

2006.10.2.

微分積分学 B (理学部数学科)

担当：原 隆 (数理学研究院)：六本松 3-312 号室，tel: 092-726-4774, e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp,

<http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html>

Office hours: 月曜の午後 4 時 ~ 6 時頃，僕のオフィスにて．講義終了後にも質問を受け付けますし，これ以外の時間でもアポさえとってくれば大抵は大丈夫です．

概要：この講義は春学期の「微分積分学 A」の続きである。「テイラー展開」「1 変数関数の積分」「多変数関数の微分とその応用 (極大・極小)」を主に扱う．この他の大きなテーマとして「級数」が存在するが，これは数学概論 I で詳しく扱われるため，この講義ではほとんど触れない．ただし，「級数」の基本的なところは春学期にもやったし，この講義でも必要に応じて利用する．また当然，「数学概論 I」とは密接に連携して進むことになる．

秋学期でキーとなる概念：テイラー展開， ϵ - δ 論法 (級数)，積分，偏微分，多変数関数の極大極小，陰関数定理

この講義で学んでほしい「能力」は春学期に引き続き以下の 2 つである．

- 微分や積分のいろいろな概念を習得し，実際に 応用して使える ようになること
- その際，厳密に議論が展開 でき，自分の議論に自信が持てる ようになること．

これらについては春学期でも強調してきたが，クラス全体としての定着率はまだ十分とは言い切れないと思う．

そのため，この講義のある程度の部分は「厳密な理論を展開する」ことにあてられる．特に極限概念を厳密にした春学期をうけて，秋学期には積分を厳密に扱う (高校で積分を習ったはずだが，その取り扱いは非常に不十分であったことは春学期にも強調した。) しかし，いくら厳密なことがわかったつもりになっても，その理論を実際に使えないのは無意味である．従って，厳密な部分と応用の部分の双方に目配りをし，欲張って進んでいく．

履修上の注意：

1. この講義は 数学科向け のもので，他学科向けのものとは少し異なる (はっきり言って，難しいぞ)．従って，他学科の学生さんの履修にはお勧めしない (それを承知でとってみたいという人は歓迎する)．
2. 箱崎日に開講される「数学概論 I」とはかなりの連携をとる予定である．所々，内容が重なる部分もあるが，それはまあ大事なところだから二回やってください．

内容予定：(以下は大体の目安です．皆さんの理解の程度などにより，ある程度の変更はあり得ます)．

I. テイラー展開 (2 ~ 3 回程度)

- テイラー展開の理論と実際例

II. 積分 (5 回程度)

1. 積分の定義
2. 積分はいつ定義できるのか，連続関数の可積分性
3. 広義積分
4. 極限の交換と一様連続性 (これは数学概論と少し重なる)
5. 中間試験をどこに入れるか?

III. 偏微分の続き：特に極大・極小問題と陰関数定理 (4 ~ 5 回程度)

1. 連鎖律の復習 (演習へ回す)
2. 多変数関数のテイラーの定理
3. 極大・極小の問題
4. 陰関数定理
5. 条件付き極値問題

教科書と参考書：教科書は微積 A と同じ．参考書も微積 A と同じで，高木貞治「解析概論」(岩波)，小平邦彦「解析入門 I, II」(岩波)，杉浦光夫「解析入門 1, 2」(東大出版会)，溝畑茂「数学解析」などが挙げられる．なお，「共立ワンポイント数学双書」というシリーズの「イプシロン-デルタ」とか「テイラー展開」も良い．

演習書の勧め

春学期にも言った事ですが、再録します。皆さんは大学生なんだから「これはヤバい」と思ったら自分で手をうってくださいね。特に、教科書に載っている例題や節末問題、章末問題は必修です。でもこれだけではちょっと不安ですから、演習書（いわゆる問題集）をやることを勧めます。問題をやることによって、自分が曖昧にしかわかっていなかった部分がはっきりしてくることが多いと思います。ただし、その際、解答を鵜呑みにはせず、自分で納得するまで考えること。考えてもわからなかったら、友達や教官（僕を含む）に訊けばよいのです。

演習書はどれでも良いと思いますが、一応、目についたものを列挙します。

- 三村征雄編「大学演習 微分積分学」(裳華房) — 僕はこれを使った。ちょっとムズイかもね。
- 蟹江、桑垣、笠原「演習詳説 微分積分学」(培風館) — なかなか良いが、はじめは難しく感じるかも。
- 杉浦ほか「解析演習」(東大出版会) — これもまあ、大変ではありますが、良い本。
- 鶴丸ほか「微分積分 — 解説と演習」(内田老鶴圃) — 一番「普通」かも。
- 飯高茂監修「微積分と集合 そのまま使える答えの書き方」(講談社サイエンティフィック) — 題名は変だけど、馬鹿にはできない、なかなかの本。流石は飯高さん監修だけあるな。案外、おすすめ。

これ以外にもいくらでも出版されてるから、図書館や本屋さんで自分にあった（読みやすい、やる気になる）ものを選べば良いでしょう。ただしその際、解答や解説のある程度詳しいものがよいと思います。また、無理をして難しすぎるものを選ぶ必要はありません。自分が簡単だと思うことでも（人間はアホやから）わかってないことが一杯あり、むしろ簡単どころが盲点になって先に進めないのです。簡単な演習書でもやれば、大きな効果があるはず。

評価方法：主に中間試験（+レポート）と期末試験の成績を総合して評価する。そのルールは以下の通りだが、優（A）を狙うには特別の関門があるので、後の但し書きを良く読む事。

- 最終成績は一旦、100点満点に換算してから、この大学の様式に従ってつける。
- その100点満点（最終素点）は、以下のように計算する。
 - － まず「中間試験（+レポート）の点」「期末試験の点」をそれぞれ100点満点で出す。
 - － 次にこの2つを以下の式で「平均」し、一応の総合点を出す：

$$(\text{総合点 } A) = 0.50 \times (\text{中間} (+ \text{レポート}) \text{の点}) + 0.50 \times (\text{期末の点})$$

- － ただし、総合点 A の計算式の重みを若干変更する可能性はある（中間：期末=4:6 など）。
- － 最終素点は

$$(\text{最終素点}) = \max\{(\text{総合点 } A), (\text{期末の点})\}$$

とする。つまり（総合点 A）と（期末の点）を比べて、良い方をとるのだ。

- 上の「最終素点」をよく見て、必要ならば全体に少し修正を加えたものをつくり、これをこの大学の基準と合わせて最終成績を出す。
- レポートは原則としては総合点 A には加えない。しかし、上の計算では合格基準に少し足りない人（百点満点で10点不足が限度）を助けるかどうか使用する。また、チャレンジ問題などでずば抜けた解答をした人にも特例措置を講ずるかもしれない。
- これから行うかもしれない「夏休み復習テスト」の結果も、レポートに準じて扱う。

（A をとるための重要な但し書き）この科目には箱崎進学がかかっているから、期末試験であまり冒険をする訳にはいかず（A と B の区別をつけるような）極端に難しい問題は出題しにくい。そのため、中間試験にも A, B の峻別を行う機能のある程度持たせて、中間・期末ともに成績優秀な人にのみ、A をあたえるようにする可能性が高い。この意味で、A をとるためには期末だけでの一発逆転は無理かも知れない。A を狙って頑張る人はこの点を考慮して、中間・期末とも確実に受験してほしい。

非常に重要な注意：この教科は落とすとヤバいぞ！

当然のことながら、微分積分学 A, B は数学科の箱崎への進学要件に入っています —— これを落としたら、原則として箱崎に行けません。さて、微積 A の方は来学期に再履修の可能性があります。微積 B はこれを落とせば

終わりです（再履修は来年の同じ時期、つまり箱崎に行けなかった時期に寂しくおこなうしかありません）。この点をよくよく考えにいれ、何としてでも単位を取得できるように頑張ってください。

僕は皆さんの学力の向上のためには努力を惜しまないつもりで、質問や勉強法の相談は随時、受け付けます（春学期と同じ）。また、合格基準やレポート問題なども明示します（これも春学期と同じ）。更に、春学期の最難問であった ϵ - δ の持つ比重も、秋学期にはそれほど大きくはありません。だから、本気でやれば合格できるはずです。従って、最終的な試験結果などが足りない人に、お慈悲で単位を出したりは絶対にいたしません。この点は後から泣きついて一切無駄ですから、忘れないように。

なお（皆さんの中にはいなかったが）期末や再調査がヤバかった場合に僕宛にメールなどで「この教科を落とす訳にはいかなので何とかしてください」などと言ってくる人がいます。言うまでもなく、大学の単位は「頼んで取得する」ものではありません。このようなことは効果がないだけでなく、僕から単位をとるには逆効果です。この点を勘違いしないよう、くれぐれもよろしく。

「学習到達度再調査」について：

春学期「学習到達度再調査」を二十人以上に適用しました。結果、よく勉強して、自分の弱点を良くカバーしてきた人も何人かいました。これは使い様によっては役に立つ制度なので、秋学期も積極的に利用します。すなわち、

期末テストなどは厳しく採点し、合格基準付近の人は（少くくらい合格基準を上回っていても）全員「再調査」に呼ぶ。再調査は綿密に行い、この講義で習得してほしい最低条件をすべて満たした人のみ、合格にする。

上に宣言したように、「再調査」はやるけども、その採点はかなり厳しく行います。春学期の場合、再調査になった人の半分以上は必死で勉強したようで、結果的にはかなり優秀な再調査結果にはなりました。これなら再調査をやった意味もあったということだし、堂々と合格点が出せます。しかし、そうはならなかった場合、僕としては合格点を出せません（僕が恐れているのは、春学期の再調査で結果的にはかなりの人が合格したため、皆さんが再調査を甘く見るのではないかということです。春学期であれだけたくさんの方が通ったのは、それぞれがかなり勉強した結果だという事を忘れないように。)

合格（最低）基準：

合格のための条件（A, B がとれる条件ではない！）は、講義中に出題する例題、レポート問題と同レベルの問題が解けることである（ただし「時間がなくてレポートは出せないけど試験には出ずぞ」などの指示を講義中に与えることもあり得る。）具体的に書くと、大体、以下ようになる（進度の都合で若干の変更はあり）。

- テイラー展開の理論と具体的計算ができること。
- 積分の定義がわかっており、その応用や広義積分も理解していること。
- 偏微分の計算（特に連鎖律）、および応用（極大・極小問題）ができること。
- ϵ - δ 論法の基礎を理解しており、非常に簡単な例題が解けること。

ϵ - δ 論法は春学期の範囲であるが、今学期も要所所に顔を出すので、要求しない訳には行かないだろう。

レポート、宿題、教科書の問題、演習の問題について：

講義中に何回か、簡単なレポートや「お奨めの宿題問題」を出すだろう。これらの出題の意図は「この程度できれば講義についていけるし、合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること、である。成績評価に占めるレポートの比重は低いが、この講義をこなす上では重要な意味があるので、やってみること！「レポート」の作成はみんな協力してやっても構わないし、むしろ協力することを奨励する。ただし、（友達と協力してレポート問題を解いた場合でも）各人のレポートは自分の言葉で記述し、かつ、「君と一緒に考えました」とぐらいいは書くべきだ。また、教えてもらった事はそのままにせず、自分でもう一回考えて納得しておく事（これらは高校までで身に付いているべきだが、どうも怪しい人が多いようだから書いておく。）

また、当然のことではあるが、講義で進んだ部分に該当する教科書の問題くらいは全問、やっておくこと。

プリントの使いかた：

春学期と同じように、僕自身の書いたプリントも用いる。ただし、今学期は印刷したものを配布する代わりに、各自で僕の web page からダウンロードしてもらうことにするかもしれない。これらのプリントは板書にアップアップしないで講義が聴けるように、また、教科書の足りないところを補うために、配っているものである。なお、急いで作っているためにタイプミスなどがかなりあると思うので、気づいたらできるだけ指摘してくれるとありがたい。

勉強法などについて：

今学期の内容は春学期ほどは取り付きにくいものではないでしょうが、春学期や高校での内容がアヤフヤな人にはかなりきつくなることが予想されます。そうならないためには、

1. 最低限の計算力を身につける。先に挙げたような演習書をともかく一冊、自分でやってみる。
2. 論理的に考える癖も身につける。何となくウザイと思っても嫌がらずに、教科書や講義での論理展開を自分で追ってみる

ことがかなり役に立つはずです。

ついでに勉強法について今学期の皆さんの反応などをふまえて書いておきます。

- 第一原則として、自分の納得するまで考えて、理解することを目指す。
- でも行き詰まったら、気分転換も兼ねて演習書などをやる。具体的に手を動かすことで、「わかったつもりで全然わかってない」ことが見つかるかも。
- 新しい概念などがわからない時は、その「定義」がそもそもわかってないことが非常に多い。重要な概念の定義が言えるか、自答しよう。定義が言えない時は定義を覚えられるまで、具体例を考えよう（意味もわからずに定義を丸暗記するのは、たいていの場合は無駄だが、やらないよりはましかも。）具体例さえ思い浮かばない時はかなりの重症です。友達や教官に質問しましょう。
- 定義、定理などでは反例を常に思い浮かべるようにする。「定理のこの条件がなくなったらどこが困るのか」などを考えるとより身近に感じられるかも。
- （最後に）ここは大学で、これまでのように手取り足取りはしてくれない（少なくとも僕はしない）ことを思い出そう。皆さんが自分から動けば道は開けるけども、助けてくれるのを待っているだけでは何も解決しないよ。

この科目に関するルール：

世相の移り変わりは激しく、僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました。そのうちのいくつかは良いことですが、悪いこともあります。オヤジだとの批判は覚悟の上で、互いの利益のために、以下のルールを定めます。これらは春学期と同じですが、念のため。

- まず初めに、学生生活の最大の目的は勉強することであると確認する。
- 講義中の私語、ケータイの使用はつつしむ。途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）。これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケットです。
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける。
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕のホームページも使う — アドレスは次ページの上）。「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切、受け付けない。
- レポートを課した場合、その期限は厳密に取り扱う。
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.kyushu-u.ac.jp）。ただ、回答までには数日の余裕を見込んで下さい。

重要な予告：45分程度の「夏休みも勉強しましたかテスト」をどこかで行う可能性が高い。テストそのものは割合簡単なものになる予定である。範囲は主に教科書の問題や中間・期末テストに類似したものをいくつか出題する（テイラー展開もちょっと出すかも）。これは特に、皆さんの現時点での理解力と計算力を把握する意味もある。

10月16日：今日はテイラー展開の続きです。

第2回レポート問題（テイラーの定理その2）:

問1：以下の(a), (b)を表すテイラーの公式($x=0$ を中心)を $n=1, 2, 3, 4, 5$ で書き, それぞれの場合の S_n と $|R_n|$ の数値を求めよ(この問いの下の注意を参照). また, 真の値と S_n の差も求め, それが(もちろん) $|R_n|$ よりも小さい事を確かめよ.

$$(a) \quad e \quad (b) \quad \sin(\pi/2)$$

(a)の e とは自然対数の底である.(a),(b)の正確な値(または近似値)はみんな知ってるはずだが, S_n が実際にどのくらいの値になったかを計算する事で, テイラー展開の良さを実感して欲しい. e, π の値は電卓に入ってるのを用いて良い.

(注意) 題意が不明瞭なので説明します. 上で「 S_n と $|R_n|$ の数値を求めよ」とありますが, $|R_n|$ にはもちろん, ξ が入っています. ξ の値を決めない限り R_n の値は決まりませんが, 一般論から ξ を決めるのは不可能です. そこで, ここで要求しているのはその ξ が最悪(つまり $|R_n|$ の値が最大)の場合の $|R_n|$ の値を求めよ, ということです. つまり, $|R_n|$ の最大値がわかれば, 「誤差は最悪でもこれだけ」という目安ができるから, その目安を求めなさい, という意味です.

また, 問題の最後に「真の値と S_n の差」と $|R_n|$ を比べなさい, とありますが, ここのも, 上に説明した $|R_n|$ の最大値と比べよ, という意味です. もちろん, $|R_n|$ の最大値の方がでかいに決まっていますが, 念のためにそうなるかチェックしましょう, との意味です.

問2*：(チャレンジ問題) 前回の解答例に書いたように, $\sin x$ のテイラーの公式は S_n が同じでも, R_n が2通りあり得る(n が偶数と奇数で). これらはもちろん一致するはずだが, 本当に一致するか?(何を調べたら, または何を示したら一致することが確かめられるかも含めて考えよ.) 講義ノートに書いた表式はもしかしたら間違っているかもしれないから, 自分で導出する事.

番外問題：春学期と同じ. わからなかったところ, 改善の要望などあれば, 自由に.

レポート提出について：上の問(少なくとも問1)に解答し,

10月20日(金)午後3時までに, 原の部屋(六本松3号館3-312)の前の箱に

入れてください. 整理の都合上, 用紙はできるだけA4を使ってください. また, 2枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ. 「番外問題」と「重要な注意」(友達に感謝する)は春学期の通り.

重要：レポートは友達と相談した結果を書いても良い. ただし, 誰と相談したかは明記すること. («俺は人に教えてやっただけで人からは全く教わってない」と思う人は書かなくても良いが.) 相談した人の名前を書かせるのは, それで点数を左右するのが目的ではない. 「お世話になった文献, 人にはきちんと感謝する」という, 科学上の最低ルールを守ってもらうためである.

先週のレポートの解答

問1：ともかくやるのみだ.

(a)

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}, \quad f'(x) = \frac{2}{(1-2x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \times 2 \times 2}{(1-2x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{2^3 3!}{(1-2x)^4}, \dots$$

とやっていくと(厳密には数学的帰納法で証明すべし)

$$f^{(n)}(x) = \frac{2^n n!}{(1-2x)^{n+1}}, \quad f^{(n)}(0) = 2^n n!$$

とわかる．従って，テイラーの公式（定理 5.4.1 の (5.4.7) 式）で $a = 0$ としたものを書くと

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k x^k, \quad R_n(x) = \frac{2^n}{(1-2\xi)^n} x^n \quad (\xi \text{ は } x \text{ と } 0 \text{ の間の数})$$

となる．

注意

- 上の S_n の和は等比級数だから $\frac{1-(2x)^n}{1-2x}$ とする事はできて，それは間違いではない．しかし，この問題はテイラー展開へつながる問題なので，敢えて和を計算しきらず，上の形（ x の級数の形）にしておく方がよい．
- （以下の問題にも共通）テイラーの公式の分母にある $n!$ を忘れない事！たくさんの人がいくつかの小問で忘れていたぞ．

(b) 高校の時からも散々やったように $g^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$ だから，特に $g^{(n)}(0) = a^n$ ．従って

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} x^k, \quad R_n(x) = \frac{a^n}{n!} e^{a\xi} x^n \quad (\xi \text{ は } x \text{ と } 0 \text{ の間の数})$$

(c) $\sin x$ を微分すると $h(x) = \sin x, h'(x) = \cos x, h''(x) = -\sin x, h'''(x) = -\cos x, h^{(4)}(x) = \sin x, \dots$ となるわね．以下同様で， $m \geq 0$ を非負の整数として

$$h^{(2m)}(x) = (-1)^m \sin x, \quad h^{(2m+1)}(x) = (-1)^{m+1} \cos x$$

となっている．従って $x = 0$ での微分の値は奇数階微分した時だけゼロでないことに注目して書いてみると

$$S_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad R_{2n}(x) = \frac{(-1)^n \sin \xi}{(2n)!} x^{2n} \quad (\xi \text{ は } x \text{ と } 0 \text{ の間の数})$$

注意

- R_n と S_n の n がずれた人が非常に多かった．すなわち，定理 5.4.1 の S_{2n} に相当するものを S_n と書き，一方で R_n に相当するものをそのまま R_n とした人が半分近く！これでは S の方は x^{2n-1} くらいまでであるのに， R_n の方は x^n しかない．これでは R_n （誤差項）の方が大きくなってしまふぞ！
- 実は上と異なる解もある．原点での高階微分がいつゼロになるかに注目すると

$$S_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n \cos \xi'}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (\xi' \text{ は } x \text{ と } 0 \text{ の間の数})$$

とも書けるはずだ．ところがこの $S_{2n+1}(x) = S_{2n}(x)$ だ．ということは $R_{2n}(x) = R_{2n+1}(x)$ でもあるはずだが，大丈夫だろうか ...

(d) $p'(x) = \frac{a}{1+ax}, p''(x) = \frac{-a^2}{(1+ax)^2}, p'''(x) = \frac{a^3 \times 2}{(1+ax)^3}$ とやっていると一般に

$$p^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{a^n (n-1)!}{(1+ax)^n}, \quad p^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} a^n (n-1)!$$

だから ($p(0) = 0$ も考えに入れて)

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{a^k}{k} x^k, \quad R_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} a^n}{n(1+a\xi)^n} x^n \quad (\xi \text{ は } x \text{ と } 0 \text{ の間の数})$$

(e), (f) については一般の n では大変だろうから，最初の 4 つだけしゃにむに微分しろ，というつもりでした．答えは（最初の 4 項だけを聞いているが，サービスでもう少し追加）

$$q(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6$$

$$r(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{5}{16}x^7 + \frac{35}{128}x^8$$

$q(x)$ のほう，第 4 項を $1/16$ でなく $3/16$ とした人が多かった．多分， $3!$ で割るのを忘れたのだろうと思うが，ご注意！

$q(x)$ はともかく， $r(x)$ の一般項はわかりそうに思われるね．係数が $1, 1, 1/2, 1/2, 3/8, 3/8, 5/16, 5/16, \dots$. これは何か理由があるでしょうから，考えてみよう（その際，闇雲に公式を使わず，少し変形してみると良いだろう．）

問 2 の方は黒板でやります．問題の意味はもちろん「剰余項が $n \rightarrow \infty$ でゼロになる」ことを示せ，でした．

10月23日：今日はお約束のテストと、テイラー展開のまとめです。
来週からは「積分」に入ります。
テストの採点もあるので、今日はレポートはありません。

————— 先週のレポートの解答 —————

問1： ともかくやるのみだ。

(a) $e = e^1$ だから、指数関数 e^x の $x = 1$ の場合のテイラーの公式をつかう。これは

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \quad R_n = \frac{e^\xi}{n!}$$

である (ξ は 0 と 1 の間の数)。剰余項は

$$\frac{1}{n!} \leq R_n \leq \frac{e}{n!}$$

を満たしている。そこで、関連する値を表にしてみると、以下ようになる (剰余項は正なので絶対値をつけずに書いた。また、剰余項が誤差に等しくなる ξ の値も参考までに載せた)

n	S_n	$e - S_n$	R_n の上界	ξ_n の値
1	1.000000000000	1.718281828459	2.718281828459	0.541324854613
2	2.000000000000	0.718281828459	1.359140914230	0.362253912356
3	2.500000000000	0.218281828459	0.453046971410	0.269791209197
4	2.666666666667	0.051615161792	0.113261742852	0.214114013878
5	2.708333333333	0.009948495126	0.022652348570	0.177157759885
6	2.716666666667	0.001615161792	0.003775391428	0.150931065724
7	2.718055555556	0.000226272903	0.000539341633	0.131392611451
8	2.718253968254	0.000027860205	0.000067417704	0.116291674088
9	2.718278769841	0.000003058618	0.000007490856	0.104280028643
10	2.718281525573	0.000000302886	0.000000749086	0.094502747873
11	2.718281801146	0.000000027313	0.000000068099	0.086392367556
12	2.718281826198	0.000000002261	0.000000005675	0.079557853729
13	2.718281828286	0.000000000173	0.000000000437	0.073721195471

表の3列目と4列目を比較すると、 R_n の上界が正しい誤差の2倍強になっていることがみてとれる。一方、最後の行からは ξ は本当はそんなに大きくない事もわかる。実際、 R_n に出てくる ξ を ξ_n とすると、 $n \rightarrow \infty$ では $n\xi_n \rightarrow 1$ なのだ (このような事実はどのようにしたら納得できるだろうか？ ヒント：テイラーの公式の次の項を考えてみよう)

(b) この前のレポートから

$$S_1 = 0, \quad S_2 = S_3 = \frac{\pi}{2}, \quad S_4 = S_5 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3$$

$$R_1 = \frac{\pi}{2} \cos \xi_1, \quad R_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \sin \xi_2, \quad R_3 = -\frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \cos \xi_3, \quad R_4 = \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \sin \xi_4, \quad R_5 = \frac{1}{120} \left(\frac{\pi}{2} \right)^5 \cos \xi_5$$

である (すみません！先週の R_{2n+1} は符号が間違っていました)。ここで ξ_j は 0 と $\pi/2$ の間の数だが、各 R_j で異なる値である可能性が高い。ともかく、この範囲の ξ なら $\sin \xi, \cos \xi$ とともに 0 と 1 の間であるから、 R_j が最悪どのくらいかを見積もる事ができる。これを表にすると

n	S_n	$1 - S_n$	R_n の上下界	ξ_n の値
1	0.0000000000	1.0000000000	1.57079632679	0.88068923542
2	1.57079632679	-0.57079632679	-1.23370055014	0.48100466556
3	1.57079632679	-0.57079632679	-0.64596409751	0.48722647785
4	0.92483222929	0.07516777071	0.25366950790	0.30083903583
5	0.92483222929	0.07516777071	0.07969262625	0.33859840949
6	1.00452485553	-0.00452485553	-0.02086348076	0.21861646340
7	1.00452485553	-0.00452485553	-0.00468175414	0.25962147968
8	0.99984310140	0.00015689860	0.00091926027	0.17151893398
9	0.99984310140	0.00015689860	0.00016044118	0.21053268528
10	1.00000354258	-0.00000354258	-0.00002520204	0.14103443008
11	1.00000354258	-0.00000354258	-0.00000359884	0.17705032522
12	0.9999994374	0.0000005626	0.00000047109	0.11970927865
13	0.9999994374	0.0000005626	0.0000005692	0.15275062100

これを見ると、 n が奇数の時の誤差評価はかなり良いことがわかる、これはなぜなのか、各自で考えてみる事（ヒント：テイラーの公式でこの次の項がどうなっているか？）

問 2： $x = 0$ の周りの展開を考える． $\sin x$ は奇関数なので $x > 0$ を考察すれば充分だ．ともかく剰余項は

$$R_{2n} = \frac{(-1)^n \sin \xi_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \quad R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n \cos \xi_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

である（ ξ_{2n}, ξ_{2n+1} は 0 と x の間の数）．先週のプリント、 R_{2n+1} の符号が間違っていました．この 2 つが等しいはずなのだが、大丈夫だろうか？というのが問題．

まず、一番無味乾燥な答えとして、「テイラーの公式の導出が間違っていなかったら、計算したらこうなるんだから仕方ない」というのがある．はい、ごもっともですが、もう少し別方向から切り込んで欲しいというのが、出題意図でした．

そこで次に注意すべきは（既にも上で答えを書いてしまってるが） ξ_{2n} と ξ_{2n+1} はそれぞれ x と n に依存して決まる量であるので、上の 2 つが同じでも矛盾はない、ということがある（ぼんやりしてると $\xi_{2n} = \xi_{2n+1} = \xi$ だと思ってしまう、 $R_{2n} = R_{2n+1}$ から ξ を解こうとする人がいるだろうから、念のために注意しておく）

より積極的に上の 2 つが等しいことをいいたいのだが、これはかなり難しい．実は今日の講義でやる「積分形の剰余項」を使うとすぐに出るのだが、それを使わないと中々大変だ．そこでここでは、ある程度のこと「矛盾がない」ことを確かめるにとどめる．

R_{2n} と R_{2n+1} が等しいためには

$$\sin \xi_{2n} = \frac{x}{2n+1} \cos \xi_{2n+1}$$

が必要十分だ．これは ξ_{2n} から ξ_{2n+1} を決める式だと思うと、このような ξ_{2n+1} が存在するためには（ \cos は 0 と 1 の間なので）

$$(??) \quad 0 \leq \sin \xi_{2n} \leq \frac{x}{2n+1} \quad (??)$$

が必要充分である．以下ではこれが成り立っている事を確かめてみる．

そのために、高校でも（微分の応用としてやったかもしれない）

$$\sum_{k=0}^{2m+1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \leq \sin x \leq \sum_{k=0}^{2m} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (m \geq 0)$$

を用いる．この左側の不等式、右側の不等式から（ k を奇数まで、偶数まで足した場合を別々に考えて併せると）

$$0 \leq (-1)^n R_{2n}(x) \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

を得る．これは $R_{2n}(x)$ の表式を代入すると

$$0 \leq \frac{\sin \xi_{2n}}{(2n)!} \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{つまり} \quad 0 \leq \sin \xi_{2n} \leq \frac{x}{2n+1}$$

となるが、これは正に (??) である．つまり、 $R_{2n} = R_{2n+1}$ となるような ξ_{2n}, ξ_{2n+1} は存在してもおかしくはない．

10月30日：今日は「積分」に入ります。

第3回レポート問題（区分求積を実際にやってみよう）:

今回から問題番号は通し番号にしました。

問5： $a > 0$ を定数とする，以下の関数 $f(x)$ に対して，定積分 $\int_0^a f(x)dx$ を，その上積分，下積分を計算する事により，求めよ（つまり，分割 P に対する上限和，下限和を計算して， $|P| \rightarrow \infty$ の極限をとる。）

ただし，本来は様々な（もちろん，等分割ではない）分割 P について上の極限を計算する必要があるが，これはかなり面倒である．そこで，分割 P が区間 $[0, a]$ を等分割する場合のみを考えても良いものとする．

$$(a) f(x) = x, \quad (b) f(x) = x^3,$$

（念のための注）もちろん，この講義で一生涯懸命やっている事により，高校までの積分の知識はすべて正当化されるから「原始関数」の概念を使えば，皆さんは上の定積分の値を即座に計算できる（と言うか，高校2年生ならできるよね）．しかし，この問題では，敢えてそのような簡単な計算法をとらず，面倒でも区分求積を手でやって頂く（それにより，定積分の感じをつかんでもらう）ことを目指している．

問6*：（チャレンジ問題）上の問題で，分割 P が等分割になっていない場合に挑戦してみよ．つまり，分割 P が等分割でない場合の上積分，下積分をなんとかして求めてみよ．この際，等分割のもので等分割でないものをうまく押さえるようにするのが良いだろう（ただし，講義でやっている一般論，特に「連続関数は積分可能」などを使っては面白くないよね）

レポート提出方法： 上の問（少なくとも問1）に解答し，

11月2日（木）午後4時までに，原の部屋（六本松3号館3-312）の前の箱（？）に

入れてください．箱崎で会議があるので，~~ノ~~切が早くなっています．ご注意！整理の都合上，用紙はできるだけA4を使ってください．また，2枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてください．「番外問題」と「重要な注意」（友達に感謝する）は春学期の通り．

----- 先週のテストの解答 -----

問1：

- (a) 答えだけ： $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \left(n, m > N(\epsilon) \implies |a_n - a_m| < \epsilon \right)$
 (b) 任意の m, n に対して

$$|b_n - b_m| \leq |b_n| + |b_m| = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{m}} \leq \max\left\{ \frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{2}{\sqrt{m}} \right\}$$

である．従って， $\epsilon > 0$ に対して $N(\epsilon) := 4/\epsilon^2$ ととってやると，(a) の定義が満たされている事がすぐにわかる．

問2： 見易いように， $S_n := \sum_{k=1}^n c_k x^k$ ， $T_n := \sum_{k=1}^n d_k x^k$ と書く．どちらも極限の行き先の見当がつかないから，「 S_n や T_n がコーシー列である」ことを示すしかほとんど手が無いだろう．やってみよう．なお，コーシー列の定義では $m > n$ または $n > m$ のどちらかだけ考えても十分なので，以下では $m > n$ のみ考える．

- (a) ともかく S_n と S_m の差を計算すると ($m > n$)

$$S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^m c_k x^k$$

である．そこでこの絶対値をとると

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m c_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |c_k| |x|^k \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{R^k} |x|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|x|}{R} \right)^k = \left(1 - \frac{|x|}{R} \right)^{-1} \left(\frac{|x|}{R} \right)^{n+1}$$

がなりたっている．最右辺の第一因子は $|x| < R$ なら有限，第2因子は $n \rightarrow \infty$ でゼロになる．従って，任意の $\epsilon > 0$ に対して N を十分に大きくとると， $m > n > N$ で

$$|S_m - S_n| \leq \left(1 - \frac{|x|}{R}\right)^{-1} \left(\frac{|x|}{R}\right)^{n+1} \leq \left(1 - \frac{|x|}{R}\right)^{-1} \left(\frac{|x|}{R}\right)^{N+1} < \epsilon$$

とできる (N は ϵ と $|x|/R$ に応じて，上の最後の不等式がなりたつようにとればよらしい)．これはコーシー列の定義そのものなので， $\{S_n\}_n$ がコーシー列だと示せた．従って， S_n の極限は存在する．

大切な注意： $|S_n| < \left(1 - \frac{|x|}{R}\right)^{-1} < \infty$ だから収束する，とした人が少なからずいたが，これはダメだよ．これは単に和が有界だと言ってるに過ぎない．有界な和でも収束しない例としては，例えば $\sum_{k=1}^n (-1)^k$ を考えると良い．これはいつも -1 と 0 の間にあるけど，永遠に収束しないでしょ．

(b) これはまあ，難しい訳だ．なぜかという，(a) がヒントにはなってるけど，(a) とは異なって $|d_k|$ の簡単な上界がないからだ．条件から $|d_k|$ は大体 R^{-k} くらいかな，と思われるが，極限の条件からこれを示すのが難しい．(実際，以下で見るように， $|d_k|$ は R^{-k} よりも少し大きい可能性もある)．

多少天下りだが，以下のように考えるとよい．今， $|x| < R$ とっているので， $\delta > 0$ を

$$\delta := \frac{R - |x|}{2R^2}$$

と定める．すると， d_{k+1}/d_k の極限が $1/R$ であることから，この δ で決まる (十分に大きい) N_1 があって，

$$n \geq N_1 \quad \implies \quad \left| \frac{d_{n+1}}{d_n} - \frac{1}{R} \right| < \delta$$

となっているはずである (極限の定義を $\delta - N$ 論法で書いただけ)．後ろの不等式を使い易い形にすると $n \geq N_1$ で

$$\left| \frac{d_{n+1}}{d_n} \right| < \frac{1}{R} + \delta = \frac{1 + R\delta}{R} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{R - |x|}{2R}\right) \quad \text{これを } = C_1 \text{ とおく.}$$

となる．従って， $k > N_1$ では

$$|d_k| \leq (C_1)^{k-N_1} |d_{N_1}|$$

が成り立つ．これから， $m > n > N_1$ では

$$|T_m - T_n| \leq \sum_{k=n+1}^m |d_k| |x|^k \leq \sum_{k=n+1}^m (C_1)^{k-N_1} |x|^k |d_{N_1}| = |d_{N_1}| (C_1)^{-N_1} \sum_{k=n+1}^m (C_1 |x|)^k$$

となる．ところが， $0 \leq |x|/R < 1$ では

$$C_1 |x| = \frac{|x|}{R} \left(1 + \frac{R - |x|}{2R}\right) < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|x|}{R}\right) < 1$$

となっている (最初の不等式は $y = |x|/R$ についての2次不等式と思って導くと良い)．従って， $m > n > N_1$ では

$$|T_m - T_n| \leq |d_{N_1}| (C_1)^{-N_1} \sum_{k=n+1}^m (C_1 |x|)^k \leq \left(1 - C_1 |x|\right)^{-1} (C_1 |x|)^{n+1}$$

が得られた． N_1 は δ に応じて決まる有限の値ゆえ，上の式で n に依存するのは最後の項だけだ．従って (a) と同様に，任意の $\epsilon > 0$ に対しても n を十分に大きくとると上の右辺を ϵ より小さくできる．つまり，任意の $\epsilon > 0$ に対して $N(\epsilon) > N_1$ を大きくとって，

$$m > n > N(\epsilon) \quad \text{ならば} \quad |T_m - T_n| < \epsilon$$

とできる．これは $\{T_n\}$ がコーシー列であることを意味するので， $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ は存在する．

11月6日：今日は「積分」の2回目，ダルブーの定理と一様連続性です．

第4回レポート問題（今回はチャレンジ問題のみ）：

問7*： 積分や上積分，下積分の定義には「任意の分割」が登場するが，これを「等分割にした分割」のみにしたら支障はあるだろうか？一つの理論的な支障は教科書の p.187 の「談話室」にあるけども，それ以外には困る事があるか？特に「等分割の分割」に制限したら可積分だけど「任意の分割」まで広げると可積分でない（上積分と下積分が一致しない）関数の例はあるだろうか？

（もしそのような例がないなら，積分の値を計算する時には「等分割」のみ考えれば良いから，前回のレポート問題などもかなり考え易くなるよね．）

レポート提出方法： 上の問に解答し，

11月10日（金）午後5時までに，原の部屋（六本松3号館3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけA4を使ってください．また，2枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてください．「番外問題」と「重要な注意」（友達に感謝する）は春学期の通り．

（原の体調不良のため，前回のレポート回答は黒板でやります．）

1月15日：御待たせしました。お約束のレポート問題です。問9はチャレンジ問題です。
最後まで問題が決まらなかったで、ミスプリが残ってるかもしれないから遠慮なくメールなどで質問して下さい。発見されたミスは僕の web page で告知する予定。

第5回レポート問題（九大祭特別号）:

問8： テイラー展開の誤差評価をもう一度やってみましょう。

(1) 「剰余項が積分の形のテイラーの公式」(講義ノートの7ページ, 定理 5.4.7) が正しい事を確かめよ。(証明はその定理のところと与えてあるので, 自分で納得して下さい, という事です。)

(2) この剰余項 $R_n(x)$ に「積分の平均値の定理」を適用して, 講義ノート1ページの定理 5.4.1 のタイプのテイラーの公式を導出せよ。

(3) 以上を具体的な関数に当てはめて誤差を評価しよう(剰余項はどちらの形でも, 使い易いものを用いればよい)。具体的には,

$$\sin(0.5) \text{ を相対誤差 } \epsilon = 10^{-6} \text{ 以下の精度(下の注)で}$$

求めてみよう。 $\sin(0.5)$ の真の値は(円周率を使って)書けるけども, ここではそれを使わず, $\sin(x)$ のテイラーの公式を使って求めてみるのだ。なお, テイラーの公式を何次まで使うか, は相対誤差が指定された範囲に収まるように自分で決めること。

(注) ある数 $A \neq 0$ の近似値を a としたとき「相対誤差が ϵ 以下である」とは

$$\left| \frac{A-a}{A} \right| < \epsilon \quad (1)$$

が満たされている事である。 $|A-a| < \epsilon$ ではないことに注意。

問9*： (区分求積の誤差評価) 区分求積で定積分を求めるのはやってもらった。その際の誤差をテイラー展開と絡めて議論しよう。区間 $[0, 1]$ で定義された関数 $f(x)$ の積分 $\int_0^1 f(x)dx$ を考える。 $f(x)$ は4階まで微分可能で, さらにその j 階の導関数の絶対値はある数 M_j で押さえられているとする:

$$|f^{(j)}| \leq M_j \quad (x \in [0, 1], j = 1, 2, 3, 4)$$

(このとき, f は連続なので, 可積分であることは保証されている。) また, $[0, 1]$ を n 等分した分割を P_n , その時の分点を $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ と書く ($x_i = i/n$)。

(1) 一番単純な区分求積法の例として

$$S_1(P_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})$$

を考える。これは $n \rightarrow \infty$ の極限ではもちろん $\int_0^1 f(x)dx$ になるのだが, ここでは n が有限の場合に S_1 と $\int_0^1 f(x)dx$ の誤差がどれくらいあるのか, 考えたい(この誤差がわかれば, 有限の n に対する S_1 の値から, 真の $\int_0^1 f(x)dx$ の存在範囲を知る事ができる。)

(a) 各区間 $[x_{i-1}, x_i]$ において, $n=1$ のテイラーの公式を書き下すと ($x_{i-1} \leq x \leq x_i$)

$$f(x) = f(x_{i-1}) + f'(\xi)(x - x_{i-1}) \quad (\xi \text{ は } x_{i-1} \text{ と } x_i \text{ の間の数}) \quad (2)$$

となる。この両辺を x_{i-1} から x_i まで積分して以下が成り立つ事を示せ:

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{1}{n} f(x_{i-1}) \right| \leq \frac{M_1}{2} (x_i - x_{i-1})^2 = \frac{M_1}{2n^2}. \quad (3)$$

(b) これを $i=1$ から $i=n$ まで足し合わせて(もちろん, 三角不等式は用いる)

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - S_1(P_n) \right| \leq \frac{M}{2n} \quad (4)$$

であることを示せ。これが S_1 に対する誤差評価であって, n が大きいときに $1/n$ くらいである。

(2) では次に「台形公式」と呼ばれるものを考える．これは

$$S_2(P_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \quad (5)$$

としたものだ． S_1 との差は微々たるものだが，この誤差はどうだろう？各区間 $[x_{i-1}, x_i]$ において， x を中心にした $n = 2$ のテイラーの公式を書き下すと ($x_{i-1} \leq x, y \leq x_i$)

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(y-x)^2 \quad (\xi \text{ は } y \text{ と } x \text{ の間の数}) \quad (6)$$

となる．特に $y = x_i$ と $y = x_{i-1}$ の場合は

$$f(x_{i-1}) = f(x) + f'(x)(x_{i-1}-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(y-x)^2 \quad (\xi \text{ は } x_{i-1} \text{ と } x \text{ の間の数}) \quad (7)$$

$$f(x_i) = f(x) + f'(x)(x_i-x) + \frac{f''(\zeta)}{2}(x_i-x)^2 \quad (\zeta \text{ は } x_i \text{ と } x \text{ の間の数}) \quad (8)$$

となる．

(a) 上の (7) 式の両辺を x_{i-1} から $c = (x_{i-1} + x_i)/2$ まで積分し (更にもうまう部分積分を行って)

$$\int_{x_{i-1}}^c \{f(x_{i-1}) - f(x)\} dx = -\frac{(x_{i-1}-c)^2}{2} f'(c) + \int_{x_{i-1}}^c \frac{f''(\xi)}{2} (x_{i-1}-x)^2 dx \quad (9)$$

であることを示せ (上の式にはミスプリがあります．どう訂正すべきかはこの次の解答編をご覧ください)．

(b) 同様に (8) 式を用いて以下を示せ (以下の式にもミスプリあり):

$$\int_c^{x_i} \{f(x_i) - f(x)\} dx = \frac{(x_i-c)^2}{2} f'(c) + \int_c^{x_i} \frac{f''(\zeta)}{2} (x_i-x)^2 dx \quad (10)$$

(c) 上の (a), (b) を組み合わせて以下を示せ ($|x_{i-1}-c| = |x_i-c| = 1/(2n)$ であることを忘れない):

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2n} \right| \leq \frac{M_2}{12n^3}$$

(d) これを $i = 1$ から $i = n$ まで足し合わせて

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - S_2(P_n) \right| \leq \frac{M_2}{12n^2} \quad (11)$$

であることを示せ．これが S_2 に対する誤差評価であって， S_1 に比べて大幅に改良された．

(3**) 更なる発展問題として「シンプソンの公式」というのがある．これは

$$S_3(P_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \right] \quad (12)$$

としたものだ．これについては以下が成り立つ (4次のテイラーの公式を使う．根性があったら挑戦しよう):

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - S_3(P_n) \right| \leq \frac{M_4}{2880n^4} \quad (13)$$

これはかなり良い評価だ． $\int_0^1 (1+x)^{-1} dx$ など実際に ($n = 5$ などで) 適用してみると面白いだろう．

レポート提出方法： 上の間に解答し，

11月24日(金)午後5時までに，原の部屋(六本松3号館3-312)の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙はA4を使ってください．また，2枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてください．「番外問題」と「重要な注意」(友達に感謝する)は春学期の通り．

11月27日：今日は広義積分です。

なお、12月11日に中間試験を行います。範囲は「テイラー展開」と「積分」が主。12/4でも試験は不可能ではないけども、1週間余裕を見ることにしました。

第6回レポート問題（広義積分）:

問10： 次の広義積分を（もし存在するなら）求めよ。αは実数である。広義積分が存在するか否かはパラメーターαの値による（でしょう）。

$$(a) \int_1^{\infty} x^{\alpha} dx \quad (b) \int_0^1 x^{\alpha} dx \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \quad (d) \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx \quad (e) \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$$

レポート提出方法： 上の問に解答し、

12月1日（金）午後5時までに、原の部屋（六本松3号館3-312）の前の箱に

入れてください。整理の都合上、用紙はA4を使ってください。また、2枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてください。「番外問題」と「重要な注意」（友達に感謝する）は春学期の通り。

————— 先週のレポートの解答 —————

問8：

- (1) これはまあ、自分でノートを見返すということ。
- (2) 剰余項は

$$R_n(x) := \int_a^x \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!} (x-y)^{n-1} dy$$

でした。そこで $F(y) = f^{(n)}(y)$, $g(y) = (x-y)^{n-1}$ として、積分の平均値の定理を

$$a \text{ と } x \text{ の間の } \xi \text{ が存在して } \int_a^x F(y)g(y)dy \Big/ \int_a^x g(y)dy = F(\xi)$$

の形で使うと、 $R_n(x) = F(\xi)(x-a)^n/n! = f^{(n)}(\xi)(x-a)^n/n!$ となって、微分形の平均値の定理が出る。

(3) 今までの問題と違うのは、「**相対誤差が** 以下になるようにテイラーの公式の次数を決めなさい」というところ。真の値もわからないという前提なので、ちょっとややこしいけど、段階を追ってやればできる。まず、テイラーの公式は ($n \geq 0$)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+3}, \quad R_{2n+3} = (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cos \xi$$

の形である。相対誤差の評価をするために、まずは真の値の大体の評価が必要だ。そこで上で $n=0$ としてみると、

$$\sin 0.5 = 0.5 + R_3, \quad 0 \leq -R_3 \leq (0.5)^3/6 \quad \text{つまり} \quad 0.479 \leq \sin 0.5 \leq 0.5$$

とわかる。そこで、相対誤差を 10^{-6} 以下にするには、真の値 A とその近似値 a が

$$|A - a| < 0.479 \times 10^{-6}$$

を満たせば良い。上の R_{2n+3} の形をみると、このためには、

$$\frac{(0.5)^{2n+3}}{(2n+3)!} \leq 0.479 \times 10^{-6} \quad \text{つまり} \quad n \geq 3$$

なら充分とわかる。そこで

$$\sin 0.5 = 0.5 - \frac{(0.5)^3}{3!} + \frac{(0.5)^5}{5!} - \frac{(0.5)^7}{7!} + R_9, \quad 0 \leq R_9 \leq \frac{(0.5)^9}{9!} \approx 5.382288911 \times 10^{-9}$$

であって、これから

$$0.479425533234 \leq \sin(0.5) \leq 0.479425538617$$

が得られる．参考までに真の値は $\sin(0.5) \approx 0.47942553860420300027\dots$.

(注) どうも誤差の評価が良くわかっていない人が多いようだ．相対誤差にしたから難しく思ってしまった人もいるのだが、それ以前に、 R_n が誤差を表しているとの理解が全く欠けている人もいたようだ．この種の問題では「真の値」がどこにあるかが R_n の評価から得られるのであって、関数電卓で $\sin 0.5$ をやる必要は全くない．(それが必要なら、そもそもテイラー展開から $\sin 0.5$ の近似値など出せない!) こここのところをもう一度噛み締めたい。

問 9 :

(1)(a) $f(x) - f(x_{i-1}) = f'(\xi)(x - x_{i-1})$ から $|f(x) - f(x_{i-1})| \leq M_1(x - x_{i-1})$ が成り立つので、この両辺を積分して

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \frac{1}{n} f(x_{i-1}) \right| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| dx \leq M_1 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) dx = \frac{M_1}{2} (x_i - x_{i-1})^2$$

(b) 単に上の両辺を足し合わせると良い．

(2)(a) 問題の (7) 式から

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^c \{f(x_{i-1}) - f(x)\} dx &= \int_{x_{i-1}}^c f'(x)(x_{i-1} - x) dx + \int_{x_{i-1}}^c \frac{f''(\xi)}{2} (x_{i-1} - x)^2 dx \\ &= \left[-f'(x) \frac{(x_{i-1} - x)^2}{2} \right]_{x_{i-1}}^c + \int_{x_{i-1}}^c f''(x) \frac{(x_{i-1} - x)^2}{2} dx + \int_{x_{i-1}}^c \frac{f''(\xi)}{2} (x_{i-1} - x)^2 dx \end{aligned} \quad (14)$$

となる (問題文には上の第 2 行の第 2 項が抜けてました．自分のノートから問題文に写す時に間違いました．すみません! 何人か、正しい式を導出していた人がいました．大変に良かったと思います.)

(b) 同様に問題文には間違いがあります．正しくは

$$\int_c^{x_i} \{f(x_i) - f(x)\} dx = \frac{(x_i - c)^2}{2} f'(c) + \int_c^{x_i} f''(x) \frac{(x_i - x)^2}{2} dx + \int_c^{x_i} \frac{f''(\xi)}{2} (x_{i-1} - x)^2 dx$$

(c) 上の 2 つを足すと、

$$\begin{aligned} &\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2n} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{f(x_{i-1}) - f(x)\} dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^c f''(x) \frac{(x_{i-1} - x)^2}{2} dx + \int_{x_{i-1}}^c \frac{f''(\xi)}{2} (x_{i-1} - x)^2 dx + \int_c^{x_i} f''(x) \frac{(x_i - x)^2}{2} dx + \int_c^{x_i} \frac{f''(\xi)}{2} (x_{i-1} - x)^2 dx \end{aligned}$$

となるけども、右辺の 4 つの積分はどれも

$$\int_{x_{i-1}}^c \frac{M_2}{2} (x_{i-1} - x)^2 dx = \frac{M_2}{2} \times \frac{(c - x_{i-1})^3}{3} = \frac{M_2}{2} \times \frac{1}{24n^3}$$

で押さえられるので、問題の式を得る．

(d) 上のを足し合わせると良い．

(3) 一人だけ、これもやった人がいました．大変に良かったと思います．

12月4日：今日は広義積分の続きと極限の交換についてです。

なお，12月11日に中間試験を行います．範囲は「テイラー展開」と「積分」が主．

来週が試験なのでレポート返却の時間がないから，今週のレポート出題はありません．

————— 先週のレポートの解答 —————

問10：ともかくやるだけ．

(a) 積分範囲が無限大なので，これは $\lim_{L \rightarrow \infty} \int_1^L x^\alpha dx$ と解釈すべし．計算すると

$$\int_1^L x^\alpha dx = \begin{cases} (L^{\alpha+1} - 1)/(\alpha + 1) & (\alpha \neq -1) \\ \log L & (\alpha = -1) \end{cases}$$

だから， $\alpha < -1$ の時だけこの極限は存在する．従って， $\alpha < -1$ の時のみこの広義積分は存在し，その値は $-1/(\alpha+1)$ ．

(b) 今度は $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_\epsilon^1 x^\alpha dx$ と解釈すべし．計算すると今度は $\alpha > -1$ の時のみ広義積分は存在して，答えは $1/(\alpha+1)$ ．
なぜか良くわからないが，(a) はちゃんとできたのに (b) では「 $\alpha \neq -1$ なら積分は存在」とした人が多数．注意しよう．

(c) これは $\lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \frac{1}{1+x^2} dx$ と解釈すべし． $x = \tan \theta$ とでもおいて計算すると

$$\int_0^L \frac{1}{1+x^2} = \int_0^{\arctan L} d\theta = \arctan L$$

なので $L \rightarrow \infty$ の極限をとって，答えは $\pi/2$ ．

(d) これも $\lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L e^{-\alpha x} dx$ と解釈すべし．計算すると $\alpha > 0$ の時のみ極限は存在して，答えは $1/\alpha$ ．

(e) これは

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \sin x dx + \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^0 \sin x dx$$

を考えるべきだが，どちらも存在しないので，広義積分は存在しない．ちょっとショウモナイ問題でしたが，「奇関数だから積分結果はゼロ」と間違っている人がいるかもしれないと思って出しました．

12月25日：今日は(2変数関数の)極大極小問題です。

第7回レポート問題(極大極小問題)：今回は提出期限を新学期の第一階の講義の後に設定してあります。そのつもりで、今日の講義でカバーできないかもしれない部分も出題してます。従って、第7回は「問10のみ」とします。

問10：以下に2変数の関数 $f(x, y)$ から $q(x, y)$ を与えた。 (x, y) がそれぞれすべての実数値をとるとき (q は別；後述)，これらの関数の極大点，極小点，鞍点，およびそれぞれにおける関数の値を求めよ (問題によっては極大点などが全くないものもあるかもしれない。) なお，講義でやった判定条件では「判断できない」となった場合でも，もう少し考えれば判断できる場合もあるかもしれないので，頑張ってください。

$$f(x, y) = x^4 + y^4 \quad g(x, y) = x^3 + y^6 \quad h(x, y) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^4}{4} - \frac{x^2 y^2}{2}$$

$$p(x, y) = e^{-x^2 - y^2} (x^2 + 2y^2) \quad q(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$$

ただし， $q(x, y)$ に限っては $0 \leq x < 2\pi$, $0 \leq y < 2\pi$ のみを考えればよい。

問11：上の問いと同じく，極大極小問題を以下の多変数の関数に対して解け！

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) - 3(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2), \quad (\text{ただし } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ はすべて正})$$

レポート提出方法：上の問10に解答し，

1月12日(金)午後5時まで，原の部屋(六本松3号館3-312)の前の箱に

入れてください。整理の都合上，用紙はA4を使ってください。また，2枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくださる。「番外問題」と「重要な注意」(友達に感謝する)はいつもの通り。

1月15日：今日は陰関数定理．

レポート問題の番号が一つずれていたことに気がついた（問10が2つあることになってしまった）．もう遅いので、このまま行きます．

第8回レポート問題（極大極小問題）：年末に出題したけど講義でカバーできなかった問11です．

問11： 極大極小問題を以下の多変数の関数に対して解け！

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) - 3(a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2), \quad (\text{ただし } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ はすべて正})$$

レポート提出方法： 上の問11に解答し，

1月19日（金）午後5時までに，原の部屋（六本松3号館3-312）の前の箱に

入れてください（注意：1/19はセンター試験の準備ということだから，入校制限などがある「かも」しれない．早めに出しておくことをお奨めします．）整理の都合上，用紙はA4を使ってください．また，2枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ！「番外問題」と「重要な注意」（友達に感謝する）はいつもの通り．

————— 先週のレポートの解答 —————

問10： ともかくやるだけ．

f は：まず極値をとる点の候補は

$$0 = 4x^3, \quad 0 = 4y^3$$

を連立した解，つまり， $x = y = 0$ しかない．ここでのヘシアンはゼロ！だから「もっと調べる」になるけど，今の場合は $(x, y) \neq (0, 0)$ なら $f(x, y) > 0$ になってるから， $(0, 0)$ は極小点である．答えは「極小点は $(0, 0)$ で関数の値はゼロ」（実はこれは最小点でもある．）

g は：極値をとる点の候補は

$$0 = 3x^2, \quad 0 = 6y^5$$

の解で $(0, 0)$ のみ．この点でのヘシアンもゼロなので「もっと調べる」．しかしこの場合， $g(x, 0) = x^3$ だから x が正なら関数も正， x が負なら関数も負，でこれは極値ではない．実はこれは鞍点でもない．

h は：極値をとる点の候補は

$$0 = x^4 - x^3 - xy^2, \quad 0 = y^4 - y^3 - x^2y$$

の解．これはちょっとややこしいけど $x = 0$ かどうかなどで場合分けして解くと（高校で散々やったよね）．

$$(0, 0) \quad (1, 0) \quad (0, 1) \quad (2, 2)$$

の4つができる．

$(0, 0)$ ではヘシアンは0で，関数の値もゼロです．またもや「もっと調べる」ですが，

$$h(x, 0) = -\frac{x^4}{4} \left[1 - \frac{4x}{5} \right] - \frac{y^4}{4} \left[1 - \frac{4y}{5} \right] - \frac{x^2y^2}{2}$$

と書いてみると，第1項は $x \neq 0$ かつ $|x|$ が充分小さければ負．第2項は $y \neq 0$ かつ $|y|$ が充分小さければ負．なので，第1項と第2項の和は $(0, 0)$ の近く（ただし $(0, 0)$ には等しくない）なら負．第3項は非正だから，3つの項を足しても負．よって $(0, 0)$ は h の極大点で関数の値は0．

$(2, 2)$ ではヘシアンは $16^2 - 8^2 > 0$ で， $h_{xx} = 16 > 0$ ．従ってここでは h は極小で，その値は $-16/5$ ．

$(1, 0)$ と $(0, 1)$ ではヘシアンは -1 で鞍点．関数の値は $-1/20$

p は：極値をとる点の候補は

$$0 = e^{-x^2-y^2} 2x(1-x^2-2y^2), \quad 0 = e^{-x^2-y^2} 2y(2-x^2-2y^2)$$

の解だ。 $e^{-x^2-y^2} \neq 0$ だから、この方程式は

$$0 = 2x(1-x^2-2y^2), \quad 0 = 2y(2-x^2-2y^2)$$

と同値。 またもや $x=0$ か否かなどで場合分けすると、解は

$$(0, 0), \quad (0, \pm 1), \quad (\pm 1, 0)$$

の 5 通りある。ヘシアンの計算はちょっと大変ですが頑張ってやると

$$H(0, 0) = 8, \quad H(\pm 1, 0) = -8e^{-2}, \quad H(0, \pm 1) = 16e^{-2}$$

となっている。従ってまず、 $(\pm 1, 0)$ は極大でも極小でもない（鞍点である）ことがわかる。次に $p_{xx}(0, 0) = 2 > 0$, $p_{xx}(0, \pm 1) = -2/e < 0$ なので、

- $(0, 0)$ で極小で関数の値は 0
- $(0, \pm 1)$ で極大で関数の値は $2/e$
- $(\pm 1, 0)$ は鞍点で関数の値は $1/e$

q は：極値をとる点の候補は

$$0 = \cos x + \cos(x+y), \quad 0 = \cos y + \cos(x+y)$$

の解。これはなかなか解きにくいだが、辺々ひくと

$$\cos x - \cos y = 0, \quad \text{つまり} \quad \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = 0$$

が得られる。つまり、 x, y が非負で 2π を超えないので

$$x+y=0, 2\pi \quad \text{または} \quad x-y=0$$

なのだ。このそれぞれを元の 2 つの式に入れてとくと、 $x=y=\pi/3$ と $x=y=5\pi/3$ と $x=y=\pi$ が解である。

$x=y=\pi/3$ の時はヘシアンは $9/4$ で、 $q_{xx} = -\sqrt{3}$ なので極大のはず。関数の値は $3\sqrt{3}/2$ 。

$x=y=5\pi/3$ の時はヘシアンは $9/4$ で、 $q_{xx} = \sqrt{3}$ なので極小のはず。関数の値は $-3\sqrt{3}/2$ 。

$x=y=\pi$ の時はヘシアンはゼロで関数の値もゼロ。「もっと調べる」ですが、これは例えば $x=\pi+u, y=\pi+v$ とおいてみると $q(x, y) = -\sin u - \sin v + \sin(u+v)$ となるので、これをテイラー展開してみたら良いでしょう。こいつは極値点でも鞍点でもありません。

（実はもっと良いやり方として、

$$q(x, y) = 4 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right)$$

と書いてみると、この関数の正負は一目瞭然だ。）

（注）この関数は x, y について周期 2π で、どこでも無限階微分可能だから、絶対に極大と極小はあるはず。極大だけ求めた人はそこを考えるべきだった（とは言っても、なかなか難しいとは思うけど。）

1月22日：今日は陰関数定理の続きと条件付き極値問題．

大きなお詫び：週末はセンター試験の監督だったので、レポートの採点が終わっていません．申し訳ありません．この講義の後、4限の間に採点して、僕の部屋の前にしておきます．

期末試験、最終成績について：今学期の始めに示した通りの方針で成績をつけます．期末試験の範囲は「今学期にやったこと全部」ですが、特に以下のようなものになるでしょう．

- テイラー展開（1変数と2変数以上）
- 積分、特にいろいろな計算（受験数学）ができること
- 広義積分
- 多変数関数（特に2変数）の極値問題

これ以外にも「積分の定義」などの問題もだすかもしれませんが、その比率は大きくはありません．単位のヤバイ人は上の項目に注力することを奨めます（春学期に比べて、ほとんど計算問題だよ）

陰関数定理については、問題を作りやすく、その意味も現時点では把握しにくいだろうから、出題しません．また、条件付き極値問題も出題しません．

先週のレポートの解答

問 11： とにかくやるだけ．極値の候補は

$$0 = 3x_j^2 - 6a_j x_j \quad \text{つまり} \quad (x_j = 0 \text{ または } x_j = 2a_j)$$

を満たすべし ($j = 1, 2, \dots, n$)．各 j ごとに 0 または $2a_j$ のどちらかになってれば良いので、全部で 2^n の可能性がある．このそれぞれを以下で調べて行く．ヘッセ行列の ij 成分は

$$H_{ii} = 6(x_i - a_i), \quad i \neq j \text{ では } H_{ij} = 0$$

となって対角行列（これはまあ、 f の形 — 単に $x_j^3 - 3a_j x_j^2$ の足し算 — をみたら予想はつくけど）

さて、この対角行列の固有値はもちろん、その対角成分だ．対角成分は

$$H_{ii} = 6(x_i - a_i) = \begin{cases} -6a_i & (x_i = 0) \\ 6a_i & (x_i = 2a_i) \end{cases}$$

である．だから、 x_1 から x_n の内に 0 と a_i が混じっていると固有値に正と負のものがあることになってしまう．この場合は極大でも極小でもない．

そこで極値は

- $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ならば、固有値はすべて負なので、極大である．というわけで、極大点は $(0, 0, 0, \dots, 0)$ 、そこでの関数の値は 0．
- $x_i = 2a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ならば、固有値はすべて正なので、極小である．というわけで、極小点は $(2a_1, 2a_2, 2a_3, \dots, 2a_n)$ 、そこでの関数の値は

$$-4 \sum_{j=1}^n a_j^3$$

である．