリで不合格になった人だけで、誰を対象とするかは、こちらの一存で (もちろん、公平に、しかし厳しく) 決めさせていただく。もちろん、再調査をしてもダメな人も出現しうる。

(再調査とは独立に、正規の理由があれば追試験は行うのでご安心を。)

更に付言するならば、再調査をする方が、こちらとしては厳しく点を付けやすい (厳しく採点して、誰を助けるかは再調査できちんと確かめれば良いから)。だから、このようなものには頼らず、期末試験でちゃんと合格できるよう、しっかり学習して下さい。期末試験までなら皆さんの学習を助ける努力は惜しまないつもりで、質問などにも忍耐強く相手することを保証する。

合格 (最低) 基準: 合格のための条件 (A, B がとれる条件ではない!) は、講義中に出題する例題と同レベルの問題が解けることである。具体的には大体、以下ようになる (進度の都合で若干の変更はあり)。

- 重積分の定義がわかり、具体例では重積分を累次積分に直して計算できること。積分変数の変換なども。
- 線積分、面積分の定義がわかり、具体例を計算できること
- ベクトル解析の初歩 (gradient, divergence) が理解できていること。

演習との連携について:

皆さんのほとんどは「基礎数学演習 (数学基礎演習) III」をとっているはずだ。担当の中屋敷先生とはある程度の連携をとる。特に、この講義に関連した演習問題はかなりの部分、基礎演習 III にお願いすることになる。

特に一言: この講義に出てくるいろいろな概念は、ゆっくり考えればそれほど難しいものではありません。しかし、平面、空間の中の物事を扱うので、図形的な直感がないとかなり苦むことも考えられます。決して甘く見ずに、着実に学習することをお奨めします (でないと、学期末に泣くことになるかも...)

この科目に関するルール: 世相の移り変わりは激しく、僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました。そのうちのいくつかは良いことですが、悪いこともあります。オヤジだとの批判は覚悟の上で、互いの利益のために、以下のルールを定めます。

- まず初めに、学生生活の最大の目的は勉強することであると確認する。
- 講義中の私語、ケータイの使用はつつしむ。途中入室もできるだけ避ける (どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように)。これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケットです。
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける。
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う (補助として僕のホームページも使う —— アドレスは最初に載せた)。「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切、受け付けない。
- レポートを課した場合、その期限は厳密に取り扱う。
- E-mail による質問はいつでも受け付ける (hara@math.kyushu-u.ac.jp) ので積極的に利用するように。ただ、回答までには数日の余裕を見込んで下さい。

1 重積分

この講義ではいままでにやってきた積分の概念をいろいろと拡張する。その一つ目として、「重積分」をまなぶ。

1.1 積分とは何だったか？

まず、一年生までの復習をも兼ねて、「積分とは何だったか」を復習しておこう。このところがはっきりしていれば、この講義で出てくるいろんな積分など簡単にはず。

$f(x)$ を適当な (例えば連続な) 関数とし、簡単のために $f(x) > 0$ としておこう。 $a < b$ を定めたときの定積分 $\int_a^b f(x)dx$ とは直感的には区間 $[a, b]$ 上での $y = f(x)$ のグラフと x -軸との間の図形の面積である。この数学での定義は以下のようなものだった。

- まず、区間 $[a, b]$ を n 個 (n は大きな整数) の小区間に分ける： $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ 。できる小区間は (x_{i-1}, x_i) である ($i = 1, 2, \dots, n$)。これを区間 $[a, b]$ の分割といい、 Δ で表す。小区間の長さの最大値を $|\Delta|$ と書く： $|\Delta| = \max_i(x_i - x_{i-1})$ 。
- 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に勝手に点 ζ_i をとる ($i = 1, 2, \dots, n$)。簡単のために $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ をまとめて $\vec{\zeta}$ と書く。
- 上のように決めた $\Delta, \vec{\zeta}$ に対して、リーマン和

$$S(f; \Delta, \vec{\zeta}) = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) (x_i - x_{i-1}) \quad (1.1.1)$$

を計算する。

- さて、 $|\Delta| \rightarrow 0$ を満たすような任意の Δ とそれに対する任意の $\vec{\zeta}$ を考える。 $|\Delta| \rightarrow 0$ の極限で $S(f; \Delta, \vec{\zeta})$ の値が ($\Delta, \vec{\zeta}$ の取り方によらず) 一定の値に近づくならばその値を $\int_a^b f(x)dx$ の値と定める。模式的に数式で書けば

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(f; \Delta, \vec{\zeta}) \quad (1.1.2)$$

とするのである。

上の極限值はいつもあるとは限らない。例えば、

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が有理数の時}) \\ 1 & (x \text{ が無理数の時}) \end{cases} \quad \text{に対して} \quad \int_0^1 f(x)dx \quad (1.1.3)$$

を考えても、これは定義できない (このような関数に対しても「積分」を定義しよう、というのが「ルベーグ積分」なのであるが、この講義ではルベーグ積分は扱わない。) 定積分が定義できるかどうかなどについては

- 定積分は定義できなくても、「上積分」「下積分」はいつでも定義できること (Darboux の定理)
- 定積分が定義できる必要十分条件は上積分と下積分の値が等しいこと
- 定積分が定義できる十分条件の一つは「 f が連続関数であること」

などを習ったと思う (アヤシイ人は家で復習してきてね; 来週, もう少しやります)。

ともかく、定積分の基本は、グラフの下の図形を細い短冊の和で近似する、ということなのだった。これからいろいろな積分が出てくるが、これらはすべて、上のような意味での「うまく近似した和の極限」として理解すべきものである。

1.2 2重積分の定義とその意味

2重積分は単に「重積分」ということも多い。まず、重積分で何をやりたいのか、考えてみよう。

2変数 x, y の関数 $f(x, y)$ が与えられている (例: $f(x, y) = xy$)。また, xy -平面上の長方形の領域 $A = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ も与えられている。そのとき, 関数 f の領域 A 上での積分 $\iint_A f(x, y) dx dy$ を定義したい。もともと積分は「グラフの下の図形の面積」を表すものだったから, そのノリを保って, 以下のように考える (実際, この定義が自然で役に立つことはこれから見ていく。) —— ここのところはまず黒板で概念を説明するつもり。

関数 $z = f(x, y)$ のグラフは (x, y, z) -空間での曲面になる。簡単のために $f(x, y) \geq 0$ とする。この曲面と xy 平面の間にあり, 底面が A である立体 (A を底面とする柱のようなもの) を考え, この体積を表すものが重積分 $\iint_A f(x, y) dx dy$ であるように, 定義を考えたい。1変数の時に倣って, 問題の体積を小さな部分の和で近似するつもりで定義する。

- まず, A を小さな長方形に分割する。つまり, x -軸方向には $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, y -軸方向には $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$, と分ける (m, n は大きな整数; これでは A は mn 個の小さな長方形に分割された)。この分割を Δ で表す。この時にできる小さな長方形を $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ と書く ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$)。また, これらの小長方形の辺の長さのの最大値を $|\Delta|$ と書く: $|\Delta| = \max_{i,j} \{(x_i - x_{i-1}), (y_j - y_{j-1})\}$ 。
- 次に, それぞれの小長方形 I_{ij} の中に勝手に点 $\zeta_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij})$ をとる。 mn 個の ζ_{ij} をまとめて $\vec{\zeta}$ と書く。
- このように決めた $\Delta, \vec{\zeta}$ に対して リーマン和を

$$S(\Delta, \vec{\zeta}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) \quad (1.2.1)$$

として定義する。

- 最後に, $|\Delta| \rightarrow 0$ となるようないろいろな Δ と, その Δ に対するいろいろな $\vec{\zeta}$ の取り方を考える。 $|\Delta| \rightarrow 0$ の極限でリーマン和が一定値に近づくならば, その値を「 A の上での f の重積分」の値と定義する。つまり,

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S(\Delta, \vec{\zeta}) \quad (1.2.2)$$

これが重積分の定義である (考えやすいように $f(x, y) \geq 0$ の制限を始めにつけたが, 勝手な f で上の定義を用いる)。概念図は黒板で説明。もちろん, これは定義の大筋を述べただけで, 以下のような問題点 (取り扱わなかった点) が残されているが, それは次回以降に行う。

- 1変数の積分と同様, $|\Delta| \rightarrow 0$ の極限值が存在するか (すなわち重積分が定義できるか) どうかは全く自明ではない。実際に f の性質が悪いと極限值が存在しないことも多い。極限值が存在する (重積分が定義できる) 十分条件など, この辺りの詳しいことは来週。
- 今は長方形上の重積分を考えているが, 本当はもっと一般に, xy -平面上の勝手な図形 A の上での重積分を考えたい。この場合も定義のアイディアは同じである (底面 A を小長方形に分けて, 小さな柱の体積の和の極限で定義)。ただし, A が性質の良くない図形であれば, かもや積分が定義できないことがある。このような点については2, 3回の後に触れる。

(更に今後の予告) 上に述べたような問題を解決すれば, 重積分の定義 (とその定義が意味を持つ条件) がわかったことになる。しかし, これだけでは実用上は大変に不便だ。なぜなら, 与えられた関数 $f(x, y)$ と図形 A に対して, リーマン和をいちいち計算した後で $|\Delta| \rightarrow 0$ の極限を計算するなど, やってらんないから (1変数の積分の時も, 練習問題としてリーマン和から積分の値を計算したことがあると思うが, 大変だったでしょう?) そこで次節では, この重積分をもっと簡単に計算する方法を考える (答えを言ってしまうと, 重積分を「1次元の積分を2回やる」ことで計算できるのだ。)