2006.10.3.

線形代数 （LI-11 クラス）

担当：原　隆（数理学研究院）：六本松 3-312 号室，tel: 092-726-4774,　e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp,
http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html

Office hours: 月曜の午後４時半〜６時頃と火曜の午後３時〜４時，僕のオフィスにて．なお，講義終了後にも質問を受け付けます.

概要：

経済学部の学生さん向けに,「線形代数」の概要を駆け足で講義する．具体的には,「行列」「逆行列」,「行列式」などの計算ができるようになり，更に「固有値と固有ベクトル」「行列の対角化」がわかるようになることを目標とする．余裕があれば「線形空間」についても少しだけ触れたい.

キーになる概念：行列，逆行列，行列の基本変形，行列式，固有値と固有ベクトル，行列の対角化.

内容予定：

（以下は大体の目安です．皆さんの理解の程度などにより，ある程度の変更はあり得ます.）

1. 行列の演算
2. 行列式の計算
3. 逆行列
4. 連立方程式の解法
5. この辺りで中間試験
6. 行列の固有値と固有ベクトル
7. 行列の対角化

教科書：

- 長澤壯之「基礎線形代数」（学術図書出版社）まだ生協に入荷していないでしょうから，今日は教科書の一部をプリントして配ります.

参考書：

- 斉藤正彦「線形代数入門」（東大出版会）．少し難しいだろうが，教科書で飽き足らない人にはお勧めである.

評価方法：

中間試験と期末試験の成績を総合して評価し，ボーダー付近ではレポートの成績も用いる.

- 最終成績は一旦，１００点満点に換算してから，この大学の様式に従ってつける.
- その１００点満点（最終素点）は，以下のように計算する.
  - まず,「中間試験の点」「期末試験の点」をそれぞれ 100 点満点で出す.
  - 次にこの２つを以下の式で「平均」し，一応の総合点を出す：

$$(\text{総合点 } A) = 0.40 \times (\text{中間の点}) + 0.60 \times (\text{期末の点})$$

  - ただし，上の計算式の重みを若干変更する可能性はあることを承知されたい（例えば，総合点 A で，中間と期末の比を 5 : 5 にするなど）.
  - 最終素点は

$$(\text{最終素点}) = \max\{\, (\text{総合点 } A), (\text{期末の点})\,\}$$

  とする．つまり,（総合点 A）と（期末の点）を比べて，良い方をとるのだ.
- 上の「最終素点」をよく見て，必要ならば全体に少し修正（例：全員に下駄をはかせるとか）を加えたものをつくり，これをこの大学の基準と合わせて最終成績を出す.
- 上の出し方では合格基準に少し足りない人は，それまでに出題したレポートがあるなら，その結果も参考にして判断する.

（期末一発逆転を可能にする理由）この講義では（上位 10%の人だけがわかるような）進んだ話題はあまり扱わない．そのため,「できる」人が退屈することも考えられる．そのような人には自主的な学習を奨める意味で,「期末で一発逆転」も可能なようにした．ただし,「期末の一発勝負」がうまくいく人はそれほど多くないだろう（期末試験は中間試験やレポートよりは難しい）から，あくまで自己責任でやってくれ．期末の一発勝負で成績が悪くても，苦情は一切受け付けないからね！（できる人が少ないだろうけどもこの形式をとるのは，僕の美学にこだわっているからである.）

「学習到達度再調査」（？）について：

この大学には「学習到達度再調査」なる変な制度があるらしい．これに変に期待する人がいるかもしれないので，ここではっきり宣言しておこう．

> 「再調査」を行うか行わないかは学期末になって決める．もし行うとしても，その権利を得るのはギリギリで不合格になった人だけで，誰を対象とするかは，こちらの一存で（もちろん，公平に，しかし厳しく）決めさせていただく．もちろん，再調査をしてもダメな人も出現しうる．

（再調査とは独立に，正規の理由があれば追試験は行うのでご安心を.）

更に付言するならば，再調査をする方が，こちらとしては厳しく点を付けやすい（厳しく採点して，誰を助けるかは再調査できちんと確かめれば良いから）．だから，このようなものには頼らず，期末試験でちゃんと合格できるよう，しっかり学習して下さい．期末試験までなら皆さんの学習を助ける努力は惜しまないつもりで，質問などにも忍耐強く相手することを保証する．

なお，言うまでもないことであるが，いくら進級や卒業がかかっていても，単位の出せないものは出せないことは理解されたい.（いわゆる「泣き落とし」は通用しないのでそのつもりで.）下の合格基準に述べるように，普通に勉強してれば十分に単位が取れる仕組みにはしてあるから.

合格（最低）基準： 合格のための条件は，講義中に出題する例題と同レベルの問題が解けること である．具体的には大体，以下のようになる（進度の都合で若干の変更はあり）.

- 逆行列，行列式が求められる.
- 一次方程式が解ける.
- 固有値、固有ベクトルが計算できる.
- 行列を対角化できる.

特に一言： この講義に出てくるいろいろな概念は，ゆっくり考えればそれほど難しいものではありません．しかし，平面，空間の中の物事を扱うので，図形的な直感がないとかなり苦しむことも考えられます．決して甘く見ずに，着実に学習することをお奨めします.（でないと，学期末に泣くことになるかも...）

この科目に関するルール：

世相の移り変わりは激しく，僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました．そのうちのいくつかは良いことですが，悪いこともあります．オヤジだとの批判は覚悟の上で，互いの利益のために，以下のルールを定めます.

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強すること であると確認する.
- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している 他の学生さんへの 最低限のエチケットです.
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける.
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕のホームページも使う —— アドレスは最初に載せた）.「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切，受け付けない.
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う.
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.kyushu-u.ac.jp）ので積極的に利用するように．ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい.

１０月１７日：今日は行列の基本演算をやった後,「一次方程式の解法と行列の基本変形」に入ります.
重要な注意：教科書では２、３章を跳ばして，まずは４章の１節と２節に行きます．その方がむしろ，わかり易いだろうと思います．なお，２，３章の内容には，後で戻ってきます.

2　行列の基本変形と一次方程式，逆行列

この節の内容は，教科書の 4.1 節と 4.2 節である.

2.1　一次方程式と行列

この節の内容は，教科書の 4.1 節である.（ただし，一部をやらない可能性もある.）

• 一次方程式は行列とベクトルの積の形で書ける．例：

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 7 \end{array}\right\} \qquad \text{ならば} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

まあもともと，行列とベクトルの積は上のように書けるように決めたのだ．一般に連立一次方程式は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{2.1.2}$$

の形になる．A を係数行列といい，上の例では

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

• 一次方程式を解く変形はその係数だけを見ていればわかる．より正確には，拡大係数行列を変形していくとわかる．拡大係数行列とは、上の例では

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & | & 5 \\ 1 & 1 & 1 & | & 7 \end{bmatrix} \tag{2.1.4}$$

例は教科書の p.82 など.

• 実際に一次方程式を解く時につかうのは「行列の基本変形」と呼ばれ，以下の４つからなる.

1. ２つの行を入れ替える
2. ある行にゼロでない数をかける
3. ある行に他の行の定数倍を加える（上の３つは「行の基本変形」という.
4. A の２つの列を入れ替える（ただし，これは一次方程式の変数の順序の入れ替えに相当するので，注意が必要).

• まずはいくつかの例で，一次方程式が解けるように練習しましょう．具体的にどのように変形するのかは教科書にも例があるし，講義でも示します.

１０月２４日：行列の基本変形によって連立方程式を解く（続き）．
逆行列とは何か？どうやって求めるか？

行列の基本変形で連立方程式を解く（先週の通り）．解が一つに決まらなかったり，全くなかったりすることもある．

（例）

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 7 \end{array}\right\} \quad \text{ならば} \quad \text{解なし} \tag{2.1.5}$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 7 \end{array}\right\} \quad \text{ならば} \quad \text{解は一杯ある．} \tag{2.1.6}$$

一つ目の例は基本変形の結果，拡大係数行列が

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & | & -3 \end{bmatrix} \tag{2.1.7}$$

のように，左の未知数 x, y, z の方の係数はゼロなのに，右の方がゼロでなくなる．２番目の例は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \end{bmatrix} \tag{2.1.8}$$

となる．これは $x = 3$ かつ $y + z = 4$ ということで，解は $x = 3$ かつ $y = 4 - z$（z は任意；z はどんな数でも良い）．

2.2 逆行列

教科書の 4.2 節に相当する.（この節が終われば，教科書の２章へ戻る.）
逆行列は行列の「割り算」に相当するものだが，連立方程式への応用もある．
まず定義

- $n \times n$ 行列で，その ij-成分が「$i = j$ では 1，$i \neq j$ では 0」である行列を n 次の 単位行列 という．n 次の単位行列は E_n と書く。$n = 4$ の場合なら，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- また，その成分が全部ゼロの行列を 零行列 という．
- $n \times n$ 行列 A に対して $n \times n$ 行列 B をうまく持ってきて $AB = BA = E_n$ とできるとき，B を行列 A の 逆行列 という．

（注）実は $AB = E_n$ または $BA = E_n$ のどちらかだけ仮定すればもう一方が導かれるが，話がややこしくなるので，両方仮定した．

E_n というのは，他の $n \times n$ 行列にかけても答えは変わらない（任意の $n \times n$ 行列 A に対して $AE_n = E_n A = A$）．この意味で E_n というのは普通の数の掛け算の 1 みたいなもの（掛け算の「単位元」という）．普通の数では x の「逆数」y とは $xy = yx = 1$ となる数の事だった（もちろん，$y = 1/x$ と普通は書く）．上の逆行列の定義はこの、普通の数の場合の定義の拡張である．

逆行列はいつもあるとは限らない．例えば，n 次零行列の逆行列はない！(why?)

しかし，あるなら，それは連立方程式を解いて求める事ができる．まずは 2×2 の場合を理解しよう．そのあとで一般の場合の求め方を考えよう．

１１月７日：行列式とは？どうやって求めるか？
（重要なお知らせ）九大祭の後の正規の授業の時間（１１月２８日）に中間テストを行います．範囲は「連立方程式」「逆行列」「行列式」です．もちろん，行列の積の計算なども訊くかも知れません．

（先週のまとめ）

- 一次連立方程式をどうやって解くか
- 逆行列の定義とその求め方（行の変形による）

3 行列式

教科書の２章に相当.
「行列式」と言われるものを定義し，その性質と求め方を学ぶ．また，逆行列との関係についても学修する.

3.1 行列式とは

（始めに）行列式とは，$n \times n$ の正方行列について決まる，ある「数」である．その定義はなかなかややこしいので，まず方針について説明しておく.

- （立場１）行列式を行列の要素を使って具体的に書く事はもちろん，可能だ．ところが，これは 3×3 行列までは簡単なのだが，これより次数が上がると簡単な式では書けない（「置換」と「互換」というものを定義する必要が生じて，なかなか大変）.
- （立場２）しかし一方で,「行列式の満たすべき性質」を列挙すると実は欲しい行列式が一つに決まる，という数学の定理もある．教科書ではこの立場を取り,「行列式とは以下の〇〇を満たすもの」という定義をしている.
- この２番目の立場も数学としては正当なものだが，なにか間接的に定義されて騙されたように感じる人が多いように思う．そこでこの講義では建前としては（立場１），しかし実際としては（立場２）として進む.

要するに教科書の定理 2.2 を行列式の定義として用い，定義 2.3 はその結果とみなす，ということである.

１１月１４日：行列式の求め方の続き
来週（11/21）は全学教育は休みらしいので，この講義も休みです.
（重要なお知らせ）九大祭の後の正規の授業の時間（１１月２８日）に中間テストを行います．範囲は「連立方程式」「逆行列」「行列式」です．もちろん，行列の積の計算なども訊くかも知れません.

テストの予想問題：

- 次の連立方程式を解け.（変数は３～４，方程式の数も３～４）
- 次の行列の逆行列を求めよ（行列の大きさは 3×3 が主）.
- 次の行列の行列式を求めよ（行列の大きさは 4×4 が主）.

なお，上以外にも「少し深くわかってる人にはアホみたいに簡単な問題」を出すかもしれません.
前回もいいましたが，検算できる問題では検算する事．検算せずに計算間違いしていたら部分点がないこともあり得ます.

(参考）今回の試験範囲を教科書でいうと，大体,
1.2，4.1, 4.2, 2.1, 2.2, 2.3 の各節
です．「行列式」と言っても 2.4 節以降の「余因子展開」などは入りません．これはあくまで参考であって，上に掲げたような「予想問題」がちゃんとできれば（中間試験は）合格点になるはずです.

3.2 行列式の求め方

- 行や列の基本変形を行って，できるだけ三角行列（または対角行列）の形に持って行く事が基本
  - ２つの行を入れ替える.
  - ある行にゼロでない定数をかける.
  - ある行に別の行の定数倍を加える.
- どのような基本変形で，どのように行列式の値が変わるのか，押さえる事が重要．連立方程式を解く場合と異なる点も押さえておく事．ぼんやりしてると連立方程式と行列式の求め方をごっちゃにしてしまうぞ.
  - 行（列）を入れ替えると行列式の符号が変わる.
  - ある行（列）を定数倍すると行列式の値も定数倍される.
- これ以外に，ある行（列）を中心にして「展開」する方法もある．これは「余因子展開」というが，今回の中間試験の範囲外.

１２月１９日：行列の対角化の続き

3.3 余因子展開

（これは先週までのところ）

将来の理論的な効用を考えて、「余因子と余因子展開」を簡単にすませた.

4 行列の対角化

教科書の３章に相当．ただし，教科書とは少し順序を変えて,「線形独立」「線形従属」などの抽象的な概念は後回しにする．まずは「固有値と固有ベクトル」の概念を把握したあと,「対角化」をどうやって行うのかを学ぶ．そのあとで「線形独立」などに戻ってくる事にする.

4.1 固有値と固有ベクトル

（定義）

$n \times n$ 行列 A に対して，$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ となる零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{x}$ と数 λ が見つかったとき，$\boldsymbol{x}$ を A の固有ベクトル，λ を固有値，という.

ここで $\boldsymbol{x}$ がゼロでないのは非常に大事．そうでなかったら，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はいつでも $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ をどんな数に対しても満たすが，これは面白くないので排除する.

(固有値の求め方)

$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ というのは $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ という事だが，これが零ベクトルでない解を持つには，$(A - \lambda E)$ の逆行列が存在してはいけない．つまり，$\det(A - \lambda E) = 0$ となることが，λ が固有値になるための必要条件である．実はこれは十分でもあることがわかる．よって，$\det(A - \lambda E) = 0$ の解が固有値である.

(固有ベクトルの求め方)

これは簡単だ．固有値 λ がわかったら，これを使って方程式 $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = 0$ を解けば良い．これは n 未知数，n 連立の方程式だけども,「解が無数にある」場合に相当している.（どのように無数にあるかは講義で示す.）

4.2 行列の対角化の概要

$n \times n$ 行列 A に対して，正則な（＝逆行列のある）行列 P をもってきて，$P^{-1}AP$ が対角行列になるようにすることを「行列 A の対角化」という.

すべての行列が対角化できるとは限らない．対角化できる条件は以下のようにまとめられる：

> $n \times n$ 行列 A が対角化できるための必要充分条件は，A が n この一次独立な固有ベクトルを持つ事である.

しかし，この条件の中の「一次独立」の意味が良くわからないはずだ．この言葉の意味は年が明けてから学習する．今のところはいくつかの例で対角化を理解すれば良い.

１月９日：行列の対角化の続き．特に,「充分たくさんの」固有ベクトルがある条件とは？

4.3 一次独立，一次従属

（ここは教科書の 3.1 節）行列の対角化の概要は旧年の最後にやった．そこで問題になったのは，充分なだけの固有ベクトルがあるか，ということだった．どれだけあれば充分なのか，それはベクトルの「一次独立，一次従属」の概念を用いて定式化できる．

以下ではベクトルとは n 項列ベクトル（n 個の数を縦に並べたもの）とする.「数」は本当は複素数を意味するが，複素数が嫌いな人は始めは実数だと思っていても良い．また，以下にでてくる「一次結合」「一次独立」「一次従属」はそれぞれ「線形結合」「線形独立」「線形従属」ともいう．

定義 4.3.1

- 線形結合：k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_k$ と実数または複素数の係数 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ に対してベクトルの和

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \sum_{j=1}^{k} c_j\boldsymbol{a}_j \tag{4.3.1}$$

をベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の「一次結合」という．

- ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ を固定する．未知数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ に関する方程式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0} \tag{4.3.2}$$

の解が $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ に限る場合，ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ は「一次独立」であるという．

- ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が線形独立でない場合，このベクトルの組は「一次従属」であるという．

ベクトルの組が「一次独立」の場合，その中のどのベクトルも，他のベクトルの一次結合で表すことはできない．一方，一次従属ならば，その中のどれかのベクトルは他のベクトルの一次結合で表せる．この意味でベクトルの組が一次独立なら，その組の中には「余分」なベクトルはない（ぞれぞれのベクトルが一国一城の主である）．逆に，一次従属なら,（他の線形結合で書けるベクトルは）「余分」（または，他のベクトルの家来のようなもの）である．

与えられたベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が一次独立か従属かの判定条件については：

定理 4.3.2 (教科書の定理 3.3, 3.2, 3.4)

- $k > n$ の時，このベクトルの組は必ず一次従属である.（$k < n$ だから一次独立とは言えないので注意.）
- $k = n$ の場合，このベクトルの組が一次独立である必要十分条件は $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \neq 0$ である．
- ベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が一次独立のとき，ここから何個かを取り出した $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_p, \ldots$（ただし，同じベクトルは一回しか使わない）も一次独立である．

4.4 行列の固有空間

（ここは教科書の 3.3 節）さて，行列の固有ベクトルや対角化と一次独立の話を関係づけよう．まず，固有ベクトル（固有空間）について．以下，A は $n \times n$ 行列である．

復習すると，$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ となるゼロでないベクトル $\boldsymbol{v}$ を A の固有ベクトル，λ を A の固有値，と言った．そのとき既に，$\boldsymbol{v}$ が固有ベクトルなら，その定数倍（ただし $c \neq 0$）$c\boldsymbol{v}$ も固有ベクトルになっていることは指摘した．実際，$A(c\boldsymbol{v}) = cA\boldsymbol{v} = c\lambda\boldsymbol{v} = \lambda(c\boldsymbol{v})$ なので固有ベクトルになっている．より一般には

定理 4.4.1 A の固有値 λ に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ とすると，その任意の線形結合（ただし零ベクトルではない）$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$ も固有値 λ に属する固有ベクトルである．３つ以上のベクトルの線形結合も同様．

（証明）$A(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) = c_1A\boldsymbol{v}_1 + c_2A\boldsymbol{v}_2 = c_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{v}_2 = \lambda(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2)$ となるからである．

定理 4.4.2 A の異なる固有値 λ_1, λ_2 に属する固有ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ とすると，

- $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は一次独立である．
- その線形結合 $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$ は（c_1 または c_2 のどちらかがゼロでない限り）A の固有ベクトルにはならない．

この事情は３つ以上の固有値に関しても同様である．

（前半の証明）$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ の両辺に左から A をかけると $\lambda_1c_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2c_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ を得る．この２式を連立してとくと，$c_1 = c_2 = 0$ しか残らない．

ここまでは大事だから，しっかり理解して下さい．

（下の段落はちょっとカッコいい言葉遣いなので，あまり良くわからなくてもよいです.）さて，A の固有値 λ に属する固有ベクトルの全体に零ベクトルを加えたものを V_λ と書こう．上の一つ目の事情から，この V_λ は

- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V_\lambda$ ならば $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V_\lambda$
- $\boldsymbol{v}_1 \in V_\lambda$, c が数なら，$c\boldsymbol{v}_1 \in V_\lambda$

を満たすことがわかる．数学では上の事情を「V_λ は和とスカラー倍について閉じている」と表現する．また，このような性質を持つ集合は「線形部分空間」と呼ばれるものなので，V_λ のことを A の固有値 λ に属する「固有空間」と呼ぶ.（良くわからなくても良い部分，終わり）

なお，試験では「行列 A の固有値 λ に属する固有空間と求めよ」と訊く可能性がある．この場合，固有空間という言葉はわからない人は，一次独立な固有ベクトルの組を答えれば良い．

4.5 行列の対角化 (I)

（ここは教科書の 3.4 節）ここでも A は $n \times n$ 行列とする．

定理 4.5.1 (教科書の定理 3.9) 行列の対角化に関する以下の２条件は同値である：

- A は適当な $n \times n$ 行列 P を用いて対角化可能である．
- A は n 個の一次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を持つ．

なお，A を対角化する行列 P は A の n 個の一次独立な固有ベクトルを並べるとできる：$P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$.

（証明は黒板で）

さて前節で「ことなる固有値に属する固有ベクトルは一次独立である」と言った．もし，行列 A が n 個の異なる固有値を持てば，対応する固有ベクトルは一次独立であり，上の定理から A は対角化可能である．つまり，対角化可能の十分条件として

定理 4.5.2 (教科書の定理 3.10) $n \times n$ 行列 A が n 個の異なる固有値を持てば，A は対角化可能である．

１月１６日：行列の対角化の続き．特に,「充分たくさんの」固有ベクトルがある条件の重要な例.

4.6 行列の対角化 (II)

（ここは教科書の 3.6 節；ただし，以下の定理の多くの証明は「内積」を学習してからでないと紹介できない．これはまとめをかねて，来週に行う.）

さてさて，定理 4.5.1 は行列が対角化できる必要充分条件だから，ある意味，最強の定理だ。また，定理 4.5.2 は固有値を調べたらわかる充分条件である．でもこの二つはどちらも，与えられた行列についてある程度の計算をしないと適用できるかどうかわからないものである．もっと簡単に，行列の形だけ見てわかることはないのだろうか？その答えは「エルミート行列」というもので与えられる．

まずは少し，いろいろな行列の種類を定義しておこう．出てくる行列はすべて $n \times n$ の正方行列とする．また，行列 A の ij 成分（第 i 行，第 j 列の成分）を $(A)_{ij}$ と書くことにする．まず，与えられた行列 A から新しい行列を作る方法を２つ決めておく．

- 転置行列：行列 A（その ij 成分は a_{ij}，つまり $(A)_{ij} = a_{ij}$）に対して，行列 ${}^tA$ をその成分が $({}^tA)_{ij} = a_{ji}$ となっているものとして定義する．これは行列 A を対角線でひっくり返して定義したことになる．${}^tA$ を A の転置行列という.
- 共役転置行列：行列 A（その ij 成分は a_{ij}）に対して，行列 $A^\dagger$ をその成分が $(A^\dagger)_{ij} = \overline{a_{ji}}$ となっているものとして定義する（$\overline{a}$ は a の複素共役を表す）．これは行列 A の転置行列 ${}^tA$ の各成分の複素共役をとったものである．$A^\dagger$ を A の共役転置行列という.

次に，これらを用いて，行列の種類をいくつか定義する.

- 対称行列：行列 A（その ij 成分は a_{ij}）が $A = {}^tA$ を満たすとき，A は対称行列である，という．これは要するに $a_{ij} = a_{ji}$ となってる行列のこと.
- エルミート行列：行列 A（その ij 成分は a_{ij}）が $A = A^\dagger$ を満たすとき，A はエルミート行列である，という．これは要するに $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ となってる行列のことだ.
- 直交行列：行列 P が ${}^tP = P^{-1}$ を満たすとき，P は直交行列という．これは ${}^tP\,P = P\,{}^tP = E_n$ となる行列のこと（E_n は単位行列）.
- ユニタリー行列：行列 U が $U^\dagger = U^{-1}$ を満たすとき，U はユニタリー行列という．これは $U^\dagger\,U = U\,U^\dagger = E_n$ となる行列のこと
- 正規行列：行列 A が $A\,A\dagger = A^\dagger\,A$ を満たすとき，これを「正規行列」と呼ぶ.

さて，以上の準備の下に，行列が対角化できる充分条件は以下の形にまとめられる.

定理 4.6.1 (教科書の定理 3.12, 3.13)

- $n \times n$ 行列 A が実対称行列であれば，A は適当な実直交行列 P を用いて対角化可能である.
- $n \times n$ 行列 A がエルミート行列であれば，A は適当なユニタリー行列 U を用いて対角化可能である.

行列 A が対称行列とかエルミート行列とかいうのは，その形だけ見ればすぐにわかる．だから，この定理は単に充分条件ではあるが，非常に簡単な判定条件を与えてくれるので非常に重要である．実のところ，我々にとって重要な応用では，往々にして対称行列やエルミート行列だけが出てくることも多く，その場合は上の定理から行列が対角化できることが瞬時に結論できるのだ.

行列の積まで計算するつもりなら，もう少しいえる.

定理 4.6.2 (教科書の定理 3.14) $n \times n$ 行列 A が適当なユニタリー行列を用いて対角化可能である必要充分条件は，行列 A が正規行列であること，つまり $A\,A^\dagger = A^\dagger\,A$ を満たすことである.

なお，対角化に関連して，行列の固有値については以下の定理が成り立つ．

定理 4.6.3 (教科書の命題 3.1, 3.2+α)

- エルミート行列や実対称行列の固有値はすべて実数である．
- ユニタリー行列や実直交行列の固有値はすべて，その絶対値が 1 である．

１月２３日：今日は内積
期末試験について：教務課の掲示通りの時刻、場所で行います．試験範囲は今までやったこと全部，ですが，以下が主な話題になるでしょう．

- 行列の固有値と固有ベクトルを求める
- 行列を対角化する
- 連立方程式を解く
- 逆行列を求める
- 行列式を求める

実のところ，３番目以降の項目は１，２番目の項目の中で訊くことが可能です（固有値を求めるには行列式が必要，固有ベクトルを求めるには連立方程式を解く必要がある，対角化の検算には逆行列が...）．３番目以降は，ある程度は１，２番目の項目で代用するかもしれません．
また，今日やるところの「内積」は，あまり試験には出ません．より正確に言うと，内積を知ってたら少しだけ速く解ける問題を出すかもしれない、という程度．
成績は当初に宣言した通りの方法でつけます．期末試験での逆転も十分に可能ですから，中間試験でダメだった人も頑張って下さい．

4.7 内積と正規直交基底

今までの理解を深める意味でも，最後に「内積」をやっておきましょう．この節では行列は $n \times n$ 行列，ベクトルは n 成分の列ベクトルとします．また，ベクトルや行列の成分は一般に複素数とします．ただし，成分がすべて実数のベクトルは「実ベクトル」，成分がすべて実数の行列は「実行列」ということにします．
まず内積の定義から：

定義 4.7.1 (内積とベクトルの長さ；教科書 1.3 節) n 項列ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し（$\boldsymbol{x}$ の第 j 成分は x_j），その <u>内積</u> を

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j \, \overline{y_j} \tag{4.7.1}$$

と定義する．ここで $\overline{y_j}$ は y_j の複素共役．
また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ の <u>長さ</u> を

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} \tag{4.7.2}$$

と定義する．

$\boldsymbol{x}$ の成分が実数の場合，これは通常の「長さ」と一致する（ピタゴラスの定理）．成分が実数でなくても，$\boldsymbol{x}$ がゼロベクトルであることと，$\|\boldsymbol{x}\| = 0$ であることは同値である（各自，計算して確かめよう）．

さて，この定義から見ると，先週にやったいろいろな行列は以下の性質をもつことがわかる．

- 転置共役行列の意味：任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A^\dagger \boldsymbol{x})$
- A がエルミート行列の時：任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$
- A が実対称行列の時：任意の実ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$
- U がユニタリー行列の時：任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\|U\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$
- P が実直交行列の時：任意の実ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\|P\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$

更に，これらの行列の固有値に関する性質が簡単に証明できる．手始めにエルミート行列の固有値が実数であることを示そう．$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ だと仮定する．これと $\boldsymbol{x}$ との内積を作ると $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ が得られる．ところが，この左辺はエルミート行列の性質から $(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$ に等しく，これは更に $(\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x})$ に等しい．つまり，

$$(\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) \tag{4.7.3}$$

が得られた．ところがこの左辺は $\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda\|\boldsymbol{x}\|^2$ に等しく，右辺は $\overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \overline{\lambda}\|\boldsymbol{x}\|^2$ に等しい．つまり，

$$\lambda\|\boldsymbol{x}\|^2 = \overline{\lambda}\|\boldsymbol{x}\|^2 \tag{4.7.4}$$

なのである．ところが，$\boldsymbol{x}$ は固有ベクトルだから零ベクトルではなく，$\|\boldsymbol{x}\| \neq 0$ である．従って両辺を $\|\boldsymbol{x}\|^2$ で割って $\lambda = \overline{\lambda}$ を得るが，これは λ が実数であることを意味している．

最後に正規直交基底について説明しよう．

定義 4.7.2 (正規直交系；教科書の 3.2 節)　m 個の n 項列ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ が

$$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{4.7.5}$$

を満たすとき，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ は <u>正規直交系</u> をなすという．特に $m = n$ の場合，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ は <u>正規直交基底</u> をなすという．

この用語を使うと，ユニタリー行列と実直交行列を以下のように特徴付けられる．

- ユニタリー行列は，その n 個の列ベクトルが正規直交基底をなしている．
- 実直交行列は，その n 個の列ベクトルが正規直交基底をなしている．

（証明）定義からすぐに出る $U^\dagger U = E_n$ などの式を書き下してみるとよい．　□

でも，これは逆に言うと，行列 A を対角化するユニタリー行列をどのように求めるかを教えてくれる性質でもある（シュミットの直交化を用いる）．これについては，簡単に例で説明しよう．教科書の pp.69〜72 付近.