４月２４日：今日は偏微分に入ります．その定義と大体の意味を説明する予定．
$x \geq 0$ を「x は非負 (non-negative)」，$x \leq 0$ を「x は非正 (non-positive)」ということがある．
$A := B$ というのは，A を B で定義する，の意味．例えば $f(x) := x^2$ とか．
なお，５月１日は連休の谷間ですが，講義をやります．

第１回レポート問題： 簡単な計算練習ですが，ともかくやりましょう．面白くない問題ですが，そのうちに少しは面白く（難しく）なるはず．

問１： 次の関数を独立変数 x, y でそれぞれ偏微分せよ．つまり，$\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial y}$ などを求めよ．d) については原点付近でどうなっているかが問題である．

$$a) \quad f(x,y) = x^2 + y^3, \qquad b) \quad g(x,y) = 2x^2 y \qquad c) \quad h(x,y) = \sin(xy^2)$$

$$d) \qquad p(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \text{ の時} \\ \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \text{ の時} \end{cases}$$

問２： 関数 $q(x,y) = x$ の原点における方向微分（単位ベクトル $(\cos\theta, \sin\theta)$ の向きのもの）を求めよ．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

４月 27 日（木）午後５時までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱（のようなもの）に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

僕や TA の人の都合，またお休みの入り方などにより，レポートの提出方法や提出期限は回によってコロコロと変わる可能性があります．申しわけないけど，毎回ちゃんとチェックして下され．

５月１日：今日は偏微分の一つの山，連鎖律です．
今日のオフィスアワーは，僕が病院に行くため，中止の可能性が高いです．質問があったら，ともかく講義の後に来て下さい．

第２回レポート問題： 大半は簡単な計算練習ですが，ともかくやりましょう．問題番号は通し番号のつもりです．

問３： プリントの問題 1.3.6 (p.19) を解け．

問４： プリントの問題 1.3.7 (p.19) を解け．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

５月８日（月）12:30（時刻は 24 時間制）までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

今回は連休を挟むので，提出日が変則になってしまいました．また，今回から，TA の方が採点してくれる可能性が高いです（僕は採点結果に目を通して，皆さんのコメントなども読むけど）．

――――――先週のレポートの略解――――――

問１： a) から c) は普通に計算するだけ：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2,\quad \frac{\partial g}{\partial x} = 4xy,\quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2x^2 \quad \frac{\partial h}{\partial x} = y^2\cos(xy^2),\quad \frac{\partial h}{\partial y} = 2xy\cos(xy^2)$$

d) も $(0,0)$ 以外では分母分子に変なところはないから（何が「変」かは後で微分をきっちりやれば説明できるようになるが，今は高校のノリで直感でよいとする），普通に微分して

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{x^3+3xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},\qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{-3x^2y-y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

である．問題は $(0,0)$ だが，定義に戻って計算するしかない．

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{p(h,0)-p(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2/|h|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{|h|}$$

この極限は存在しない！$h>0$ のままで極限を考える（$\lim_{h\to+0}$）と極限は 1，$\lim_{h\to-0}$ なら -1 だが，普通の極限ではゼロに行くすべての行き方を考えてその結果が一致する必要があるから，上の極限はない．従って，$\frac{\partial p}{\partial x}$ は原点では存在しない（偏微分不可能）．同様に，原点では y でも偏微分不可能である．

問２： 定義通り計算して，答えは $\cos\theta$ である．これは関数 $q(x,y)=x$ のグラフを思い浮かべて方向微分の定義を使うと，まあアタリマエである．（各自，思い浮かべる事．）

５月８日：今日はこの前の連鎖律の続きと，高階の偏微分です．この２つが組合わさると案外，間違いやすいので，注意して下さい．

第３回レポート問題：計算練習ですが，ともかくやりましょう．上で書いたように，案外間違いやすいぞ．

問５： x, y の関数 $f(x,y)$ がある．また，x, y と新しい変数 u, w が以下の関係

$$x = u^2 + w^2, \qquad y = uw$$

で関係づけられている．このとき，合成関数 $z = h(u,w) = f\big(x(u,w), y(u,w)\big)$ に対して，以下の偏導関数を計算せよ（x, y に関する f の適当な偏導関数と u, w で表せ）．

$$(a)\quad \frac{\partial z}{\partial w} \qquad (b)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial w} \qquad (c)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial w^2}$$

番外問題：（前回と同じ．感想や改善の要望など，あれば書いて下さい.）

レポート提出について：

上の問に解答し，

５月 11 日（木）17:00 （時刻は 24 時間制）までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ.

——————先週のレポートの略解——————

問３： 連鎖律を使って計算するだけだが，題意がちょっと不明瞭だったかもしれない．大変申しわけない．

なにが不明瞭だったかというと，２変数以上の偏微分では,「u で偏微分する」と言った場合に「他のどの変数をとめて微分しているのか」別の言い方をすると「独立変数は何なのか」を明確にする必要がある．この問題では $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ と書いた場合には x, y を独立変数とみなす（つまり，x で偏微分する時は y をとめて微分）つもりだった．一方，$\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ と書いた時は u, v を独立とみなす（u で偏微分するときは v をとめて微分）のつもりだ．ここが問題に明記していなかったので混乱したかもしれない．申し訳なし．

ともかく連鎖律で微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\alpha + \frac{\partial f}{\partial v}\gamma = \alpha\frac{\partial f}{\partial u} + \gamma\frac{\partial f}{\partial v}$$

同様に，

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\beta + \frac{\partial f}{\partial v}\delta = \beta\frac{\partial f}{\partial u} + \delta\frac{\partial f}{\partial v}$$

である．なお，$\alpha\delta \neq \beta\gamma$ の条件を使ってないことに気づいた人も多いと思うが，これは (x,y) がすべての実数値をとる時に (u,v) もすべての実数値を表せるための条件（逆行列の存在条件）である（線形代数でやるはずです）．ここのところがわからない人は，$\alpha\delta = \beta\gamma$ の場合に u, v の間にどんな関係があるかを考えてみると良い．

問４：

1) は前にやった通り．f が y には依存しない，のだから $f(x,y) = g(x)$ の形（g は任意の関数）．

2) は 3) の特殊な場合（$a = b = 1$）だから，一緒にやろう．上の問いのように変数変換 $u = \alpha x + \beta y, v = \gamma x + \delta y$ を考えて，この時に定数をうまく選び，$\frac{\partial f}{\partial u} \equiv 0$ となるようにしてやろう．すると 1) から，$f = g(v)$（g は任意の関数）とわかる．

さて，そのように定数を選ぶには，上の問いの結果を使う．上の結果を用いて計算すると

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = a\Big[\alpha\frac{\partial f}{\partial u} + \gamma\frac{\partial f}{\partial v}\Big] + b\Big[\beta\frac{\partial f}{\partial u} + \delta\frac{\partial f}{\partial v}\Big] = (a\alpha + b\beta)\frac{\partial f}{\partial u} + (a\gamma + b\delta)\frac{\partial f}{\partial v}$$

であって，これが恒等的にゼロなのだ．すると，$a\gamma + b\delta = 0$ と（そして $a\alpha + b\beta \neq 0$ と）とっておけば，これから

$$\frac{\partial f}{\partial u} \equiv 0$$

となる．よって $f = g(v)$ となるが，v を x, y で表すと

$$v = \gamma x + \delta y = (-bx + ay) \times (\text{定数})$$

となっている．我々はこのような変換を一つ見つければ充分だから，上の定数を 1 にとってしまおう．結局，

$$f = g(-bx + ay) \qquad g \text{ は任意の関数}$$

というのが 3) の f の必要条件だ．でも，これで充分な事は，上の形の f を x, y で偏微分して $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}$ を計算してみれば確かめられる．

という訳で，3) の答えは上の通り．また 2) は $a = b = 1$ とすれば良く，

$$f = g(-x + y) \qquad g \text{ は任意の関数}$$

となる．

５月１５日：今日はいよいよ，ϵ-N です．山場だから，心して学習するように．教科書も該当部分はきちんと読み，練習問題もする事．

第４回レポート問題：

今回は ϵ-N へ向けての計算練習が主です．本当に良くわかってる人にはつまらないかもしれないけど，このような練習なしで ϵ-N に突入すると「答えを丸暗記」「答えを丸写し」する人が出そうに思ったので，誰でもできるところから出発するつもりでこうしました．また，問 [6][7] の問題数が多いと思うかもしれないが，高校までの数学で簡単に解けるから，絶対にやること！

問６： 以下の小問（条件を満たす n の範囲を求める）に答えよ.（本当は n は正の整数のつもりだが，この問題では n は正の実数と思って良い．つまり，条件を満たすような正の実数 n の範囲を求めればよい.）

1) $\dfrac{1}{n^2} < 10^{-3}$ となる n の範囲を求めよ.
2) $\left|\dfrac{n}{n+2} - 1\right| < 10^{-3}$ となる n の範囲を求めよ.
3) 次に，$\epsilon > 0$ を任意の実数として，$\left|\dfrac{n}{n+2} - 1\right| < \epsilon$ となる n の範囲を ϵ を用いて表せ.
4) $\left|\dfrac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - 1\right| < 10^{-3}$ となる n の範囲を求めよ.
5) 次に，$\epsilon > 0$ を任意の実数として，$\left|\dfrac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} - 1\right| < \epsilon$ となる n の範囲を ϵ を用いて表せ.

問７： 数列による違いを感じるための問題．以下の数列 a_n, b_n, c_n, d_n について，これらが 10^{-5} よりも小さくなるような n の範囲を，それぞれ求めよ（答えは当然，考えている数列によって異なるだろう）．答えは十進法を使って表すべし．ただし，あまりに桁数が大きくなった場合には,「10^{123} くらい」などと，10 の何乗かがわかるように答えればよい．もちろん，具体的な数値を出すには，関数電卓や計算機の助けを借りてもよろしい.

$$a_n = \frac{1}{n^2} \qquad b_n = e^{-n} \qquad c_n = \frac{1}{\log n} \qquad d_n = \frac{1}{\log\bigl(\log(\log n)\bigr)}$$

問８： 数列 $a_n := \dfrac{n}{n+2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ の $n \to \infty$ での極限を，ϵ-N 論法を用いて求めよ．その際，$N(\epsilon)$ をどのようにとれば良いかを明記する事．当然，問 [6] の結果がヒントになるはずだ.（これではつまらないと思う人も当然，いるだろうが，来週はもうちょっと捻ったのを出題するからお待ちくだされ.）

番外問題： （前回と同じ．感想や改善の要望など，あれば書いて下さい.）

レポート提出について：

上の問に解答し，

5 月 18 日（木）17:00 （時刻は 24 時間制）までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙は A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ.

――――――――――――――――――――――――先週のレポートの略解――――――――――――――――――――

問 5： やるだけ，とはいえ，注意深くやらないと間違います．でも半分以上の人はできている感じでしょうか．期末ではかならず類似問題を出すから，できるようになる事！(なお，問題には明記しなかったけど，$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ として結果を簡単にしたのも良いとします．そもそも，問題に f が何階微分可能とかも書いていなかったので.)

(a) これはまあ，いいでしょう．連鎖律を一回使って，

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} = 2w\frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial f}{\partial y}$$

(b) 問題はこれから．上の結果を u で偏微分するので，一番素直には，w は u に依存しないけど，他の項はすべて u に依存するかもしれない，と思ってまずは u でやってみる．第 2 項の $u\frac{\partial f}{\partial y}$ には「積の微分」を用いて，

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w} = 2w\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y}$$

が得られるね．そしたら今度は x, y を通して u に依存しているはずの $\frac{\partial f}{\partial x}$ や $\frac{\partial f}{\partial y}$ をまたもや連鎖律を用いて u で微分するのだ．わかりやすいように

$$g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

と置いてみれば，上の第一項では

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u}g = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 2u\frac{\partial g}{\partial x} + w\frac{\partial g}{\partial y} = 2u\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + w\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

となる．第 3 項も同様に計算すると，最終結果は

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial w} = 4wu\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2w^2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + wu\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}$$

となるはずだ．真ん中の項では $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ としてしまっても，まあ，良い．

(c) これも同様である．今度はもう一回 w で微分するので，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial w^2} = \frac{\partial}{\partial w}\left[2w\frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial f}{\partial y}\right] = 2\frac{\partial f}{\partial x} + 2w\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial y}$$

ということである．それで $\frac{\partial}{\partial w}$ にまたもや連鎖律を用いると，結果は

$$\frac{\partial^2 z}{\partial w^2} = 4w^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2uw\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right] + u^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial f}{\partial x}$$

となるのだ．真ん中の項では $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ としてしまっても，まあ，良い．

５月２２日：今日はいよいよ，ϵ-N の続きと ϵ-δ です．先週に引き続いて心して学習するように．教科書も該当部分はきちんと読み，練習問題もする事．なお，６月１２日（月）に中間試験の予定.

第５回レポート問題：

今回は ϵ-N の続きと，ϵ-δ に向けての練習です．これでも問題数が足りないと思うから，講義ノートと教科書の問題は自分でやること！

問９： 「すべての」$\epsilon > 0$ の意味を実感する問題．以下の (a)〜(d) のうち，どれが正しくてどれが正しくないか，判定せよ．正しくないものは反例を与え，正しいものは証明すること（a, b, x は未知の定数で，もちろん，ϵ には依存しない）.

(a) すべての $\epsilon > 0$ に対して $|a - b| < \epsilon$ であるならば，$a = b$ である．
(b) ある $\epsilon > 0$ に対して $|a - b| < \epsilon$ であるならば，$a = b$ である．
(c) すべての $\epsilon > 0$ に対して $x < 2 + \epsilon$ であるならば，$x \le 2$ である．
(d) すべての $\epsilon > 0$ に対して $x < 2 + \epsilon$ であるならば，$x < 2$ である．

問10： 数列 a_n を以下のように定義する：$a_n := \begin{cases} 0 & (n \text{が奇数のとき}) \\ 1 & (n \text{が偶数のとき}) \end{cases}$．この $\{a_n\}$ は ゼロには収束しない ことを証明せよ．ただしその際,「ゼロに収束する」ことの否定命題がなりたつことを示せ．否定命題を作るには，新居さんが散々やったはずの「論理」が効いてくるはず.

問11： 以下の数列 a_n, b_n の $n \to \infty$ での極限を，ϵ-N 論法によって求めよ．

$$a_n := \frac{2n-1}{n}, \qquad b_n := \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$$

b_n には工夫が必要だ.「分子の有理化」をやると良いだろう．つまり，b_n にわざと $\dfrac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 1$ をかけて，分子の掛け算をやれ.（これだけでわからない，と放り出さずに考えること！）

問12：

1) $0 < \epsilon < 1$ とする．$|x^2 - 1| < \epsilon$ となる x の範囲を求めよ．

2) $|x^3 + 3x - 4| < 10^{-3}$ となる x の範囲を数値的に求めよ.（x の範囲を正確に求めるのは難しいだろうから，グラフの概形を書いた後で，電卓で計算して良い.）

3) 次に，$\epsilon > 0$ を任意の実数として,「$|x - 1| < \delta$ ならば $|x^3 + 3x - 4| < \epsilon$」となるような十分小さい δ を ϵ の関数として表せ.（この場合，ギリギリ大きい δ でなくても — 余裕を見て小さめの δ を選んでも — 良い.）

4) $\displaystyle\lim_{x \to 1} x^3 + 3x$ を，ϵ-δ 論法によって求めよ．

番外問題： （前回と同じ．感想や改善の要望など，あれば書いて下さい.）

レポート提出について：

上の問に解答し，

5 月 25 日（木）17:00 （時刻は 24 時間制）までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙は A4 を使ってください（B5 はできるだけやめてくれ，と言っておろうが...）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ.

——————先週のレポートの略解——————

問６： ひとつずつやっていけばできるはず.

1) 流石にこれは良いでしょう．$n > 10^{3/2} = 10\sqrt{10} \approx 31.623$ なら良い，が答え.

2) $\frac{n}{n+2}-1=-\frac{2}{n+2}$ なので，求める n は $\frac{2}{n+2}<10^{-3}$ を満たすものである．分母を払って整理すると，$n+2>2\times10^3=2000$，つまり，$n>1998$ ならよい．

3) 上と同様に，今度は ϵ を用いてとくと，$n>\dfrac{2}{\epsilon}-2$ なら良い，となる（もちろん，$n>0$ は前提としている）．

4,5) ϵ で一気に解くと，$\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\epsilon$ が条件だから，これを解いて，$n>\epsilon^{-2}$ が条件となる（5の答え）．$\epsilon=10^{-3}$ として，$n>10^6$ が条件（4の答え），

問 7： これも地道にやりましょう．d_n はちょっと難しいとは思う．

a_n は $n^{-2}<10^{-5}$ が条件だから，$n>10^{5/2}=100\sqrt{10}\approx316.23$ が条件．n は整数なので，$n\geq317$ が答え．

b_n は $e^{-n}<10^{-5}$ が条件．両辺の log をとると，これは $-n<-5\log10$ となるので，$n>5\log10\approx11.51293$ を得る．n が整数である事を考慮すると，$n\geq12$ なら良い，となる．

c_n は，$(\log n)^{-1}<10^{-5}$ が条件だから，これは $\log n>10^5$ と同値．これは更に，$n>\exp(10^5)$ と同値だ．

さて，問題はこいつを電卓に放りこんでも右辺の値が計算できない，というところにある．しかし，十進法で「10の○○乗くらい」と出すだけなら，以下のようにすれば良い．考えたいのは，a を知って，$e^a=10^b$ となる b を求める事である．これは両辺の log（底は e）をとってやれば，$a=b\log10$ が得られるので，

$$b=a/\log10\approx a\times0.434294482 \qquad (*)$$

が得られる．

実際にやってみると，上の b は $b\approx43429.44819$ である．よって，$n>10^{43429.44819}=10^{43429}\times10^{0.44819}\approx2.8067\times10^{43429}$ なら十分，といえる．

d_n が最も大変だ．$\log(\log(\log n))>10^5$ ならよろし，というのが条件．これは素直に解くと，$n>\exp(\exp(\exp(10^5)))$ という事である．これでもまあ良いのではあるが，できるだけ十進法に直してみよう．

上の (*) の関係をくり返し使おう．c_n の結果から $\exp(10^5)\approx2.8067\times10^{43429}=c_1$ とでもおいてみると，$\exp(\exp(10^5))\approx\exp(c_1)\approx10^{c_1\times0.434294482}$ となる．これを c_2 とおくと，

$$\exp(\exp(\exp(10^5)))\approx\exp(c_2)\approx10^{c_2\times0.434294482}\approx10^{0.434295\times10^{0.434295\times c_1}}\approx10^{0.434295\times10^{1.21893\times10^{43429}}}$$

指数を少し余裕を見て簡単にしておくと，$\exp(\exp(\exp(10^5)))$ は $10^{10^{10^{43430}}}$ より小さいことがわかるので，$n>10^{10^{10^{43430}}}$ なら十分．

問 8： まず，無味乾燥な必要最低限の答えを書く．そのあとで，どうやって $N(\epsilon)$ を決めたのかを説明する．(一年生の段階では，後半部分まで書いた方が良い.)

（無味乾燥な答え）任意の $\epsilon>0$ に対して，

$$N(\epsilon)=\frac{2}{\epsilon}-2 \qquad \text{（これが負の時は, } N(\epsilon)=1 \text{ とでもする）}$$

と決めよう．すると，$n>N(\epsilon)$ では

$$\Big|a_n-1\Big|=\frac{2}{n+2}<\frac{2}{N(\epsilon)+2}=\frac{2}{2/\epsilon}=\epsilon$$

が成立する．これは $\lim_{n\to\infty}a_n=1$ を ϵ-N で書いたものに他ならないから，$\lim_{n\to\infty}a_n=1$ である． □

（$N(\epsilon)$ の決め方）これは問 [6] の 3) でやったとおりである．つまり，我々は $|a_n-1|<\epsilon$ となるような n がどんなものかを知りたい．この答えは問 [6] の 3) で既に出してあるがもう一度書くと，$\frac{n}{n+2}-1=-\frac{2}{n+2}$ だから，求める n は $\frac{2}{n+2}<\epsilon$ を満たすものである．分母を払って整理すると，$n+2>2/\epsilon$，つまり，$n>2/\epsilon-2$ なら良い．これから直ちに，$N(\epsilon)=2/\epsilon-2$ ととれは充分である事がわかる．

（注）$N(\epsilon)$ はできうる最小の取り方をしなくても良い．上ではギリギリにとったけども，もっと余裕を見て $N(\epsilon)=2/\epsilon$ とか，$N(\epsilon)=4/\epsilon$ などでも構わない．問題が難しくなってくると $N(\epsilon)$ をギリギリにうまくとることは困難で，ある程度余裕を見て決めるしかないことも多い（今週のレポート，問 [12]）．

５月２９日：今日は ϵ-δ の続き，そして実数の性質です．先週に引き続いて心して学習するように．教科書も該当部分はきちんと読み，練習問題もする事．なお，６月１２日（月）に中間試験の予定．

第６回レポート問題： 今回は ϵ-δ の練習問題です．これでも問題数が足りないと思うから，講義ノートと教科書の問題は自分でやること！

問 13： この問では，ϵ を $0 < \epsilon \le 1/10$ をみたす実数とする．以下の 1), 2) とも，ギリギリ大きい δ でなく，余裕を見て小さめの δ を選べば充分である．(初めから $\delta < 1/4$ などと設定しても構わない．)

1) 「$|x-2| < \delta$ ならば $|x^2-4| < \epsilon$」となるような十分小さい正の δ を ϵ の関数として表せ．

2) 「$|x+1| < \delta$ ならば $|x^4+x^2+3x+1| < \epsilon$」となるような十分小さい正の δ を ϵ の関数として表せ．

問 14： ϵ-δ の練習問題．以下の極限を ϵ-δ 論法を用いて求めよ．

$$a)\ \lim_{x\to 2}(x^2+4) \qquad b)\ \lim_{x\to -1}(x^4+x^2+3x) \qquad c)^*\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{x}$$

a), b) については問 [13] が参考になろう．また，c) については，先週のレポートの「分子の有理化」がヒントである．

問 15： 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がすべての n で $a_n \le b_n$ を満たしており，かつ極限 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$，$\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ が存在するならば，$\alpha \le \beta$ であることを証明せよ．

番外問題： （前回と同じ．感想や改善の要望など，あれば書いて下さい．）

レポート提出について：

上の問に解答し，

６月１日（木）17:00 （時刻は 24 時間制）までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙は A4 を使ってください（B5 はできるだけやめてくれ，と言っておろうが...）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

先週のレポートの略解

問 9： 正しいのは (a) と (c)，正しくないのは (b) と (d)．

(a) 対偶をとるのが楽だろう．$a \ne b$ だと仮定すると，$\epsilon = |a-b|/2 > 0$ に対しては $|a-b| < \epsilon$ が成り立たない．

(b) $a \ne b$ であっても，$\epsilon = 2|a-b|$ とすると $|a-b| < \epsilon$ は成り立ってしまう．

(c) (a) と同様に議論する．もし $x > 2$ ならば，$\epsilon = (x-2)/2$ ととってみると，$x < 2+\epsilon$ が成り立たない．

(d) $x = 2$ ならば，$x < 2+\epsilon$ は $0 < \epsilon$ と同値なので，常になりたつ．つまり，$x = 2$ である可能性を排除できない．

問 10： まずは「a_n がゼロに収束する」ことの否定命題は（機械的にではなく，意味を考えて作る事）

$$\exists\epsilon > 0,\ \forall N\ \exists n > N \quad |a_n| \ge \epsilon$$

つまり，ある $\epsilon > 0$ に対しては，$|a_n| \ge \epsilon$ となるいくらでも大きな n が存在するということだ．今の場合，$\epsilon = 1/2$ ととると，n が偶数ならいつでも $|a_n| = 1 > \epsilon$ が成り立つので，上の条件が満たされている．

問 11： a_n の極限は 2 と予想される．実際，

$$|a_n - 2| = \frac{1}{n}$$

であるから，右辺の $1/n$ がゼロに行く事をいえば良い．そのためには $N(\epsilon) = 1/\epsilon$ ととると，$n > N(\epsilon)$ では

$$|a_n - 2| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\epsilon)} = \epsilon$$

となる．これは $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ を ϵ-N で書いたものに他ならない．

$$0 < b_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

であるので，右辺の $1/\sqrt{n}$ がゼロに行く事をいえば良い．そのために $N(\epsilon) = \epsilon^{-2}$ ととると，

$$0 < b_n < \frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{N(\epsilon)}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon^{-2}}} = \epsilon$$

となる. これは $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ かつ $b_n \ge 0$ を ϵ-N で書いたものであるから，$\lim_{n\to 0} b_n = 0$.

問 12： 1) これはええわね．$1-\epsilon < x^2 < 1+\epsilon$ なので，$\sqrt{1-\epsilon} < |x| < \sqrt{1+\epsilon}$ が答え．

2) $f(x) = x^3 + 3x - 4$ と書く．$f(x) = (x-1)(x^2+x+4)$ かつ，$x^2+x+4 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} \ge \frac{15}{4}$ なので，$|f(x)| < 10^{-3}$ のためには，$x \approx 1$ が必要である.（これは $y = f(x)$ のグラフを描いてもわかる.）$f(x)$ は増加関数だから，$f(x) = \pm 10^{-3}$ となるような x の値を $x_\pm$ として，$x_- < x < x_+$ が求める範囲である．

$x = 0.999, 0.9999, 1.0001, 1.0002$ などでの $f(x)$ の値を計算機で計算してみると，$x_- \approx 0.9998333194, x_+ \approx 1.000166653$ がわかる．少し余裕をみて，つまり，上の $\approx$ の誤差を吸収するつもりで x の範囲を狭めて，$0.999834 < x < 1.000166$ なら十分（かつ，ギリギリに近い）である.（もちろん，ここまでたくさんの桁を出す必要はない.）

なお，電卓を用いずともこのような近似値を求めることはできる．つまり，$x = 1+\delta$ がギリギリの値だと思って $f(1+\delta) = 10^{-3}$ を解く訳だが，δ が小さいと思って段々と精度をあげる方法がある.（詳しくは講義で）

3) ギリギリ大きい δ でなくても良い，ところがミソ．まず，任意の $\epsilon > 0$ を考える事を要求されてはいるが，$0 < \epsilon < 1$ などと，<u>小さな ϵ に対する δ の表式を求めれば充分</u>なことに注意．なぜなら，$\epsilon_1 < \epsilon_2$ の場合，$\delta(\epsilon_1)$ がわかっておれば，$\delta(\epsilon_2) = \delta(\epsilon_1)$ ととれるから，つまり，大きな ϵ での $\delta(\epsilon)$ は，より小さな ϵ' での $\delta(\epsilon')$ で代用できるから，である．また，この前にも強調したように，δ を小さくとるのは一向に構わない．

そこで以下では，$\epsilon \le 1$ の場合を考え，$\epsilon > 1$ は $\epsilon = 1$ の $\delta(1)$ で代用することにする．$|x-1| < 1$ のときには $0 < x < 2$ なので，$|f(x)| = |x-1| \times (x^2+x+4) \le 10|x-1|$ が成り立つ．従って，$\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{10}$ ととれば，

$$|x-1| < \delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{10} \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| = |x-1| \times (x^2+x+4) \le 10|x-1| < \epsilon$$

が成り立つので，題意をみたす．よって，$\epsilon > 1$ の場合も考えに入れてまとめると，このような $\delta(\epsilon)$ は

$$\delta(\epsilon) = \begin{cases} \epsilon/10 & (\epsilon \le 1 \text{ の場合}) \\ 1/10 & (\epsilon > 1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

とすれば良い．

4) 上の 3) をそのまま使う．つまり，任意の $\epsilon > 0$ に対して上のように $\delta(\epsilon)$ をとると，$|x-1| < \delta(\epsilon)$ ならば $|x^3+3x-4| < \epsilon$ がなりたつ．これは $\lim_{x\to 1}(x^3+3x) = 4$ を ϵ-δ で書いたものに他ならない.（細かいことを言うと，$|x-1| < \delta(\epsilon)$ には $x = 1$ まで含まれてしまっているが，これはより多くの x について欲しい不等式 $|x^3+3x-4| < \epsilon$ が成り立つ事を主張しているので，問題ない.）

- $\delta(\epsilon)$ などを選ぶところで，x に依存する形で選んだ人が多数いたが，これではダメだよ．$\delta(\epsilon)$ は x の範囲を制限するものだから，x に依存しては全く意味なし．
- x の範囲を規定できずに苦しんでいる人が非常に多く見られた．確かにわかりにくいとは思うが，まずは「$\delta(\epsilon)$ は正である限りいくら小さくとっても良い」ことを再確認しよう．であるから，$\delta \le 10^{-3}$ などと決めてしまっても良いのだよ．こうすれば $0.999 < x < 1.001$ となるから，邪魔な x は消せるでしょ（より詳しくは講義で）．

６月５日：先週に引き続き，風邪で死にかけてます．ので，プリントも簡単にしました．今日の office hour は短縮の可能性あり．
今日は上限，下限と単調な数列です．教科書も該当部分はきちんと読み，練習問題もする事．なお，６月１２日（月）に中間試験の予定．

――――――――先週のレポートの略解――――――――

問 13：

1) 初めから $\delta < 1$ としてみよう．すると，$|x-2| < \delta$ ならば $1 < x < 3$ である．このとき

$$|x^2-4| = |x-2| \times |x+2| < |x-2| \times 5 = 5|x-2|$$

であるので，上のを ϵ より小さくしたければ，$5|x-2| < \epsilon$，つまり $|x-2| < \epsilon/5$ なら充分だ．よって，$\delta = \epsilon/5$ とれば良い．($\delta < 1$ の条件は，$\epsilon < 1/10$ なので自動的に満たされている．)

2) やはり $\delta < 1$ としてしまうと，$-2 < x < 0$ である．このとき，

$$|x^4+x^2+3x+4| = |x-1| \times |x^3-x^2+2x+1| < |x-1| \times 15 = 15|x-1|$$

である（途中では，x^3-x^2+2x+1 が単調増加であることを用いて，こいつを $x=-2$ と $x=0$ の値の大きい方で押さえた）．従って，1) と同様に $\delta = \epsilon/15$ ととれば良い．($\delta < 1$ の条件は，$\epsilon < 1/10$ なので自動的に満たされている．)

問 14：

a) 多分，極限の値は 8 だろうと思われるから，8 をひいてみて，$\lim_{x\to 2}(x^2+4-8) = \lim_{x\to 2}(x^2-4) = 0$ を示せば良い．しかし上の問 1) から，$\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$ ととると，$|x-2| < \delta$ ならば $|x^2-4| < \epsilon$ が成り立つ事がわかっている（$\epsilon > 0$ は任意）．これは $\lim_{x\to 2}(x^2-4) = 0$ を ϵ-δ で書いたものに他ならないので，極限は 4．

b) 極限は -1 と思われるので，$\lim_{x\to -1}(x^4+x^2+3x+1) = 0$ を示せば良い．しかし上の問 2) から，$\delta = \min\{1, \epsilon/15\}$ ととると，$|x+1| < \delta$ ならば $|x^4+x^2+3x+1| < \epsilon$ が成り立つ事がわかっている（$\epsilon > 0$ は任意）．これは $\lim_{x\to -1}(x^4+x^2+3x+1) = 0$ を ϵ-δ で書いたものに他ならないので，極限は -1．

c) これはちょっと出題ミスだった．$x \to +0$ とすべきでした．申し訳なし．$0 < x < 1$ では

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})} > \frac{2}{x(\sqrt{3}+1)} > \frac{1}{2x}$$

である（下から押さえるのだから，余裕をもって分母を大きめにとれば良い）．$x \to 0$ ではこいつは無限大にいくはず．そのために，

$$\forall K > 0 \quad \exists \delta(K) > 0 \qquad 0 < x < \delta(K) \implies \frac{1}{2x} > K$$

を示そう．これはあまりややこしい事を言わなくても，$\delta(K) = 1/(2K)$ ととれば満たされる事はすぐにわかりますよね．従って，極限は存在しない（無限大に発散する）．

問 15：

虚心坦懐にやっていこう．a_n の極限が α，b_n の極限が β ということを書いてみると，

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_1(\epsilon) > 0 \qquad n > N_1(\epsilon) \implies |a_n - \alpha| < \epsilon$$

かつ

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_2(\epsilon) > 0 \qquad n > N_2(\epsilon) \implies |b_n - \beta| < \epsilon$$

となる．そこで $N(\epsilon) := \max\{N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)\}$ とすると，$n > N(\epsilon)$ では

$$|a_n - \alpha| < \epsilon \quad \text{かつ} \quad |b_n - \beta| < \epsilon$$

が成り立っている．更にいつでも $a_n \leq b_n$ であるから，$n > N(\epsilon)$ では

$$\alpha - \epsilon < a_n \leq b_n < \beta + \epsilon$$

が成り立っている．この不等式の左端と右端を見ると，

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \alpha < \beta + 2\epsilon$$

が結論できる訳だ．これは先週のレポート問題の問 9 c) によって，$\alpha \leq \beta$ に導く． □

- 不等号の向きをそろえれば不等式の足し算はできる．でも，引き算はできない．

  $$a < b \text{ かつ } c < d \quad \text{ならば} \quad a + c < b + d$$

  ではあるけども，

  $$a < b \text{ かつ } c < d \quad \text{ならば} \quad a - c < b - d \qquad \text{（ウソ！）}$$

  は一般的に成り立たないよね.
- 問 14 で $\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$ などとするのを忘れる人，多数.
- 元はと言えば，$\epsilon < 1$ とか $\epsilon < 1/10$ に対して示せば十分だから，それを言ってくれても良い.

６月１９日：今日は主に中間試験の解説と，上極限，下極限です.

第７回レポート問題： 今回は（１）上限，下限などの定義,（２）極限の値が良くわからない数列の極限の存在（その１）です.

問 16： 以下の集合 A, B, C の上限，下限（supremun, infimum）を求めよ.

1) A は $q^2 < 3$ となる有理数の全体

2) $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{n} < x < 1 \right\}, \qquad C = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{n} \leq x < 1 \right\}$

問 17： 次の数列の上極限，下極限を求めよ.

$$a_n = \frac{1}{n^2} \qquad b_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & (n \text{ が奇数}) \\ \frac{1}{n^2} & (n \text{ が偶数}) \end{cases} \qquad c_n = \begin{cases} k & (n = 4^k \text{ と書けるとき；} k \text{ は整数}) \\ -\frac{1}{n} & (\text{上以外}) \end{cases}$$

問 18： 次の数列 a_n の $n \to \infty$ での極限が存在する事を証明せよ．$x > 0$ は定数である.

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(k!)^2}$$

番外問題：（前回と同じ．感想や改善の要望など，あれば書いて下さい.）

レポート提出について：

上の問に解答し，

６月 22 日（木）17:00 （時刻は 24 時間制）までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙は A4 を使ってください（B5 はできるだけやめてくれ，と言っておろうが...）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ.

６月２６日：今日は「コーシー列」です．この概念はなかなかわかりづらいようだから，気を抜かないこと．
（中間テストに関する補足）問５ b) の連鎖律について「２回まちがって答えだけあってしまう方法」を黒板で説明しました．あれがなぜダメなのかはわかって頂けたと思います．ただ，講義の後で「以前のレポートを同様の方法でやっていたのだが，○になってしまっていた」との指摘がありました（彼は遠慮してはっきりとは言わなかったけど，ちょっと割り切れないと思ったんでしょう）．僕の考えは理解はしてもらえたようですが，他にも同じような事を思った人がいるかもしれないので，以下に書いておきます．

ちょっと割り切れないという感覚は理解できるし，実際にレポートの時点でその間違ったやり方を捉まえられなかったのは，確かに申しわけないとは思います．しかし，大学では高校までのように，手取り足取り教える余裕，皆さんの間違いをこちらが目を更のようにして見つける余裕はありません（皆さんから質問があれば，とことんつきあいますが）．また，大学生なのですから，自分で自分の間違いをただして行く能力も段々と身に付けていって欲しいと思っています．というわけで，僕もかなりの努力はしていますが，後は皆さんが注意深くレポートなどをやることで補って頂きたい．
（第７回レポートへの取り組みについての感想）自分なりに頑張っている人が段々と増えて来たようには感じています．完答は難しくても，できる範囲でともかく時間をかけて頑張るようにして下さい．

第８回レポート問題： 今回はコーシー列に関する問題です．廣島さんの中間試験があるとのことなので，今回は割合簡単にできる問題２つだけです．

問 19： 以下の性質が成立するような N を求めよ（ϵ は 0.01 より小さい正の定数である）．できるだけ小さい N を求めるのが望ましい．また，N は ϵ によることもあるだろう.（本当は m, n は整数のつもりだが答えを簡単にするために実数と思ってやって良い.）

1) 数列 a_n を $a_n := \dfrac{1}{n}$ と定義する．N より大きいすべての整数 m, n に対して $|a_n - a_m| < \dfrac{1}{100}$ が成り立つ．
2) 数列 a_n を $a_n := \dfrac{1}{n}$ と定義する．N より大きいすべての整数 m, n に対して $|a_n - a_m| < \epsilon$ が成り立つ．
3) 数列 b_n を $b_n := \dfrac{n^2}{1+n^2}$ と定義する．N より大きいすべての整数 m, n に対して $|b_n - b_m| < \epsilon$ が成り立つ．

問 20： 以下の数列はコーシー列であることを，コーシー列の定義に照らし合わせて判断せよ．$N(\epsilon)$ をどのようにとったらよいかも明記せよ（問 19 とは異なり，$N(\epsilon)$ はもっとも効率の良い取り方をする必要はない）．

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{n^2}{n^2+1}$$

$$c_n \text{ は不等式 } |c_{n+2} - c_{n+1}| \le \frac{1}{2}|c_{n+1} - c_n| \text{ を満たす数列}$$

（注）「収束する数列はコーシー列である」ことは講義でやるから、これらの数列が収束する事を示せばコーシー列であることは言える．しかしこの問題では，コーシー列の定義を理解するために，これらの数列が定義を直接満たしていることを示して欲しいのだ．

番外問題： 補講の可能性について,「水曜の４限」または「木曜の４限」で困る人は是非，書いて下さい.（もちろん，補講するのは一日だけです.）
（前回と同じ．感想や改善の要望なども，あれば書いて下さい.）

レポート提出について：

上の問に解答し，

6 月 29 日（木）17:00 （時刻は 24 時間制）までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙は A4 を使ってください（B5 はできるだけやめてくれ，と言っておろうが…)．
また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ.

——————先週のレポートの略解——————

問 16：

1) 上限は $\sqrt{3}$，下限は $-\sqrt{3}$ である．

（上限が $\sqrt{3}$ である証明）まず，$q < \sqrt{3}$ であるから，$\sqrt{3}$ は上界の一つであり，従って上限は $\sqrt{3}$ 以下であることに注意しよう．$\sqrt{3}$ より小さな上界が存在しない事を証明すればよい．

つまり，$\alpha < \sqrt{3}$ が実際に上界であったとすると，矛盾が生じる事を示したい（背理法）．しかし，α より大きく，$\sqrt{3}$ より小さい有理数は必ず存在する．

> なぜなら，$\sqrt{3}$ を十進法で小数展開した始めの $n+1$ 桁で表される数を x_n と書くと，x_n は有理数であり，かつ，x_n と $\sqrt{3}$ との差は 10^{-n} 以下である．n を大きくとると，この誤差はいくらでも小さくなるので，$\alpha < x_n < \sqrt{3}$ となるような n が存在する．

従って，この α は上界ではありえない．この議論が任意の $\alpha < \sqrt{3}$ で成り立つから，$\sqrt{3}$ より小さい上界は存在しない事が結論できる．

従って，上限は $\sqrt{3}$ である．

（下限が $-\sqrt{3}$ である証明）これは上限のものとほとんど同じ（いくつかの不等式の向きが変わるだけ）なので，省略.

重要な注意：かなり多くの人が「$\sqrt{3}$ は有理数ではないので A の上限や下限は存在しない」としていたが，これは間違いである．今は実数の範囲で上限や下限を探しているのだから，$\pm\sqrt{3}$ は立派な上限・下限だ —— ただし，この $\pm\sqrt{3}$ は A の元ではない．A の元でなくても上限や下限になれるところが,「最大値・最小値」との違いである．
ところで，公理 3.1.3 では「有界な集合は上限と下限を持つ」とやったばかりではないか！A が上限や下限を持たないとすると，この公理に反してしまうぞ！自分が書いている事が講義でやった事と矛盾しないかどうかは考えようよ．

2) B の上限は 1，下限は 0 である．

（上限が 1 である証明）1 が上界であるので，上限は 1 以下である．1) と同様に，1 より小さい上界がないことを言えば良い．しかしこれも 1) と同様で，$\alpha < 1$ を任意にとってくると，$\alpha < x < 1$ となる $x \in B$ が存在するため，α は上界になり得ない．従って，1 が上限である．

（下限が 0 である証明）これも良く似たものだが... 0 が下界のひとつであるので，0 より大きい下界がないことを言えば良い．しかし，任意の $\beta > 0$ に対して，$0 < \frac{2}{n} < \beta$ となるような n が存在し，$\frac{2}{n}$ は B の元である．従って，$\beta > 0$ は下界にはなり得ない.

C の上限は 1，下限は -1 である．上限が 1 であることは B と同じなので省略する．

（下限が -1 である証明）$-1 \leq -\frac{1}{n}$ なので，-1 は下界の一つである．さらに，$n=1$ で $-1 = -\frac{1}{n}$ なので，これより大きい下界はあり得ない.

問 17： まあ，定義通りやってくれ，という問題です．

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geq n} a_k\right), \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n} a_k\right)$$

を思い出しておこう.

a_n について．sup と inf の定義から，

$$\sup_{k\geq n} a_k = \frac{1}{n^2}, \qquad \inf_{k\geq n} a_k = 0$$

である（後者については問 [16] の B と同じように議論すればよい）．上の二つの右辺の $n \to \infty$ の極限をとって，

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = 0$$

である．

b_n について．$n \geq 2$ くらいを考えると

$$\sup_{k\geq n} b_n = \sup_{\substack{k\geq n \\ k\text{ は奇数}}} \left(1+\frac{1}{k}\right) = \begin{cases} 1+\frac{1}{n} & (n\text{ が奇数}) \\ 1+\frac{1}{n+1} & (n\text{ が偶数}) \end{cases}$$

となる．(注：k が偶数の時には $b_k = k^{-2} < 1$ なので，k が奇数の時の方が格段に大きいから，そこのところの sup をとることにした.）この $n \to \infty$ での極限は 1 なので，上極限は 1．また，同様に，

$$\inf_{k\geq n} b_n = \inf_{\substack{k\geq n \\ k\text{ は偶数}}} \left(\frac{1}{k^2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & (n\text{ が偶数}) \\ \frac{1}{(n+1)^2} & (n\text{ が奇数}) \end{cases}$$

この $n \to \infty$ での極限は 0 なので，下極限は 0.

c_n について．

$$\inf_{k\geq n} c_n = \inf_{\substack{k\geq n \\ k\text{ は 4 の冪乗ではない}}} \left(-\frac{1}{k}\right) \geq -\frac{1}{n}$$

であり（これはすべての n でなりたつ），かつ，n が 4 の冪乗でないならば $\inf_{k\geq n} c_n = -1/n$ である．従って，この $n \to \infty$ の極限を考えて，下極限は 0.

上極限は無限大である．なぜなら，m が 4 の冪乗の時は $c_m = \log_4 m$ であり，m はいくらでも大きいのがあるから，

$$\inf_{k\geq n} c_n = +\infty$$

である．よって上極限は $+\infty$（上極限は無限大に発散する）.

なお，a_n については，普通に極限を求めてから「上極限＝下極限＝普通の極限」とやった人もかなりいたようです．これは決して間違いではないですけど，今はできれば上極限や下極限の定義に戻ってやって欲しかったなあ...

問 18： （お断り）出題ミスがあった上に，訂正も僕の意図したものにならなかったようです（いずれにせよ，僕のミスです．すみません.）以下では僕の本来の意図したもの，および訂正時に変わってしまった問題，の両方を解説します.

（僕の意図した問題）本当は $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(k!)^2}$ を考えて欲しい，と言う事でした（$x > 0$ は定数）.

（訂正時に変わってしまった問題）これがどうも $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ を考える，となってしまったようです（$x > 0$ は定数）.

以下では，この両方をやります.

a_n でも b_n でも，和は正のものを足しているので，n を増やすと a_n や b_n は増える．つまり，a_n と b_n は n について単調増加数列．従って，これらが上に有界であることが言えれば,「有界な単調増加数列は収束する」という定理から，$\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\lim_{n\to\infty} b_n$ の存在が示される.

さて，$a_n \leq b_n$ だから，b_n が上に有界である事を示せば，a_n もそうであると言える．そこで以下では，b_n が上に有界である事を証明する．これはなかなか大変で，ほとんどの人が自力でできなくても仕方ない．証明には k が大きいとき，$k!$ が非常に大きくなる事を用いる.

まず，$x > 0$ は固定された数だから，この x よりも充分に大きな N を一つ決める．具体的には

$$N := \max\{1, 2x\}$$

としておく．$k > N$ のときに $k!$ と $x^k/k!$ について考えてみよう．階乗を積の形で下のように書いてみて，$\ell > N$ では $x/\ell < 1/2$ であることをもちいると，

$$\frac{x^k}{k!} = \prod_{\ell=1}^{k} \frac{x}{\ell} = \left(\prod_{\ell=1}^{N} \frac{x}{\ell}\right) \times \left(\prod_{\ell=N+1}^{k} \frac{x}{\ell}\right) \leq \left(\prod_{\ell=1}^{N} \frac{x}{\ell}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-N}$$

がなりたつ．従って，$n > N$ では

$$b_n \le \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{n} \Big(\prod_{\ell=1}^{N} \frac{x}{\ell}\Big) \times \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-N} = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \Big(\prod_{\ell=1}^{N} \frac{x}{\ell}\Big) \sum_{k=N+1}^{n} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-N} \le \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \Big(\prod_{\ell=1}^{N} \frac{x}{\ell}\Big) = C$$

: がなりたつ（最後のところでは，和を等比級数で評価した；また上の右辺の量を C と定義した）．この右辺の C は x と N だけによっていて，n にはよらない定数である．つまり，すべての $n > N$ で b_n は上の C を超えない．b_n は単調増加だから $n \le N$ なる n での b_n は $n > N$ の b_n よりも小さく，よって C を超えない．従って，すべての n で $b_n \le C$ であり，$\{b_n\}$ が有界である事が言えた．

よって，単調増加で有界である $\{b_n\}$ は収束する．また，$a_n \le b_n$ だったので，$\{a_n\}$ も有界である．$\{a_n\}$ もまた単調増加だったから，$\{a_n\}$ の極限も存在する． □

- $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ を使った人も多かったようだが，これはまだやっていないのだから，これを使う事は想定していない．上のように地道に評価して欲しい，という問題だったのです.「原先生が言ってた」というのは理由になりませんよ.（僕が嘘をいってたらどうするの？）数学科では「すべてゼロから出発して証明できる」ことを目指して下さい.
- ただしもちろん，講義ではまだやってないけど「e^x のテイラー展開を独学で勉強して充分にわかってるから使うぞ」というのは大変に良いことです.
- また，$b_n \le e^x$ がすべての $n \ge 0$ でなりたつことを証明してしまえば，それでも構いません.（ただし，e^x という関数は大学の数学ではまだ定義していないのではありますが... e^x の定義はもうすぐやります.）この不等式は $f(x) = e^x - b_n$ を考えて，$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$ かつ，$f^{(n)}(x) = e^x - 1 \ge 0$ を示す事により、証明できます.（実際にこのように証明した人も少数ですがいました．大変に良かったと思います.）
- 「$\dfrac{x^k}{k!} < \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ だから収束する」と書いた人もいたが，これでは不十分です．例えば，$c_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ を考えると，$\frac{1}{k}$ は単調減少であるが，c_n は有界ではありません.

６月２６日：今日は「連続関数」です.
なお，補講を７月１３日（木）の４限に入れる可能性が高くなって来ました.

第９回レポート問題：

今回はコーシー列，連続関数です．今回は少し難しめですから，早めに取り組んで下さい.（たぶん，前日からでは間に合わんだろう.）

問 21： 以下の数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束するかどうかを判定せよ.

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \qquad b_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right)}{k}$$

問 22：

1) 関数 $f(x) := x^3$ は $x = -2$ で連続かどうか，連続性の定義に基づいて判定せよ.

2) 関数

$$g(x) := \begin{cases} \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

は $x = 0$ で連続かどうか，連続性の定義に基づいて判定せよ.

3) 関数

$$h(x) := \begin{cases} \sqrt{|x|}\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

は $x = 0$ で連続かどうか，連続性の定義に基づいて判定せよ.

番外問題：（いつもと同じ．感想や改善の要望なども，あれば書いて下さい.）

レポート提出について：

上の問に解答し，

> ７月６日（木）16:00 （いつもより早いぞ！時刻は 24 時間制）までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙は A4 を使ってください（B5 を使ってる人は漸くなくなったかな）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ.

―――――――――――先週のレポートの略解―――――――――――

問 19：

1, 2) $|a_n - a_m| = \dfrac{|m-n|}{nm}$ であるので，この右辺を $\frac{1}{100}$ や ϵ より小さくすればよい．$m > n$ として解いた上で，m と n をひっくり返せば $m < n$ の場合も扱えるから，以下では $m \geq n$ とする．つまり，我々は $|a_n - a_m| = \dfrac{m-n}{nm}$ を上から $\frac{1}{100}$ や ϵ で押さえたい.

まず

$$\frac{m-n}{nm} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$

であるので，1) なら $N(\epsilon) = 100$，2) なら $N(\epsilon) = 1/\epsilon$ ととれば十分であることはすぐにわかるだろう.

問題はこれ以上小さい $N(\epsilon)$ がとれないか，が問題だが，これが無理な事は以下のようにしてわかる．我々は（1, 2 は同じなので，2 の方で説明する）

$$m > n > N(\epsilon) \quad \text{ならば} \quad \frac{m-n}{nm} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \epsilon$$

となる $N(\epsilon)$ を求めたい．しかし，m はいくらでも大きくなれるから，$\frac{1}{n} - \frac{1}{m}$ はいくらでも $\frac{1}{n}$ に近くなる．つまり，$N(\epsilon)$ を少しでも小さくすると，$m \to \infty$ のときの

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \epsilon$$

を満たすことができない．よって，1) の答えは $N(\epsilon) = \frac{1}{100}$，2) の答えは $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$ ．

b_n については

$$b_m - b_n = -\frac{1}{1+m^2} + \frac{1}{1+n^2}$$

に注意すれば，a_n とほとんど同じである（分母が n ではなく，$1+n^2$ になってることだけが差異）．よって，$\frac{1}{1+n^2} < \epsilon$ となるような n の範囲を求めて，

$$N(\epsilon) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1} & (\epsilon < 1) \\ 0 & (\epsilon \geq 1) \end{cases}$$

が答えじゃ.

（注）a_n がいつも正で，かつゼロに収束するので，$|a_n - a_m|$ の絶対値を a_n や a_m の大きい方で押さえれば十分だった．一般に a_n の符号が一定しない場合やゼロに収束しない場合は工夫が必要である．

問 20：

a_n については問 [19] のように $N(\epsilon)$ を決めると，

$$m > N(\epsilon) \text{ かつ } n > N(\epsilon) \quad \text{ならば} \quad |a_n - a_m| < \epsilon$$

が成り立つ．かつ，これはすべての $\epsilon > 0$ に対してこのような $N(\epsilon)$ が存在する．従って，a_n はコーシー列の定義を満たしている．b_n も同様.

c_n だけが当たり前には見えないだろうが，この漸化式から，まず

$$|c_{n+1} - c_n| \leq \frac{1}{2}|c_n - c_{n-1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |c_{n-1} - c_{n-2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |c_{n-2} - c_{n-3}| \leq \ldots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |c_2 - c_1|$$

が導かれる事に注目すれば,（$m > n$ として）

$$(*) \qquad |c_m - c_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |c_{k+1} - c_k| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} |c_2 - c_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} |c_2 - c_1|$$

が得られる．これは n さえ大きくすればいくらでも小さくできるから，なかなかよろしい．実際,

任意の $\epsilon > 0$ に対して，$N(\epsilon) := 2 + \log_2\left(\frac{c_2 - c_1}{\epsilon}\right)$ ととれば，すべての $m > n > N(\epsilon)$ で $|c_m - c_n| < \epsilon$

となることが，上の (*) からわかる．従って，$\{c_n\}$ はコーシー列である． □

７月１０日：今日は「微分」です．いくつか重要な連絡事項があるので良く読んで下さい．

1. 補講を７月１３日（木）の４限に入れます．その補講でカバーする範囲は「平均値の定理」「微係数の正負と関数の増減の関係」で，大筋は高校でやったはずのものです．場所は未定ですが，皆さんが木曜３限に演習をやっている部屋の周辺 —— 多分，本 25 号室．
2. 期末テストは教務課の掲示通りの時間，場所で行うので，各自，確認の事．
3. 期末テストの範囲は今学期にやったとこ全部（補講でやるところは除く）．特に
   - 偏微分，連鎖律など
   - 極限の定義，ϵ-N，ϵ-δ など
   - 数列の収束条件，上極限，コーシー列
   - 連続関数とは何か
   - 簡単な論理の問題

   などは最重要でしょうね.（このすべてを訊く事はできないから，ある程度の取捨選択はしますが.）もちろん，これ以外にもやった事，関連した事は訊く可能性があります．
4. 国際会議への招待は断ったので,「学習到達度再調査」を行う事は可能です．どのようにやるか，そもそもやるかやらないかも含めて，現在，検討中です．期末までには決めますが,「再調査」をやるならば期末から１週間後の同じ時間にやるでしょう.（１週間後で都合の悪い人は期末の前までに必ず僕に言って下さい.）

   なお，学期の始めに宣言した通り,「再調査」をやる場合でも，期末の出来が悪い人には「再調査」を受けさせないのでそのつもりで.（去年の１年生は全員，再調査に呼びましたが，それは全員，期末がそこそこの成績だったからです,）
5. 秋学期の最初の頃に「夏休み復習テスト」を行う可能性が非常に高いので予告しておきます．詳しい事は期末テストの時に宣言します．

なお，今回はレポート出題はありませんが，各自，期末テストに備えて良く学習しておく事．特に皆さん，練習がまだまだ足りないようだから各自で演習書などをやっておくことを強く奨めます.（お勧めの演習書は学期の始めに書きましたね.）

—————————————先週のレポートの略解 —————————————

問 21： 実はこの問題は，秋学期に習うはずの「アーベルの定理」の特殊な場合である．その定理の証明を真似すればできるのだが，ここではもう少し素朴にやってみる．a_n, b_n ともにコーシー列であることを示すのがよいだろう．以下の評価は積分を用いてやる事も可能だが，まずはそれを用いない方法を示す．

a_n についてやってみる．$m > n$ とする．我々が評価したいのは

$$a_m - a_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = \sum_{l=1}^{m-n} \frac{(-1)^{n+l}}{\sqrt{n+l}} = (-1)^n \sum_{l=1}^{m-n} \frac{(-1)^l}{\sqrt{n+l}} \tag{1}$$

である．これの厄介なところは各項の符号が変わることと，絶対値をとって評価したら収束しないことである．つまり，各項の符号が変わっていくつかの項が（ほとんど）打ち消し合うことを積極的に使う必要がある．

まず，$m-n$ が奇数の場合を考える．最初の $n+1$ の項だけを取り出して、残りを２つずつ組み合わせると，

$$\sum_{l=1}^{m-n} \frac{(-1)^l}{\sqrt{n+l}} = \frac{(-1)}{\sqrt{n+1}} + \sum_{l=2}^{m-n} \frac{(-1)^l}{\sqrt{n+l}} = -\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sum_{\ell=1}^{(m-n-1)/2} \Bigl(\frac{1}{\sqrt{n+2\ell}} - \frac{1}{\sqrt{n+2\ell+1}} \Bigr) \tag{2}$$

が得られるが，上の和の中身は正であるので，この和を捨てたものはもとの量より小さい．つまり

$$\sum_{l=1}^{m-n} \frac{(-1)^l}{\sqrt{n+l}} \geq -\frac{1}{\sqrt{n+1}} \tag{3}$$

を得る．一方，最後の $n+m$ の項だけを取り出してそれ以外をペアにくむと，

$$\sum_{l=1}^{m-n}\frac{(-1)^l}{\sqrt{n+l}}=\sum_{l=1}^{m-n-1}\frac{(-1)^l}{\sqrt{n+l}}+\frac{(-1)^{m-n}}{\sqrt{n+m}}=\sum_{\ell=1}^{(m-n-1)/2}\Bigl(\frac{-1}{\sqrt{n+2\ell-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2\ell}}\Bigr)-\frac{1}{\sqrt{m}} \tag{4}$$

を得る（最後のところでは $m-n$ が奇数なので $(-1)^{m-n}=-1$ であることを用いた）．今度は和の中身が負なので，この和を捨てたものよりも元々の量は小さい，つまり

$$\sum_{l=1}^{m-n}\frac{(-1)^l}{\sqrt{n+l}}\le-\frac{1}{\sqrt{m}} \tag{5}$$

が得られる．以上から，$m-n$ が正の奇数の時には

$$-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\le\sum_{l=1}^{m-n}\frac{(-1)^l}{\sqrt{n+l}}\le-\frac{1}{\sqrt{m}} \tag{6}$$

が成り立つ事がわかった．

次に $m-n$ が正の偶数の場合を考える．この時は l についての和を 2 つずつまとめてみると

$$\sum_{l=1}^{m-n}\frac{(-1)^l}{\sqrt{n+l}}=\sum_{\ell=1}^{(m-n)/2}\Bigl(-\frac{1}{\sqrt{n+2\ell-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2\ell}}\Bigr)\le 0 \tag{7}$$

となる．一方，最初と最後の項を外して残りを 2 つずつまとめると

$$\sum_{l=1}^{m-n}\frac{(-1)^l}{\sqrt{n+l}}=-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\sum_{\ell=1}^{(m-n)/2}\Bigl(\frac{1}{\sqrt{n+2\ell}}-\frac{1}{\sqrt{n+2\ell+1}}\Bigr)+\frac{1}{\sqrt{m}} \tag{8}$$

となるけども和の中身は正なので，

$$\sum_{l=1}^{m-n}\frac{(-1)^l}{\sqrt{n+l}}\ge-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{m}} \tag{9}$$

が得られる．(7) と (9) から，$m-n$ が正の偶数の場合は

$$-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{m}}\le\sum_{l=1}^{m-n}\frac{(-1)^l}{\sqrt{n+l}}\le 0 \tag{10}$$

が得られる．

(6) と (10) から，$m-n$ が正の整数の場合は

$$\Bigl|\sum_{l=1}^{m-n}\frac{(-1)^l}{\sqrt{n+l}}\Bigr|\le\frac{1}{\sqrt{n+1}}\qquad\text{よって}\qquad|a_m-a_n|\le\frac{1}{\sqrt{n+1}} \tag{11}$$

が成り立つ事がわかった．これは

$$m,n>N\quad\text{ならば}\quad|a_m-a_n|\le\frac{1}{\sqrt{N+1}} \tag{12}$$

であることを意味する．従って，任意の $\epsilon>0$ に対しても $N>\epsilon^{-2}$ ととればコーシー列の条件が満たされる事が示され，$\{a_n\}$ はコーシー列であることがわかった．

b_n について．和の中身を書いてみると，こいつは

$$c_k:=\frac{\cos\Bigl(\dfrac{2\pi}{3}k\Bigr)}{k}=\begin{cases}1/k & (k\text{ が }3\text{ の倍数})\\ -1/(2k) & (k\text{ が }3\text{ の倍数でない})\end{cases} \tag{13}$$

となっている．これを基にして b_m-b_n を考えていこう．

基本的な考え方は a_n と同じである．つまり，k が 3 の倍数であるか否かで分類すると，大体プラスとマイナスが打ち消し合うはずなのだ．

$$b_m - b_n = \sum_{k=n+1}^{m} c_k \tag{14}$$

なので，m, n が 3 の倍数であるか否かで以下のように分けて考える．まず，$m - n > 6$ くらいの場合に限定して考える．m, n を $m = 3M + p, n = 3N + q$ と書いてみる．ここで M, N は m, n を 3 で割った時の商，$0 \le p, q \le 2$ はその時の余りである．そして

$$b_m - b_n = \sum_{k=n+1}^{3N+3} c_k + \sum_{k=3N+4}^{3M} c_k + \sum_{k=3M+1}^{m} c_k \tag{15}$$

と 3 つに分ける．かなりおおざっぱに評価すると，上の最初の和と最後の和は

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{3N+3} c_k + \sum_{k=3M+1}^{m} c_k\Big| \le \sum_{k=n+1}^{3N+3} |c_k| + \sum_{k=3M+1}^{m} |c_k| \le 3 \times \frac{1}{n+1} + 3 \times \frac{1}{3M+1} \le \frac{6}{n+1} \tag{16}$$

となる．(実際は $\pm$ があってキャンセルする部分も多いだろうが，気にしない．）一方，真ん中の和は

$$\sum_{k=3N+4}^{3M} c_k = \sum_{l=N+1}^{M-1} (c_{3l+1} + c_{3l+2} + c_{3l+3}) = \sum_{l=N+1}^{M-1} \Big(-\frac{1}{2(3l+1)} - \frac{1}{2(3l+2)} + \frac{1}{3l+3}\Big) \le 0 \tag{17}$$

となっている．両方併せて

$$b_m - b_n \le \frac{6}{n+1} \tag{18}$$

が示せた．次に

$$b_m - b_n = \sum_{k=n+1}^{3N+2} c_k + \sum_{k=3N+3}^{3M-1} c_k + \sum_{k=3M}^{m} c_k \tag{19}$$

と分けると（場合によっては最初の和は空であるかもしれない），最初と最後の和はやはり $6/(n+1)$ で押さえられる事がわかる．また，真ん中の和は今度は

$$\sum_{k=3N+3}^{3M-1} c_k = \sum_{l=N+1}^{M-1} (c_{3l} + c_{3l+1} + c_{3l+2}) = \sum_{l=N+1}^{M-1} \Big(\frac{1}{3l} - \frac{1}{2(3l+1)} - \frac{1}{2(3l+2)}\Big) \ge 0 \tag{20}$$

となる．従って

$$b_m - b_n \ge \sum_{k=n+1}^{3N+2} c_k + \sum_{k=3M}^{m} c_k \ge -\frac{6}{n+1} \tag{21}$$

が得られる．結局，(18) と (21) により，$m - n > 6$ くらいでは

$$|b_n - b_m| \le \frac{6}{n+1} \tag{22}$$

が言えた．また，$|m - n| \le 6$ でも同じである事は c_k の絶対値をとって評価すればいえる．これから直ちに $\{b_n\}$ がコーシー列であることが言える．

積分を使った評価　以上，積分などを使わないやり方を書いてみた．もし積分を使うのであれば，もう少し簡単にできる．例えば a_n の方，$m - n$ が偶数の場合は

$$\sum_{l=1}^{m-n} \frac{(-1)^l}{\sqrt{n+l}} = \sum_{\ell=1}^{(m-n)/2} \Big(-\frac{1}{\sqrt{n+2\ell-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2\ell}}\Big) = -\sum_{\ell=1}^{(m-n)/2} \frac{\sqrt{n+2\ell} - \sqrt{n+2\ell-1}}{\sqrt{n+2\ell}\sqrt{n+2\ell-1}} \tag{23}$$

$$= -\sum_{\ell=1}^{(m-n)/2} \frac{1}{\sqrt{(n+2\ell)(n+2\ell-1)}(\sqrt{n+2\ell} + \sqrt{n+2\ell-1})} \tag{24}$$

となる．これはいつも負である．絶対値をとって，

$$|a_m - a_n| \le \sum_{l=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{(n+2\ell)(n+2\ell-1)}(\sqrt{n+2\ell}+\sqrt{n+2\ell-1})} \le \sum_{\ell=1}^{(m-n)/2} \frac{1}{2(n+2\ell-1)^{3/2}} \tag{25}$$

が得られる．この後ろの和を高校で習ったええ加減な積分の知識で評価すると，M がいくら大きくても（$n \ge 3$ くらいは仮定）

$$\sum_{\ell=1}^{(m-n)/2} \frac{1}{2(n+2\ell-1)^{3/2}} \quad \le \int_0^\infty \frac{1}{2(n+2x-2)^{3/2}} dx < (n-2)^{-1/2} \tag{26}$$

となるので，$m-n$ が正の偶数の場合は

$$|a_m - a_n| \le \frac{1}{\sqrt{n-2}} \tag{27}$$

となる事がわかった．

このようなやり方は汎用性があって非常に良いから，むしろ奨励すべきだが，この講義では「積分」の基礎付けをまだやっていないので，敬遠しておいた．実際のところ，上で使った積分の理論は「$x^{-3/2}$ の不定積分は $-2x^{-1/2}$」と言う事だけだから，高校の範囲で一応，すべてできる事にはなっている．

問 22：

1) 連続である．$f(-2) = -8$ なので $f(x)-(-8) = x^3+8 = (x+2)(x^2-2x+4)$ を評価したい．$|x+2| < 1$ の範囲で考えると，$x^2-2x+4 = (x-1)^2+3 \le 19$ であるので，ここでは $|f(x)+8| \le 19|x+2|$．従って $\delta(\epsilon) := \min\{1, \epsilon/19\}$ ととれば $|x+2| < \delta(\epsilon)$ では $|f(x)-f(-2)| < \epsilon$ が成り立つので，$f(x)$ は $x=-2$ で連続.

2) 連続ではない．$x=0$ で連続である事の否定命題は

$$\exists\epsilon > 0 \quad \forall\delta > 0 \qquad 0 < |\exists x| < \delta \quad |g(x)-1| \ge \epsilon \tag{1}$$

なので，上のが $\epsilon = 1$ でなりたつことを言ってみよう．そのために，任意の正の整数 n に対して $1/x^2 = (2n-1)\pi$ では $\cos(1/x^2) = -1$ である事に注意する．どんなに $\delta > 0$ が小さくても，上のような $x = \{(2n-1)\pi\}^{-1/2} < \delta$ は存在するので，(1) がなりたつ．つまり，この関数は $x=0$ では連続でない.

3) 連続である．今度は前に $\sqrt{|x|}$ がかかっており，こいつがゼロになるから．ちゃんと証明するには以下のようにする．任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta(\epsilon) := \epsilon^2$ ととると，$0 < |x| < \delta(\epsilon)$ に対しては

$$|h(x)| = \left|\sqrt{|x|}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \sqrt{|x|} \le \sqrt{\delta(\epsilon)} = \epsilon \tag{2}$$

が成り立つので，$\lim_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$ で連続.