2006.12.8.

# 微分積分学 B （農学部，理 37 クラス）

新担当：原　隆（数理学研究院）：六本松 3-312 号室，tel: 092-726-4774,　e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp,
http://www.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html

Office hours: 月曜の午後４時〜６時頃，また金曜のこの講義の後，僕のオフィスにて．これ以外の時間でもアポさえとってくれればできるだけ希望に添うようにはします．

**概要：** 前担当者が病気のため，急遽，ピンチヒッターで担当することになりました原と申します．よろしくお願いします．今日，欠席している人にも教えてあげて下さい．

今日を入れても６回しか残っていないので，これまでの進み方も考慮しつつ，何をやるかを考えて行きます．以下は思いつくままに書いたトピックの羅列です．すべてやるのは時間的に不可能なので，大胆に取捨選択します．どれをやるかは今日の反応も見て，来週までにできるだけ確定します．やる順序もかなり変わるかもしれません．

- 関数と微分の話題
  - 合成関数の微分
  - 逆関数とは；逆三角関数の微分
  - 平均値の定理とテイラー展開
- 積分の話題
  - 積分とは何か（区分求積法による定義）
  - いろいろな積分法（置換積分，無理関数や有理関数の積分）
- 多変数の微積分の話題
  - 多変数の微分（偏微分）と極値問題

**教科書と参考書：** 教科書は既に指定された通り，小林昭七著「微分積分読本」（裳華房）です．ただ，この本には演習問題がほとんどなく，また多変数の微積分は別の巻になっています．足りない部分はプリントなどでおぎなうように努力します．

### 評価方法：

現在，検討中です．来週にはある程度の方針を示せると思います．

### 「学習到達度再調査」について：

諸般の事情を鑑みると「学習到達度再調査」を行うべきだと思います．ただ,「学習到達度再調査」があるからと言って油断はせず，できるだけ期末試験までに合格できるように頑張って下さい．

### 合格（最低）基準：

これも検討中です．

### レポートなどについて：

教科書はなかなか良いものですが，残念なことに演習問題が載っていません．また，時間的余裕もないので，講義中に問題を解いてもらう事はちょっと不可能でしょう．この点を補うため，簡単なレポートや「お奨めの宿題問題」を次回以降，出す予定です．この講義をこなす上では重要な意味があるので，是非，やって下さい．

「レポート」の作成はみんなで協力してやっても構わないし，むしろ協力することを奨励します．ただし、（友達と協力してレポート問題を解いた場合でも）各人のレポートは自分の言葉で記述し、かつ、「○○君と一緒に考えました」とぐらいは書きましょう．また，教えてもらった事はそのままにせず，自分でもう一回考えて納得しましょう．

## この科目に関する御願い：

これまでの経緯を考えると書きにくい面もありますが，以下の事を御願いしたいと思います．どうかよろしく.

- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．わからないところがあれば，できるだけ「質問！」して下さい．途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケットです.
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける.
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕のホームページも使う —- アドレスは次ページの上）.「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は原則として受け付けない.
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う.
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.kyushu-u.ac.jp）．ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい.

この講義の進め方，成績評価，取り上げて欲しい題材，などについての希望や意見があれば，今日の講義の後に僕に直接話すか，または紙に要望を書いて，僕の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に入れて下さい．意見や要望を言っただけで不利になる事は絶対にありませんので，ご安心ください.（ただし，すべての要望に添えるとは限らない事もご了承ください.）

先週のまとめと今日の始めにやる事

- 関数とは何か，逆関数とは何か
- 合成関数の微分法（少し）
- 逆関数の微分法

# 1 平均値の定理とテイラー展開

## 1.1 平均値の定理

（この節の内容は大体，教科書の 3.9 節）

直感的には簡単な定理（下図左を参照）．あまり厳密な事を言っても仕方ないので，ここは「こんな定理もある」ことと「その直感的な意味」さえわかれば十分だ．

**定理 1.1 (平均値の定理；教科書の p.140)** $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 $(a,b)$ で微分可能と仮定する．このとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \qquad (a < \xi < b) \tag{1.1}$$

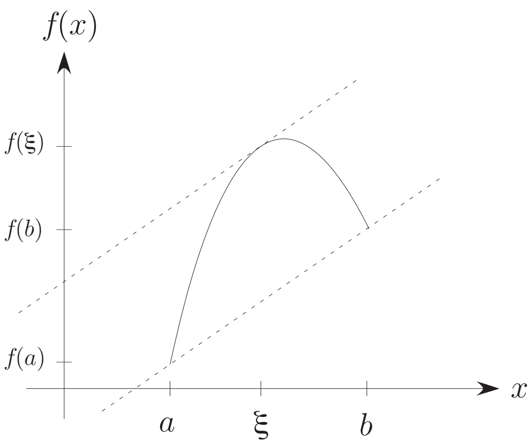
となる $\xi$ が存在する．

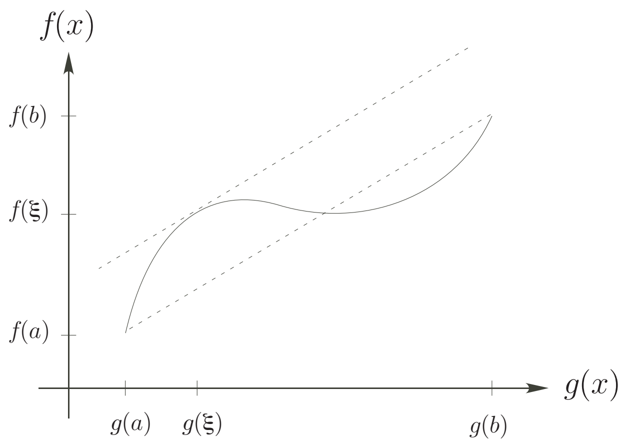
（注）$\xi$ は一般には $a, b$ の両方に依存して決まる．なお，上で $(a,b)$ は開区間（$a < x < b$ なる $x$ の集合），$[a,b]$ は閉区間（$a \le x \le b$ なる $x$ の集合）のこと．

定理を応用する場合，分母を払って

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a) \tag{1.2}$$

と書いた方が良いかもしれない．$f(b)$ の値を $f(a)$ から「計算したい」希望を表している式である（詳細は講義で）．この方向をもっと進めると「テイラーの定理」になる．




下の形の定理も有効である（上図右を参照）．実際，後で「テイラーの定理」の証明に用いる．

**定理 1.2 (コーシーの平均値の定理；教科書の p.142)** $f(x)$ と $g(x)$ が共に閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 $(a,b)$ で微分可能とする．更に，$(a,b)$ では $g'(x) \neq 0$ としよう．このとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (a < \xi < b) \tag{1.3}$$

となる $\xi$ が存在する．

（注）$g'(x) \neq 0$ から $g(a) \neq g(b)$ が保証される．

## 1.2 テイラーの定理とテイラー展開

（大体，教科書の 3.10 節）
（大雑把な話）「テイラー展開」とは $f(x)$ の値を $f(a)$ とその高階微係数で表す表式で，

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.4}$$

という形をしている（この表式の成立条件は後でじっくりやる）．皆さんの良く知っている関数の例では（上で $a=0$ としたものを書いた）

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n \tag{1.5}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \tag{1.6}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} \tag{1.7}$$

などとなる．

これはやはり**驚異的な式**である !!（と共感して欲しい...）高校から知ってたはずの関数が，上のような変な級数（和）で書けるのだ．物事を深く考えるひとほど，初めはこの式に違和感を持つものと思う．特に変なのは $\sin x$ と $\cos x$ であって，上の表式からは $\sin x$ と $\cos x$ が周期 $2\pi$ の周期関数である事が全く自明ではない！($\sin \pi = 0$ が上の式から見えますか？)

しかし，後で証明するように，上の 3 つの式はすべて正しい．$\sin x$ や $\cos x$ の周期性は暫く各自で考えてもらうことにして，テイラー展開の持ちうる意味（意義）について簡単に述べておこう．

- まず，(1.5) などの式は，それ自身が数値計算にも適している —— $e^x, \sin x$ などの値を，右辺の級数（和）で計算できるのだ．もちろん，無限級数の値そのものを数値的に求める事はできないが，たくさんの項の和をとる事で，いくらでも精度良く計算できる[1]．
- (1.4) にはもう少し理論的な意味もある．つまり，$|x-a|$ が小さい場合に $f(x)$ を $f(a)$ で近似すると，誤差がどうなるかを表していると解釈できる．この誤差の評価は，もっと進んだ（数学の）結果を得るのに不可欠である．

以下，このテイラー展開について詳しく述べる．まずはおおもとの「テイラーの定理」から始めよう．

### 1.2.1 テイラーの公式（有限項でとめた形）

通常，テイラーの定理（テイラーの公式）というのは以下の形の定理をいう：

**定理 1.3 (通常のテイラーの公式，教科書の p.152)** $f(x)$ がある開区間 $I$ で $n$ 回微分可能と仮定し，この区間内に $a \in I$ をとろう．このとき，勝手な $x \in I$ に対して，$a$ と $x$ の間の一点 $\xi$ が存在して以下が成り立つ：

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n \tag{1.8}$$

[1]実際にコンピューターが $e^x, \sin x$ などを計算する場合には，上の (1.5) そのものではなく，これを更に効率よくしたものを用いる．しかし，計算の原理は（大体）同じである

なお，(1.8) の 2 つの項に名前をつけて

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \tag{1.9}$$

$$S_n(x) := f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad R_n(x) := \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n \tag{1.10}$$

と書く事もある．$S_n(x)$ をテイラー展開（テイラーの公式）の $n$ 次の主要項，$R_n(x)$ を $n$ 次の剰余項という．

- $a = 0$ とした場合の展開を特にマクローリン（Maclaurin）の公式（展開）ともいう．
- マクローリンの公式とテイラーの公式は非常に近い親戚関係にあり，片方だけわかれば十分だ．理由は以下の通り：$y = x - a$ という変数変換によって，座標 $x$ で見た時の点 $x = a$ は座標 $y$ で見た時の $y = 0$ に移る．従って，座標 $y$ でのマクローリンの公式は座標 $x$ での $x = a$ の周りのテイラーの公式に対応している．
- テイラーの公式でも，平均値の定理でも，$\xi$ は $a$ と $x$（または $b$）の両方に依存しうることを再度強調しておく．同じ理由で，剰余項 $R_n(x)$ は $x, a$ で決まるけども，$R_n(x)$ の $\xi$ そのものが $x, a$ に依存する事をお忘れなく．
- 細かいことであるが，定理 1.3 では $f^{(n)}(x)$ の存在は仮定するが，連続性は仮定しなくても良い．この点で，剰余項が積分形の定理 1.4（後出）より，こちらの方が少しだけ適用範囲はひろい（そのぶん，誤差評価は大抵，劣る —「ある $\xi$ が存在して」とか言われても，どんな $\xi$ かわからなければ細かい評価はできない）．

**定理 1.3 の証明**　（勢いで証明を載せたが，これはあくまで参考であって，わからなくてもまあ，良い．）

$$F(x) := f(x) - \left[ f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right], \qquad G(x) := (x-a)^n \tag{1.11}$$

とおく．$F(x)$ が (1.9) の $R_n(x)$ の表式で書けることを示せばよい．

そのために，コーシーの平均値の定理（定理 1.2）を $F, G$ に適用する事を考えよう．$F(x)$ は $f(x)$ から $(x-a)^k$ の和を引いているだけなので，また $G(x)$ は多項式なので，共に $n$ 階は微分できる．微分を具体的に計算すると

$$F(a) = F'(a) = F''(a) = \ldots = F^{(n-1)}(a) = 0, \qquad F^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \tag{1.12}$$

$$G(a) = G'(a) = G''(a) = \ldots = G^{(n-1)}(a) = 0, \qquad G^{(n)}(a) = n! \tag{1.13}$$

となっている．この事実を用いて，以下のように進む．

（1）定理 1.2 そのもので

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} \tag{1.14}$$

を満たす $\xi_1$ の存在（$\xi_1$ は $a$ と $x$ の間にある）が言える．

（2）上の右辺の量は $F'(a) = G'(a) = 0$ を用いて強引に書き直すと，定理 1.2 が使える．その結果，

$$\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} \tag{1.15}$$

を満たす $\xi_2$ の存在（$\xi_2$ は $a$ と $\xi_1$ の間にある）が言える．

（3）この議論は，$F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0$ である限り，つまり $k \le n-1$ である限りくりかえす事ができて，

$$\frac{F^{(k)}(\xi_k)}{G^{(k)}(\xi_k)} = \frac{F^{(k)}(\xi_k) - F^{(k)}(a)}{G^{(k)}(\xi_k) - G^{(k)}(a)} = \frac{F^{(k+1)}(\xi_{k+1})}{G^{(k+1)}(\xi_{k+1})} \tag{1.16}$$

を満たす $\xi_{k+1}$ の存在（$\xi_{k+1}$ は $a$ と $\xi_k$ の間にある）が，$k \le n-1$ で順次，証明される．

（4）以上をまとめると，

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} \tag{1.17}$$

を満たす $\xi_n$ の存在（$\xi_n$ は $a$ と $x$ の間にある）が，証明された．この両辺を具体的に計算すると

$$\frac{F(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!} \tag{1.18}$$

となっているので，分母を払うと定理が得られる． □

### 1.2.2 テイラーの公式の例

まずは具体例を見てみよう．もう少し「理論的」なことは後で詳しく見る．

- まず，多項式．$f(x) = c_n(x-a)^n + c_{n-1}(x-a)^{n-1} + \ldots + c_1(x-a) + c_0$ は何回でも微分可能であり，既にテイラーの公式の形になっている．念のため，テイラーの公式を用いたら多項式が再現される事を各自で確かめてみよう．
- 指数関数．$f(x) = e^x$ は何回でも微分可能で，高階の導関数もすべて $e^x$ である．従って，特に $a = 0$ としたテイラーの公式から

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + R_n(x), \qquad R_n(x) := \frac{e^\xi}{n!} x^n \tag{1.19}$$

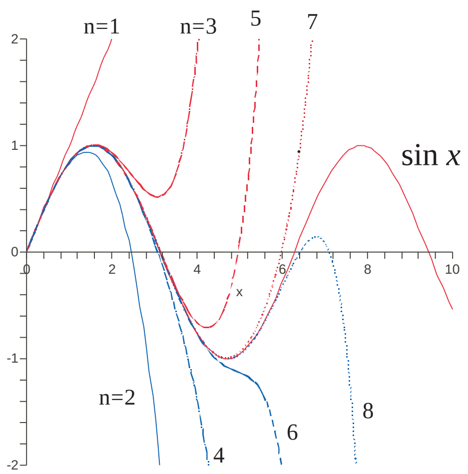
  が得られる（$\xi$ は 0 と $x$ の間の数）．
- 三角関数（$\sin, \cos$）も同様にして展開式を導くことができる．例えば

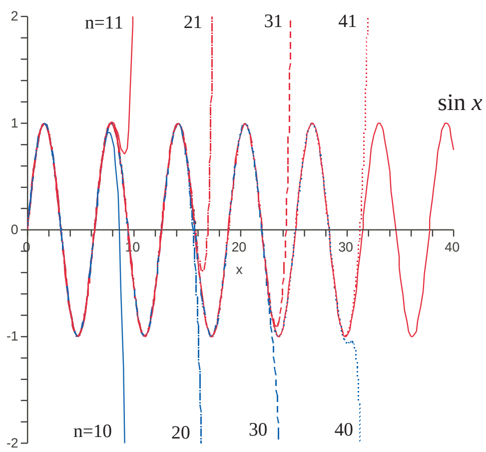
$$\sin x = S_n(x) + R_n(x), \qquad S_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad R_n(x) := \frac{(-1)^n \sin\xi}{(2n)!} x^{2n} \tag{1.20}$$

  がなりたつ．

参考までに $\sin x$ のテイラーの公式の図を載せておく．下の左図は，$n = 1, 2, \ldots, 8$ の $y = S_n(x)$ の様子を，$y = \sin x$ のグラフ（実線）とともに書いたもの．$n$ が奇数のものはいつも正の方に大きくなって視界から消えている．一方，$n$ が偶数のものは負の方に大きくなって視界から消えていく．

右図は $n = 11, 21, 31, 41$ と $n = 10, 20, 30, 40$ の様子を，$y = \sin x$ とともに書いたもの．$n$ が増えるにつれて，近似はどんどん良くなっていくが，ある $x$ から先では急速にダメになって上下に離れてしまう様子が見て取れる．



$\arctan x$ の例．$\tan x$ の逆関数を $\arctan x$ という．この導関数は

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

である（午前中に $\arcsin x$ に対して行ったのと同じような計算をすればよい）．また，$\arctan 0 = 0$ である．従って，導関数は

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\arctan x)'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad (\arctan x)''' = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}, \quad (\arctan x)'''' = -\frac{24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4}, \ldots$$

となって行くので，

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$

と見える．剰余項もちゃんと書くと，例えば $n=7$ では

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{-7\xi^6 + 35\xi^4 - 21\xi^2 + 1}{7(1+\xi^2)^7} \qquad (\xi \text{ は } 0 \text{ と } x \text{ の間の数})$$

が得られる．

さてここで $x = 1$ としてみよう．$\tan$ が 1 になるのは $\pi/4$ のときなので，上の式は

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\frac{-7\xi^6 + 35\xi^4 - 21\xi^2 + 1}{(1+\xi^2)^7} \qquad (\xi \text{ は } 0 \text{ と } 1 \text{ の間の数})$$

となる．最後のの剰余項が $0 \le \xi \le 1$ でどの範囲にあるかはすぐにはわからないが， 微分などしてみると，$-4/7$ と $2/7$ の間にあることはわかる．従って，以上から

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{4}{7} \le \frac{\pi}{4} \le 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{7}$$

が得られる．残念ながら，これはどうしようもないくらい役に立たない評価である（これなら「円周率は 3」の方がマシ）が，もっと「マトモな」評価をレポートでやってもらう事にするので，我慢して下さい．

### 1.2.3 剰余項が積分の形のテイラーの定理

（教科書の 4.5 節；教科書 4 章の前の部分を読んでなくても十分に読める．）

今までのものの他に，テイラーの公式には以下のようなバージョンもある．これは剰余項を積分で書くもので，剰余項の大きさを評価するには楽な事が多い（大体，微分よりは積分の方が評価しやすいのである）．

**定理 1.4 (剰余項が積分形のテイラーの公式，教科書の p.184)** $f(x)$ がある開区間 $I$ で $n$ 階まで微分可能で，導関数がすべて連続と仮定する．この区間 $I$ 内に $a \in I$ をとろう．このとき，勝手な $x \in I$ について，以下が成り立つ：

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \qquad S_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad R_n(x) := \int_a^x \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}\,dy \quad (1.21)$$

（高校のノリでの証明；ただし積分の基礎付けさえすれば，この証明は厳密に正しい）数学的帰納法で証明する．つまり $f(x)$ は $C^N$-級と仮定し，(1.21) をすべての $n \le N$ について証明することを目指す．それで $n$ についての帰納法を用いる．

I. $n=1$ では，$\int_a^x f'(y)dy = f(x) - f(a)$ であるから，$f(a)$ を移行すれば証明できる —— $f^{(0)}(x) := f(x)$ の記号法を思い出せ．

I′. $n=2$ の場合（これは証明には必要ないが，ウォームアップとしてやる）．$n=1$ の

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)dy \qquad (1.22)$$

の第 2 項を，以下のように部分積分するとよい．

$$\int_a^x f'(y)dy = \int_a^x \Bigl\{-\frac{d}{dy}(x-y)\Bigr\} f'(y)dy = \Bigl[-(x-y)f'(y)\Bigr]_a^x + \int_a^x (x-y)f''(y)dy$$
$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-y)f''(y)dy \tag{1.23}$$

II. $n$ まで証明できたとして，$n+1$ をやってみよう（もちろん，$n \le N-1$ と仮定しておく）．$n$ までできたと仮定したので，(1.21) が成り立っているが，最後の項を以下のように考えて部分積分する（分母の $(n-1)!$ は後で考えに入れる）：

$$\int_a^x f^{(n)}(y)(x-y)^{n-1}dy = \int_a^x f^{(n)}(y)\Bigl\{-\frac{1}{n}\frac{d}{dy}(x-y)^n\Bigr\}dy$$
$$= -\frac{1}{n}\Bigl[f^{(n)}(y)\,(x-y)^n\Bigr]_a^x + \frac{1}{n}\int_a^x f^{(n+1)}(y)\,(x-y)^n dy$$
$$= \frac{1}{n}f^{(n)}(a)\,(x-a)^n + \frac{1}{n}\int_a^x f^{(n+1)}(y)\,(x-y)^n dy. \tag{1.24}$$

これを (1.21) の最後の項に用いると（もちろん，分母の $(n-1)!$ を忘れない），(1.21) の $n+1$ のものが証明されてメデタシメデタシ． □

### 1.2.4 テイラー展開（無限項まで）

（教科書の p.154）

定理 1.3 において，公式 (1.9) がすべての $n \ge 1$ で成り立ち，かつ剰余項 $R_n(x)$ が $n \to \infty$ でゼロになるならば，つまり，$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ ならば，

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{1.25}$$

が得られる．

ここのところ，$\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在するのかどうか気になる人がいるかもしれないが，それは以下のように考えれば保証される：(1.9) の左辺は $n$ に依存せず，右辺では $R_n$ がゼロに行く．従って，残りの $S_n$ の $n \to \infty$ 極限が存在して，かつその極限は左辺の $f(x)$ に等しくなければならない．

このように無限級数の形になったものをテイラー展開またはテイラー級数とよび，有限項の「テイラーの公式」と区別する．なお，剰余項 $R_n(x)$ が $n \to \infty$ でゼロになるか否かは展開される関数 $f$ と考えている区間 $I$ に依存するので，個別に考察する必要がある．この問題は個々の例で見て行こう．

- 指数関数．既にテイラーの公式が

$$e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + R_n(x), \qquad R_n(x) := \frac{e^\xi}{n!}x^n \tag{1.26}$$

となることは見た（$\xi$ は 0 と $x$ の間の数）．更に，少しややこしい計算を頑張ってやると，すべての実数 $x$ に対して $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が証明できる．従って，すべての実数 $x$ に対して

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{1.27}$$

が成り立つ．このテイラー級数の形は非常に基本的だから，将来，みることもあるだろう．

- 三角関数（$\sin, \cos$）も同様に，すべての実数 $x$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が証明できる．従って，すべての実数 $x$ に対して

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \text{また同様の考察により} \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{1.28}$$

が成り立つことがわかる．このテイラー級数の形も大事である[2]．

- $\pi/4$ に対しても $\arctan x$ の展開から

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \tag{1.29}$$

が成り立つ事がわかる．

### 1.2.5 テイラー展開の効用

テイラーの公式とテイラー級数の効用については既に述べたが，重要なのでもう一度繰り返す．

1. テイラーの公式では，剰余項以外は単なる級数（$(x-a)^n$ の和）で，四則演算で計算できる．剰余項を何らかの工夫で押さえれば，問題の 関数の値の近似値を計算 できる．その例をレポート問題に与えたので，やってみてほしい．
2. テイラー展開（無限級数の形）が成立するならば，テイラー展開によって 関数を定義する のだと考え直すこともできる．そうすれば，その級数をより広い $x$ に拡張して適用することにより，関数の定義域を一気に拡げることも可能である．これは特に,「いままで実数だと思ってきた $x$ を複素数に拡張する」場合に非常に有効である．この一つの例（オイラーの公式）を下に示した．

**少し進んだ話題．**

２番目の効用の例として（多分，どこかで見ただろう）オイラー（Euler）の公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R} \tag{1.30}$$

を挙げておこう．指数関数のテイラー展開において，$x = i\theta$ とおいてしまおう（このようにおいてもテイラー展開が収束することは少し進んだ数学で確かめられる）．つまり,「複素数に対する指数関数」をテイラー展開を用いて定義するのである．すると，

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{x^{2\ell}}{(2\ell)!} + i \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^\ell \frac{x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \tag{1.31}$$

が得られる（２番目の等号は，単に $k$ が偶数の場合と奇数の場合をわけて，$i^k$ を計算しただけ）．ところがこの最右辺は $\cos\theta + i \sin\theta$ のテイラー展開に他ならない．従って，指数関数や三角関数はそのテイラー展開の式で定義し直すのだと思えば，オイラーの公式が証明されたことになる．テイラー展開によって関数を定義し直すというのは一見，奇妙に思えるかもしれないが，同値な命題がある場合にどれを仮定（公理）にしてどれを結論とするか，の一例と思えば良い．ただし，本当に定義し直す立場をとった場合は今まで知っていたはずの関数の性質（例：$\sin, \cos$ は周期 $2\pi$ である，指数関数は $e^{a+b} = e^a e^b$ を満たす，等々）はすべて忘れて，テイラー展開だけからこれらを導き直す必要はある．

[2] このような公式は無理に丸暗記してもダメだ．自分で導出したり，実際に使ってみるうちに自然に覚えるようになるのが望ましい

## 第１回レポート問題（テイラー展開）：

**問１：** 次の $x$ の関数に対してテイラーの公式（定理 1.3 において $a = 0$ としたもの）を具体的に書き下し，最初のゼロでない３項を求めよ．この問題では剰余項は気にせず，主要項のみ答えればよい．

$$(a) \quad f(x) = \frac{1}{2-3x} \qquad (b) \quad g(x) = \sqrt{1+x} \qquad (c) \quad h(x) = \log(1+x^2)$$

**問２：** $\sin x$ の逆関数は $\arcsin x$ であることは説明した．また，$(\arcsin x)' = (1-x^2)^{-1/2}$ であることも説明した．これを基にして以下の問いに答えよ．４則演算には電卓などを用いてもよい．また，以下では $n = 7$ の場合をやるように要求しているが，これが余りに大変だと思う人は $n = 5$ の場合をやっても良いものとする．

(1) $\arcsin x$ に対するテイラーの公式（定理 1.3）を，$a = 0, n = 7$ の場合に具体的に書き下せ．

(2) 特に上で $x = 1/2$ とした場合の式から得られる $\pi/6$ に対する表式を書け．

(3) その際の $S_n, R_n$（今は $n = 7$）の大きさを評価して，$\pi/6$ の近似値（$\pi/6$ の存在しうる範囲）を求めよ．

(4) 以上から得られる $\pi$ の近似値は何か？

(5*) 余力のある人は，$n$ がもっと大きい場合もやってみよう．

## レポート提出方法： 上の問に解答し，

12 月 20 日（水）午後５時までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙は A4 を使ってください．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

１２月２２日：今日はテイラー展開の続きと「積分」です.

## 第２回レポート問題：どのくらい進めるか自信がないので，問題は少なめです…

**問 3：**（テイラー展開 again）前回はマトモに計算して残念だった人も多かったようなので，もう一問だけ（効率の良い方法でやってみよう）．$f(x) = (1+x^3)^{1/3} - (1-x^3)^{1/3}$ に対してテイラーの公式（定理 1.3 において $a = 0$ としたもの）を具体的に書き下し，最初のゼロでない３項を求めよ．この問題では剰余項は気にせず，主要項のみ答えればよい.

**問 4：**（区分求積法）以下の定積分を「区分求積法」で求めてみよう（$a$ は正の定数）．分割は等分割としてよい．(b) はそれなりに難しいから，チャレンジ問題のようなものである（できなくても仕方ない）が，三角関数の「積を和に直す公式」「和を積に直す公式」などを使うとできたりする.

$$(a) \quad \int_0^a x^2\,dx \qquad (b) \quad \int_0^a \sin x\,dx$$

どちらも積分の値は知ってるはずのものだが，それを区分求積で求めてもらうのが狙い.

**番外** * （テイラー展開に関するチャレンジ問題；かなり大変なので，本当に興味のある人だけで良い）

（問題の趣旨）今まで高校で習った $\sin, \cos$ の定義や性質はいったん忘れ，$\sin x$ と $\cos x$ をそのテイラー級数で定義した場合，我々の知っている $\sin, \cos$ と同じになるかどうかを考える問題です．何をもって「同じ」というかはなかなか難しいのですが，一見異なる性質のものがどうも同じらしい，と実感してもらえれば良いですね．我こそはと思う者は，是非，チャレンジしてほしいが，レポート問題というより，講義ノートの補足みたいなもんだ.

- まず，関数 $S(x)$ と $C(x)$ を
$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad C(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,x^{2n}}{(2n)!}$$
と定義する．右辺の意味はもちろん，$S(x)$ なら $a_N := \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n\,x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ という数列を考え，その $N \to \infty$ の極限を $S(x)$ と定義する，ということ．先走っていうと，$S(x)$ は $\sin x$，$C(x)$ は $\cos x$ になるはずのものである.
- （本来は「仮定」でなく「証明」すべきだが，このクラスでは仮定する）この級数はすべての実数 $x$ で収束していることを仮定する.
- このように定義したものが $S'(x)' = C(x), C'(x) = -S(x)$ をみたすこと（$'$ は $x$ での微分）を示せ．この場合，$\sin, \cos$ ともに無限級数で定義されているから，級数の無限和と $x$ による微分の順序交換ができるかどうかが問題だ．問題だけど，ここも順序交換が可能だと思ってやってよい.
- $\{S(x)\}^2 + \{C(x)\}^2 = 1$ を示せ.
- $\sin, \cos$ の加法定理に相当するものが成り立つことを示せ．例えば，$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$ などということである.（無限級数の積を考える必要があるから，本来は極限の取り方などに注意して厳密に議論すべきだが，大体でよい.）
- $S(\alpha) = 0, C(\beta) = 0$ となるようなゼロでない $\alpha, \beta$ が存在することを何とかして示せ．$S(x), C(x)$ の満たす不等式を作ってみるのが良いかもしれない.
- $S(x), C(x)$ が周期関数であることを導け．つまり，正の数 $\alpha$ があって，$S(x+\alpha) = S(x)$, $C(x+\alpha) = C(x)$ がすべての $x$ について成り立つことを示せ.
- 上の $\alpha, \beta$ と，円周率 $\pi$ の関係をつけよう．$\pi$ の定義としては「半径 1 の円の円周の長さが $2\pi$」とする．これまで考えてきた $S(x), C(x)$ からその円周の長さを計算することで，$\pi$ との関係をつけよ.

- その他，わかることがあったら何でもやってみて，上の $S(x), C(x)$ と皆さんの知っているはずの $\sin x, \cos x$ が「同じ」である状況証拠を積み重ねてみよう．あと，どのようなことを言えば，本当に「同じ」だといえるだろうか？そもそも，皆さんの知っているはずの $\sin x, \cos x$ の定義は何だったんだろう？

上に書いたものはこの順序でやる必要はない．また，上のはあくまで一つのアプローチであって，これにとらわれる必要もない．ともかく上で定義した級数 $S(x), C(x)$ と皆さんの知っているはずの $\sin x, \cos x$ との関係をいろいろとつけてくれれば良い．

**本当の番外問題：**講義が分かりにくかったところ，改善の要望などあれば，自由に書いて下さい．

## レポート提出について： 上の問に解答し，

1 月 10 日（水）の午後５時までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

重要：レポートは友達と相談した結果を書いても良い．ただし，誰と相談したかは明記すること．（「俺は人に教えてやっただけで人からは全く教わってない」と思う人は書かなくても良いが．）相談した人の名前を書かせるのは，それで点数を左右するのが目的ではない．「お世話になった文献，人にはきちんと感謝する」という，科学上の最低ルールを守ってもらうためである．

———————————先週のレポートの解答 ———————————

**問１：** ともかくやるのみ．ただし，$h(x)$ についてはちょっと良いやり方がある．まともにやると大変なので，ちょっと可哀相だったかもしれない．

(a) これは等比級数だから，答えは高校の時から知ってるはず．だけどともかくやってみると，

$$f(x) = \frac{1}{2-3x}, \quad f'(x) = \frac{3}{(2-3x)^2}, \quad f''(x) = \frac{3\times 2\times 3}{(2-3x)^3},$$

なので，

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad f'(0) = \frac{3}{4}, \quad f''(0) = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

である．従ってテイラーの公式から

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}x^2 + \dots$$

であって，始めの３項は上に示した通り．実際これは

$$f(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-3x/2} = \frac{1}{2}\times\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(\frac{3x}{2}\Bigr)^n$$

の最初の３項に（もちろん）一致してる．

(b)

$$g(x) = (1+x)^{1/2}, \quad g'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad g''(x) = \frac{-1}{4}(1+x)^{-3/2}$$

なので

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = \frac{1}{2}, \quad g''(0) = \frac{-1}{4}$$

となり，

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

**注意**

- (a), (b) ともに微分の間違いが多かった（特に，符号を間違った人）．注意されたし．
- （以下の問題にも共通）テイラーの公式の分母にある $n!$ を忘れない事！たくさんの人が忘れてたぞ．

(c) （方法１）これはマトモにやると大変．でもまあやってみると，

$$h'(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad h''(x) = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad h^{(3)}(x) = 4\frac{x^3-3x}{(1+x^2)^3}, \quad h^{(4)}(x) = 12\frac{-1+6x^2-x^4}{(1+x^2)^4},$$

$$h^{(5)}(x) = 48\frac{5x-10x^3+x^5}{(1+x^2)^5}, \quad h^{(6)}(x) = 240\frac{1-15x^2+15x^4-x^6}{(1+x^2)^6}$$

従って，

$$h(0)=0, \quad h'(0)=h^{(3)}(0)=h^{(5)}(0)=0, \quad h''(0)=1, \quad h^{(4)}(0)=-12, \quad h^{(6)}(0)=240$$

である．よって，

$$h(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + \dots$$

となる．

（方法２）$x^2 = t$ とおいてみると，$h(x) = \log(1+t)$ である．$\log(1+t)$ なら簡単に $t$ で微分して

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots$$

となる．ので，ここに $t = x^2$ を入れればよい．

**問 2：** じつはこれもなかなか大変なのだった．問 1 と併せてやるのは時間的に大変だったかもしれない．今から思えば，冬休みの宿題にすべきでした．すみません．

(1) $f(x) = \arcsin(x)$ とおくと，

$$f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}, \quad f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{5/2}}, \quad f^{(4)}(x) = 3\frac{2x^3+3x}{(1-x^2)^{7/2}},$$

$$f^{(5)}(x) = 3\frac{8x^4+24x^2+3}{(1-x^2)^{9/2}}, \quad f^{(6)}(x) = 15\frac{8x^5+40x^3+15x}{(1-x^2)^{11/2}}, \quad f^{(7)}(x) = 45\frac{16x^6+120x^4+90x^2+5}{(1-x^2)^{13/2}}$$

であるので，テイラーの公式は（$\arcsin 0 = 0$ なので）

$$\arcsin(x) = S_7 + R_7, \qquad S_7 = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40}, \qquad R_7 = \frac{1}{112}\frac{16\xi^6+120\xi^4+90\xi^2+5}{(1-\xi^2)^{13/2}}x^7$$

となる（$\xi$ は 0 と $x$ の間の数）．また，積分で剰余項を表すと，$S_7$ は上のままで

$$R_{7,\,積分} = \frac{1}{16}\int_0^x (x-y)^6\,\frac{16y^6+120y^4+90y^2+5}{(1-y^2)^{13/2}}\,dy$$

とも書ける．

なお，$n=5$ としてやった人のために書いておくと，

$$\arcsin(x) = S_5 + R_5, \qquad S_5 = x + \frac{x^3}{6}, \qquad R_5 = \frac{1}{40}\frac{8\xi^4+24\xi^2+3}{(1-\xi^2)^{9/2}}x^5$$

注意：剰余項を書かなかった人が非常に多かった（でも次の (2) などでは剰余項が復活．多分．わかってるのでしょうけど，数式は正確に書くようにしましょう．

(2) $\arcsin(1/2) = \pi/6$ なので，

$$\frac{\pi}{6} = S_7 + R_7, \qquad S_7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280}, \qquad R_7 = \frac{1}{112 \times 128} \frac{16\xi^6 + 120\xi^4 + 90\xi^2 + 5}{(1-\xi^2)^{13/2}}$$

となる（ここで $\xi$ は 0 と 1/2 の間の数）．$n = 5$ なら

$$\frac{\pi}{6} = S_5 + R_5, \qquad S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{48}, \qquad R_5 = \frac{1}{40 \times 32} \frac{8\xi^4 + 24\xi^2 + 3}{(1-\xi^2)^{9/2}}$$

(3) $S_7$ の方は簡単で $S_7 = 2009/3840 = 0.52317708333...$ ですわな．問題は $R_7$ なんやけど，これは $\xi$ の増加関数だ（なぜなら，分母は $\xi$ の減少関数，分子は $\xi$ の増加関数）．従って，$R_7$ はその $\xi = 0$ の値よりも大きく，その $\xi = 1/2$ の値よりも小さい．従って，

$$\frac{5}{112 \times 128} < R_7 < \frac{1}{112 \times 128} \frac{16 \times 2^{-6} + 120 \times 2^{-4} + 90 \times 2^{-2} + 5}{(3/4)^{13/2}} = \frac{47\sqrt{3}}{5103}$$

これから，

$$0.52352585565476 < \frac{112579}{215040} < \frac{\pi}{6} < \frac{2009}{3840} + \frac{47\sqrt{3}}{5103} < 0.53912973628$$

$n = 5$ でやった人なら，同様に議論して

$$0.5231770833 < \frac{2009}{3840} < \frac{\pi}{6} < \frac{25}{48} + \frac{19\sqrt{3}}{1215} < 0.54791890152$$

(4) 上の結果を 6 倍して

$$3.14115513392857 < \frac{112579}{35840} < \pi < \frac{2009}{640} + \frac{94\sqrt{3}}{1701} < 3.23477841765$$

を得る．あまり良い近似ではない — 特に $\pi$ を上から押さえるのが良くない — けども，まあ仕方ないです．

$n = 5$ なら

$$3.139062500 < \frac{2009}{640} < \pi < \frac{25}{8} + \frac{38\sqrt{3}}{405} < 3.2875134092$$

(5*) 以上と同じ事をいろいろな $n$ についてコンピューターで計算させた結果を以下に載せる．ただし，比較し易いように $\pi/6$ ではなく $\pi$ に対する $6S_n$ と $6(S_n + R_n)$ を書いた（２列目と３列目）．どうも $R_n$ が大きいため，損をしているような感じだが，このくらいの粗っぽいやりかたではここまでしか行ってくれない．

これは要するに $x = 1/2$ のところを用いたから損した訳だ．この点を改善するため，$\pi/12$ を出すつもりで，$x = \sin(\pi/12) = (\sqrt{3}-1)/(2\sqrt{2}) = 0.258819045102520762...$ を用いて同様の計算をするとかなりマシであって，下の表の４列目と５列目になる．ちなみに，$\pi$ の値は始めの 30 桁が 3.14159265358979323846264338328 である（最後は四捨五入）．$\pi/12$ を使った結果はなかなか良いけども，$x$ の値がややこしい小数だから，筆算でやるにはなかなか大変であることには注意しておくべきだろう．

| $n$ の値 | $6S_n$ の値（$\pi/6$） | $6(S_n + R_n)$ の上界 | $12S_n$ の値（$\pi/12$） | $12(S_n + R_n)$ の上界 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3.125 | 3.3849002 | 3.14050371829 | 3.15259162280 |
| 5 | 3.3190625 | 3.28751341 | 3.14154897668 | 3.14271407621 |
| 7 | 3.1411551339 | 3.23477841765 | 3.14159065467 | 3.14170036121 |
| 9 | 3.1415111723 | 3.20609713952 | 3.14159255471 | 3.14160295152 |
| 11 | 3.1415767157 | 3.18925903931 | 3.14159264844 | 3.14159365023 |
| 13 | 3.1415894253 | 3.17857519207 | 3.14159265331 | 3.14159275175 |
| 15 | 3.1415919823 | 3.17134323091 | 3.14159265357 | 3.14159266344 |

以下，レジュメの続き

# 2 積分について少しだけ

## 2.1 積分の定義（区分求積法）

高校での積分の「定義」は「微分の逆演算」というやつだった．つまり,「微分したら関数 $f(x)$ になる」ような関数を $f$ の原始関数と呼び，$F(x) = \int f(x)dx$ などと書いたのだった．

しかし，これでは与えられた $f(x)$ に対して $F'(x) = f(x)$ となるような $F(x)$ が見つからない限り，積分が定義できない事になる．世の中には不定積分が（初等関数で）書き下せない関数はいくらでもあるから，これは困る．

というわけで，積分の正しい定義を与えよう．(概要は高校の時に聞いた人も多いかもしれないが，簡単に.）

$f(x) \geq 0$ なら，積分 $\int_a^b f(x)dx$ とは，要するに $y = f(x)$ のグラフと $x$-軸との間の面積だ．また，$f(x) < 0$ ならその面積にマイナスをつけたものを積分としたい．問題は我々の知ってる「面積」の定義そのものがかなりアヤフヤであることだ．

我々が面積を知ってる図形：三角形，四角形，五角形（一般に多角形），これだけ．円の面積すら，本当はまだ，わからない．(極限操作がどうしても必要になる；極限操作がいらなければ，円周率 $\pi$ があんな変な数にはならない）．

そこで，グラフの下の面積を計算するには，それを小さな長方形の集まりで近似しておいて，極限を考える事にする．これが「区分求積法」である．具体的には以下のようにする：

区間 $[a, b]$ を $n$ 個の小区間に分けるように $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ となる分点 $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ をとる（記号を簡単にするため，$(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ をまとめて $\vec{x}$ とかく）．更に，それぞれの $1 \leq k \leq n$ に対して，$x_{k-1} \leq \zeta_k \leq x_k$ となるような $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ をとる（$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ をまとめて $\vec{\zeta}$ と書く）．そして「リーマン和」

$$S_n(\vec{x}; \vec{\zeta}) := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(\zeta_k) \tag{2.1}$$

という和を考えて，$n \to \infty$ でのこの和の極限に注目する．

ただし，この場合，区間の幅がゼロにならないと面積の良い近似にはならないだろうと思われるから，$\Delta := \max_k (x_k - x_{k-1})$ がゼロに行くような極限を考える．もしもこの極限が，<u>どのような分割 $\vec{x}$</u>，<u>どのような分点 $\vec{\zeta}$</u> でも <u>共通の値に収束</u> するならば，その値を $\int_a^b f(x)dx$ と定義するのである．各人，自分で絵を描いてイメージをつかんでおこう．

特に区間を $n$ 等分し，$\zeta_k = z_k$ ととった場合には

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{“}=\text{''} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \tag{2.2}$$

となる．

# 3 偏微分

これから残りの時間で「偏微分」を簡単にやります．これは将来，どこかで見る可能性が高いから，頑張ってやりましょう．主な話題は（順不同）

- 偏微分の定義
- 高階の偏微分；偏微分は順序によらない
- 極大極小問題
- 連鎖律（合成関数の微分）

で，特に後半の２つは１変数関数とはかなり違うものです．

## 3.1 多変数の関数

偏微分が出てくるのは,「多変数の関数」に関してである．今まで皆さんが知っていたのは主に「１変数」の関数だった．これは「変数」が一つだけで，それを決めたら関数の値が変わるようなの．例えば

$$x^2 \qquad \sin x \qquad \frac{x^2+\cos(x^3)}{\sqrt{1+x^2}} \tag{3.1}$$

など．でも世の中には２つ以上の変数に依存する関数はいくらでもある．$n$ 個の変数に依存するのを「$n$ 変数の関数」という．例えば（変数を $x, y, z$ などと書いて）

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \qquad g(x,y)=x^2\cos y \qquad h(x,y,z)=\frac{x+z^3}{y^2+1} \tag{3.2}$$

など．

こういうと仰々しいけど，そんなに難しい話ではない．上の $f(x,y)$ なら「直角を挟む２辺の長さが $x, y$ の時の斜辺の長さ」を表しているわけで，このような例は数学でも，日常生活でも直感的には扱ったことがあるはず．

ということで難しく考える必要は全くないのだが，一つだけ注意：多変数関数のグラフはちょっと大変．例えば２変数の関数 $f(x,y)$ なら，変数は $x, y$ の２つあるから，こいつは平面（の一部）を動く．平面上の各点 $(x,y)$ に対して関数の値 $f(x,y)$ が決まるので，このグラフは２次元では描けず，第３の軸（$z$ 軸）をとって $z=f(x,y)$ を $xyz$ の３次元空間で図にしなければならない.（$f$ の性質が良ければ，結果はこの３次元空間での曲面になる.）以下では主に２変数の関数を扱うが，いつもこのような立体的なグラフのイメージを持つことにしよう．

（多変数関数の極限）

多変数関数の極限について：変数が２個以上ある場合，極限の取り方には注意が必要だ．つまり，$(x,y)$ が $(a,b)$ に近づく，といっても，その近づき方にはいろいろな方向がありうる．つまり，(1) $y=b$ として，$x$-軸に平行に近づくのか，(2) $x=a$ として $y$-軸に平行に近づくのか，(3) 斜めに近づくのか，(4) 螺旋を描くように近づくのか... といくらでも可能性がある．

そこで，上のようなどのような近づき方をしても行き先が同じ数である場合，かつそのときに限り,（行き先の数を $A$ と書いて）

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=A \tag{3.3}$$

と書く．

## 3.2 偏微分の定義

定義は簡単：２変数の関数 $f(x,y)$ の点 $(a,b)$ での $x$ 方向の偏微分係数とは，極限

$$f_x(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \tag{3.4}$$

のことである．また，点 $(a,b)$ での $y$ 方向の偏微分係数とは，極限

$$f_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h} \tag{3.5}$$

のことである．$f_x$ を求めることを「$x$ で偏微分する」，$f_y$ を求めることを「$y$ で偏微分する」という．上の定義はもちろん，１変数の微分の定義

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{3.6}$$

と対比すべきものである．

また，$f_x(a,b)$ を $a,b$ ２変数の関数と見たものを $f$ の $x$ 方向の偏導関数，$f_y(a,b)$ を $a,b$ ２変数の関数と見たものを $f$ の $y$ 方向の偏導関数という.（１変数の場合も，$x$ の関数と見た $f'(x)$ を $f$ の導関数と言ったことを思い出そう.）

要するに，$x$ で偏微分とは，$x$ だけの関数（$y$ は定数）と思って $x$ で普通に（１変数関数のように）微分すれば良い．$y$ での偏微分も同様である．

（例）

$$f(x,y) = x^2+y^2 \quad \text{ならば} \quad f_x(x,y) = 2x, \quad f_y(x,y) = 2y \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) = x^3\sin(x+y^2) \quad \text{ならば} \quad & f_x(x,y) = 3x^2\sin(x+y^2) + x^3\cos(x+y^2), \\ & f_y(x,y) = x^3\cos(x+y^2)2y = 2x^3y\cos(x+y^2) \end{aligned} \tag{3.8}$$

（注）$x$ で偏微分する時には $y$ は定数と思って良いけども，これはあくまで「$x$ で偏微分するとき」の話である．偏微分した後，また $y$ にいろいろな値を代入したりすることもあるから，$y$ も変数としての意味付けを失った訳ではない.（これは次の「高階の偏微分」をやるときにちょっと注意.）

（用語）$f(x,y)$ の $x$ と $y$ に関する偏導関数が両方存在して，かつ，両方の偏導関数が $x,y$ の連続関数であるとき，$f$ は $C^1$-級という．

## 3.3 高階の偏微分

さて，上で偏導関数 $f_x(x,y)$ が求まったら，これを $(x,y)$ の２変数関数だと思って，更に $x$ や $y$ で偏微分できる．これが２階の偏導関数で，

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}f_x(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \qquad f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}f_x(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) \tag{3.9}$$

である（添字の順序と微分の順序に注意）．このとき，$y$ を定数と思って $x$ で微分したのに、今度は $y$ で微分するのか？と思った人は前節の注意を読みましょう．

$f_y(x,y)$ の方も同様に $x$ や $y$ で偏微分できるので，２階の偏導関数は $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ の４通りが出てくることになる．同様に，３階，４階，$n$ 階の偏導関数も定義できる．$n$ 階なら $2^n$ 個あることになる．

（用語）$f(x,y)$ の $x$ と $y$ に関する $n$ 階までの偏導関数がすべて存在して，かつ，それらがすべて $x,y$ の連続関数であるとき，$f$ は $C^n$-級という．

（重要な性質）$C^n$-級の関数については，$n$ 階までの偏導関数はその偏微分の順序によらない．つまり，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y) \tag{3.11}$$

などがなりたつ．

１月１２日：今日は２変数関数の極値問題です．来週はセンター試験準備で休みらしい．
偏微分が皆さんの持っている教科書には載っていないので，参考になるもの（皆さんの教科書の続編の一部）を配りたいと思います．残念ながら，この講義には間にあわなかったのですが，来週の月曜までにはコピーを作成して，僕の部屋の前の棚（のどこかの段）においておきます．他の講義に来た時にでも拾って行って下さい．

成績に関するレポートの扱いについて：一人の人から「自分は一生懸命やったのに計算間違いでレポートの点が悪かった．他人のレポートを丸写しした人が自分よりいい点がつくのは許せない」（ほぼ原文のママ）という，非常に強い意見を頂きました．同様に感じている人は他にも居る可能性があるので，ここで僕の見解を述べておきます．

- まず，そのような気持ちは非常に良く理解できる，と申し上げましょう．僕自身，人に写させてあげる側だったから，気持ちは良くわかります．
- ただ,「レポート」という形態をとる以上,「丸写し」する人が出るのはある程度は避けられません.「丸写し」はできるだけやめて欲しいと思って「お世話になった人の名前を書くように」とは言っており，かなりの人が書いてくれてます.（中には「○○君と協力して — というより，丸写しさせてもらって — やりました」と非常に正直な人もいます.）しかし，中には丸写しながら書かない人もいるかもしれません．
- こちらとしては，努力をすれば，かなりの程度までは「同じ系統に属するレポート」を特定することは可能です．ただ,「同じ系統」のレポートの源泉はどれなのか，を特定するのはかなり困難です．僕自身は人のレポートを写したことはほとんどありませんが，当時の僕なら，写させてもらった人よりうまく書けただろうとも思います（別に自慢してる訳ではありません． ２番煎じの方が格好よく見える，というのは世の中でよくあることです）．
- 更に，皆さんのレポートの中には「○○さん，××さんと一緒にやりました」というのも多々あり，その中には本当に３人で一生懸命考えたんだろうと思わせるものもあります．このように一緒に勉強することは，是非，推奨したいことであって，変な規定を設けてこれをやりにくくしたくはありません.（なぜなら，大学の講義の一番の目的は皆さんに当該科目の内容を習得して頂くことであって，成績評価などはその結果として出てくるべきものだから.）
- という訳で，レポートの最終成績への反映は以下のようにしたいと考えています．大筋は前回に言った通りですが，明文化した方が良いと思ったので書きました．
  - レポートの成績は最終成績にはあまり（ほとんど）反映されない．より正確には
  - 合格ギリギリの辺りの人には，レポートの成績もかなり効くかもしれない．
  - 一方，A か B かの判定などには，レポートの点はほとんど効かないだろう．つまり，期末試験の結果がほとんどである．これは上に述べたように，丸写ししたのとそうでないのの区別がなかなか難しいからである．
  - ただし，特に優秀と思われるレポートに関してはこの限りではない．今回なら，問 4(b) ができている人がいれば，そのような特別扱いになった可能性がある．
- なお，このように成績判断をするなら「何のためにレポートを出させているんだ？」という疑問を持つ人もあるでしょう．それに対しては「レポートの点は直接最終成績には結びつきにくいが，レポートをやることで期末試験の点が結果として良くなる可能性も大きい」とお答えしたいと思います．もちろん，皆さんが自発的に問題をやってくれるのなら，レポートとして提出してもらう必要は本来，ありません．しかし，長年の経験から,「やっときなさい」ではやらない人も多いことを僕は知っています．そこでそのような人にもやる気を出してもらう意味で，レポートという形態をとっています．

## 第３回レポート問題：極値問題の練習です．今回はみんなできると思うよ．

**問５：** $x, y$ がすべての実数値をとるとき，以下の関数の極大点，極小点とそこでの関数の値を求めよ．

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy, \qquad g(x,y) = (x^2 - y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}, \qquad h(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

**番外問題：**講義が分かりにくかったところ，改善の要望などあれば，自由に書いて下さい．

## レポート提出について： 上の問に解答し，

1 月 24 日（水）の午後５時までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

重要：レポートは友達と相談した結果を書いても良い．ただし，誰と相談したかは明記すること．(「俺は人に教えてやっただけで人からは全く教わってない」と思う人は書かなくても良いが.) 相談した人の名前を書かせるのは，それで点数を左右するのが目的ではない.「お世話になった文献，人にはきちんと感謝する」という，科学上の最低ルールを守ってもらうためである．

先週のレポートの解答

**問３：** 敗者復活戦なので，簡単に．$x^3 = t$ とおくと，$f(x) = g(t) = (1+t)^{1/3} - (1-t)^{1/3}$ となっている．$g(t)$ のテイラー展開を求めて，$t = x^3$ とおけば良い．微分してみると

$$g'(t) = \frac{1}{3}\big\{(1+t)^{-2/3} + (1-t)^{-2/3}\big\}, \qquad g''(t) = -\frac{2}{9}\big\{(1+t)^{-5/3} - (1-t)^{-5/3}\big\},$$
$$g'''(t) = \frac{10}{27}\big\{(1+t)^{-8/3} + (1-t)^{-8/3}\big\}, \qquad g^{(4)}(t) = -\frac{80}{81}\big\{(1+t)^{-11/3} - (1-t)^{-11/3}\big\},$$
$$g^{(5)}(t) = \frac{880}{243}\big\{(1+t)^{-14/3} + (1-t)^{-14/3}\big\},$$

なので，

$$g(0) = g''(0) = g^{(4)}(0) = 0, \qquad g'(0) = \frac{2}{3}, \qquad g^{(3)}(0) = \frac{20}{27}, \qquad g^{(5)}(0) = \frac{1760}{243}$$

従って剰余項をちゃんと書かないなら，

$$g(t) = \frac{2}{3}t + \frac{10}{81}t^3 + \frac{44}{729}t^5 + \dots$$

を得る．$t = x^3$ だったので元に戻して，答えは

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{10}{81}x^9 + \frac{44}{729}x^{15} + \dots$$

**問４：** ともかくやってみるだけですが，(b) は予告した通り，工夫が必要です．

(a) 区間 $[0, a]$ を $n$ 等分してみると，分点の位置は $x_j = aj/n$（$j = 0, 1, 2, \dots, n$）になる．そこでリーマン和は

$$S(f; \vec{x}, \vec{\zeta}) = \frac{a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)$$

である（$x_{j-1} \le \zeta_j \le z_j$）．さて，今考えている関数は単調増加なので，

$$f(x_{j-1}) \le f(\zeta_j) \le f(x_j)$$

がなりたっている．つまり，リーマン和に対して

$$\frac{a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}) \le S(f; \vec{x}, \vec{\zeta}) \le \frac{a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

が成立する．右と左の和を計算すると

$$\frac{a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1}) = \frac{a^3}{n^3}\sum_{j=1}^{n}(j-1)^3 = \frac{a^3}{n^3}\sum_{j=0}^{n-1} j^3 = \frac{a^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\frac{a}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \frac{a^3}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{a^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

となっていて，これらは共に $n \to \infty$ で $a^3/3$ に収束する．従って $S(f;\vec{x},\vec{\zeta})$ も $a^3/3$ に収束する．

(b) この問題については一般の $\zeta_j$ でやるのは大変なので，$\zeta_j = x_j$ とした場合のみを考える（一般の $\zeta_j$ でやりたい場合は $\sin x$ が単調増加な区間，単調減少な区間，と分けて (a) と同じように不等式で押さえるとできる）．リーマン和は

$$S(f;\vec{x}) = \frac{a}{n}\sum_{j=1}^{n}\sin\Bigl(\frac{aj}{n}\Bigr)$$

であって，問題はこの和をどのようにとるかということである．ちょっと見ただけではできそうにない．

でも，我々は高校で「積分」をやったわけで，この積分の答がどうなるかは知ってはいる．だからちょっとずるいけど，その知識から逆算してみるのはどうだろうか？要するにこのリーマン和が cos の差になればいいわけだ．このままだとなかなかそれが見えにくいとは思うのだが，キーは $a/n$ を $2\sin(a/2n)$ と読み替えることにある（もちろん，厳密にこの２つは等しくないので，補正もちゃんと考える）．つまり，

$$S(f;\vec{x}) = \frac{\frac{a}{n}}{2\sin\Bigl(\frac{a}{2n}\Bigr)}\sum_{j=1}^{n} 2\sin\Bigl(\frac{a}{2n}\Bigr)\,\sin\Bigl(\frac{aj}{n}\Bigr) = \frac{\frac{a}{n}}{2\sin\Bigl(\frac{a}{2n}\Bigr)}\sum_{j=1}^{n}\Bigl[\cos\Bigl(\frac{a(2j-1)}{2n}\Bigr) - \cos\Bigl(\frac{a(2j+1)}{2n}\Bigr)\Bigr]$$

とするのだ（２番目の等号は「差を積に直す公式」からだした．または右辺から左辺にいくつもりなら，単なる加法定理だ）．最後の和の中身は $j$ がひとつずれるとキャンセルしてくれるし，前の分数は $n \to \infty$ で 1 にいく．結果として

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f;\vec{x}) = \lim_{n\to\infty}\Bigl[\cos\Bigl(\frac{a}{2n}\Bigr) - \cos\Bigl(\frac{a(2n+1)}{2n}\Bigr)\Bigr] = 1 - \cos a$$

となって皆さんの知ってる結果になる．

正直，これに気がつくのは大変だろうと思う（僕自身，このやり方に気づいた時はかなり嬉しかった）．けども，できなくても考えてみて欲しいと思って出しました．

———————————————以下，レジュメの続き ———————————————

## 3.4 ２変数関数のテイラー展開

今日のメインテーマは「極大極小問題」だが，それを理解するため，１変数の「テイラーの定理」「テイラー展開」を２変数に拡張する．(以下の議論は３変数以上でも大体同じだが，講義では２変数に限る.)

２変数の関数 $f(x,y)$ に対して，

$$g(t) = f(a+th, b+tk) - f(a,b) \tag{3.12}$$

を考える．この $g(t)$ は１変数 $t$ の関数なんだから，$t$ についてのテイラーの公式やテイラー展開を考えられる．もし $g(t)$ が $C^n$-級だとすると，

$$f(a+h, b+k) = g(1) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(n)}(\theta)}{n!} \qquad (0<\theta<1) \tag{3.13}$$

が成立する．さらに右辺の導関数がいつ存在してそれは何なのか，については，連鎖律（最終回にやります）が答えてくれる．つまり，一回の微分ごとに（$x(t) = a+th, y(t) = b+tk$ のつもりで）

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial y} = h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.14}$$

であるから，例えば，$f$ が $C^2$-級ならば

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\theta) &= \frac{d}{dt}\frac{dg}{dt} = \Bigl(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\Bigr)\Bigl(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\Bigr) \\ &= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+kh\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned} \tag{3.15}$$

と計算できる（偏微分はすべて $(a+\theta h, b+\theta k)$ での値；またもし $f$ が $C^2$-級なら，上の真ん中の 2 つの項はもちろん，等しい）．

以上のような計算を一般化すれば，以下の定理になる．

**定理 3.1** 2 変数の関数 $f(x,y)$ が $C^r$-級であるとき，適当な $0<\theta<1$ に対して

$$f(a+h,b+k) = f(a,b)+\sum_{m=1}^{r-1}\frac{1}{m!}\sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}\frac{\partial^m f}{\partial x^\ell\,\partial y^{m-\ell}}(a,b)\,h^\ell\,k^{m-\ell}+\frac{1}{r!}\sum_{\ell=0}^{r}\binom{r}{\ell}\frac{\partial^r f}{\partial x^\ell\,\partial y^{r-\ell}}(a+\theta h,b+\theta k)\,h^\ell\,k^{r-\ell} \tag{3.16}$$

が成り立つ．

（注）上の $\theta$ が $a,b,h,k$ に依存するのは，1 変数の場合と同じである．

ともかく，このようにして多変数でもテイラーの公式が成り立つのである．当然，上の公式で $n\to\infty$ とできる場合には 2 変数関数のテイラー展開（級数）が成り立つことになるが，概念的には 1 変数の場合と全く同じだから，これ以上は省略する．

## 3.5 極大・極小問題

高校で習った微分の応用は，ほとんど最大・最小の問題につきるだろう．実際，微分の意義は最大・最小問題が簡単にわかることにあると言ってよい．となれば当然，偏微分を用いれば多変数関数の最大・最小問題が解けると期待したくなる．実際，その通りなのだが，1 変数の場合よりは少し複雑だ．この節の主な目的は，その事情を良く理解することにある．

### 3.5.1 問題の定義

**定義 3.2** 2 変数の関数 $f(x,y)$ が $(a,b)$ で <u>極大</u> であるとは，$(x,y)$ が $(a,b)$ に充分近ければ

$$f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{a}) \tag{3.17}$$

となることである．同様に，$f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ で <u>極小</u> であるとは，$(x,y)$ が $(a,b)$ に充分近ければ

$$f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a}) \tag{3.18}$$

であることをいう．

- この代わりに等号も含めたもの，つまり (3.17) と (3.18) の代わりに $f(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{a})$ と $f(\boldsymbol{x})\ge f(\boldsymbol{a})$ としたものを「広義の極大」「広義の極小」とよぶ．
- 高校でも強調されたかもしれないが，関数 $f(x)$ が $x=a$ で <u>最大</u> とは，$f$ の <u>定義域全体</u> を見渡した時に $f(a)$ が最大であることをいう．つまり，

$$f \text{ の定義域に入っているすべての } \boldsymbol{x} \text{ に対して}\quad f(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{a}) \tag{3.19}$$

であることをいう（上の極大の定義のように $\boldsymbol{x}$ の範囲を我々が勝手に設定してはいけない）．最小についても同様である．なお，(3.19) で等号を入れるか入れないかはまた，悩ましい定義の問題だが，ここでは一応，等号も許す事にする．

実際問題として，極大や極小を求めるのは（みんなが高校で習ったように，またこの節でやるように）割合簡単なことが多い．それに引き換え，最大や最小を求めるのはなかなかに大変なことが多く，すべての極大点や極小点を探し出した上でそれらの中で最大や最小のものを求める，という２段階が必要になる．(場合によっては，境界での値も考えに入れないといけない.）この節では極大・極小問題に話を限る．

### 3.5.2 １変数の場合の復習

さて，１変数の場合の極大，極小問題は以下のようになっていた（高校でやったはず）．

**定理 3.3** $x = a$ の近傍で定義された１変数の関数 $f(x)$ について，以下が成り立つ．
(i) $f(x)$ が $x = a$ で微分可能，かつ $x = a$ で $f(x)$ が極大または極小の場合，$f'(a) = 0$ である．逆は必ずしもなりたたない．
(ii) $f(x)$ が $x = a$ で２階微分可能で $f'(a) = 0$ の場合には，以下が成り立つ：

a. $f''(a) > 0$ の場合，$f(x)$ は $x = a$ で極小である．
b. $f''(a) < 0$ の場合，$f(x)$ は $x = a$ で極大である．
c. $f''(a) = 0$ の場合，$f(x)$ の $x = a$ での極大極小については何も言えない（極大の場合，極小の場合，どちらでもない場合もある）．

（上の定理の (ii)-c は「定理」の中に入れるほどのことではないが，わかりやすさを考えて入れておいた.）

念のために定理のそれぞれの場合に相当する例を挙げておこう（すべて $a = 0$ の例）．

- $f(x) = x^2$ は (ii)-a，$f(x) = -x^2$ は (ii)-b の典型的な例である．
- $f(x) = x^3$ は (i) で「逆が成り立たない」例である．($x = 0$ で微係数がゼロでも極大でも極小でもない.）
- $f(x) = x^4$ や $f(x) = -x^4$ は (ii)-c の，極大や極小になる例である．
- $f(x) = x^3$ や $f(x) = x^5$ は (ii)-c で極大でも極小でもない例である．

この定理の厳密な証明は平均値の定理を用いるが，定理のような振る舞いは（少なくともええ加減には）テイラーの定理（テイラー展開）から理解できる．すなわち，$x = a$ の周りのテイラーの公式を

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots \tag{3.20}$$

と書いてみよう．もし $f'(a) \neq 0$ なら $x \to a$ では

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots \tag{3.21}$$

となるから極大・極小にはなれないはずだ（この対偶をとると定理の (i)）．次に，$f'(a) = 0$ の場合は

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots \tag{3.22}$$

となるから，$f''(a) > 0$ なら $x \neq a$ では第２項が正になって，$f(x) > f(a)$ となるだろう．$f''(a) < 0$ の場合も同様である．最後に，$f''(a) = 0$ の場合はテイラーの公式をここまで書いたのではわからない．もっと高階の微係数も存在すると仮定して書いてみると［$f'(a) = f''(a) = 0$ の場合］，

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(3)}(a)}{6}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{24}(x-a)^4 + \frac{f^{(5)}(a)}{120}(x-a)^5 + \dots \tag{3.23}$$

となる．$x \to a$ では $(x-a)$ の次数の低い項が一番効く．従って，$f^{(3)}(a) \neq 0$ ならば $x = a$ は極大でも極小でもない［$(x-a)^3$ と同じような振る舞いになる］．一方，$f^{(3)}(a) = 0, f^{(4)}(a) > 0$ ならばこの $(x-a)^4$ の項が一番効いて，$x = a$ は極小になる．次に $f^{(3)}(a) = f^{(4)}(a) = 0$ で $f^{(5)}(a) \neq 0$ なら $(x-a)^5$ と同じような振る舞いで，極大でも極小でもない．以下同様で，テイラー展開の始めの数項がどうなっているかから考えていくと良い．

### 3.5.3　２変数の極大極小問題

さて，本題の２変数関数の場合にもどる．１変数の場合の経験から，$f$ の２階微分が大事であろうことは想像できるだろうが，その通りである．まず，用語の定義：

**定義 3.4** ２変数の関数 $f(x,y)$ の，点 $(a,b)$ における ヘッセ行列 とは，以下の形の行列

$$H(a,b) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \qquad \text{偏微分は } (x,y)=(a,b) \text{ での値} \tag{3.24}$$

のことである．同様に，$C^2$-級の $n$-変数の関数 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ の点 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ におけるヘシアンとは，その $ij$ 成分が $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})$ となっているような $n\times n$ 行列のことである．ヘッセ行列の行列式を ヘシアン という．

（注）少し用語の混乱があり，ヘッセ行列そのものも「ヘシアン」ということもある（特に英語では Hessian matrix の代わりに Hessian という事も多い）．僕自身もヘッセ行列をヘシアンと言うかも．

すると，

**定理 3.5** $(x,y)=(a,b)$ の近傍で定義された２変数の関数 $f(x,y)$ について，以下が成り立つ．
(i) $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で微分可能，かつ $f(x,y)$ が $(a,b)$ にて極大または極小の場合，$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ である．逆は必ずしもなりたたない．
(ii) $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で２階微分可能，$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ の場合，以下が成り立つ（微係数はすべて $(a,b)$ における値を表す）．

a. $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}f_{yx}>0$（ヘシアンが正）の場合，$f(x,y)$ は $(a,b)$ で極小または極小である．詳しくは，
  - $f_{xx}>0$ ならば $f$ は $(a,b)$ にて極小,
  - $f_{xx}<0$ ならば $f$ は $(a,b)$ にて極大

  である．

b. $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}f_{yx}<0$ ヘシアンが負）の場合，$f(x,y)$ は $(a,b)$ で極大にも極小にもなれない（鞍点）．

c. $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}f_{yx}=0$ の場合，$f(x,y)$ の $(a,b)$ における極大極小については何も言えない（極大の場合，極小の場合，どちらでもない場合もある）．

この定理のきちんとした証明は平均値の定理を用いて行える．それは普通の「教科書」に書いてある．ここでは厳密ではないが，テイラーの公式を使う理解の仕方を紹介しておこう．

関数が３階くらいまで微分可能だと思って２変数のテイラーの公式を書いてみると（$f$ や $f_x, f_{xy}$ などの引数はすべて $(a,b)$ であるが，式がややこしくなるので省略した），

$$f(x,y) = f + f_x(x-a) + f_y(y-b) + \frac{1}{2}\Bigl[f_{xx}(x-a)^2 + 2f_{xy}(x-a)(y-b) + f_{yy}(y-b)^2\Bigr] + \ldots \tag{3.25}$$

となっていたことをまず，思い出そう．

(i) １階微分の少なくとも１つがゼロでない場合．

さて，$f_x \neq 0$ や $f_y \neq 0$ の場合は点 $(a,b)$ のごくごく近傍では $(x-a)$ や $(y-b)$ の１次の項が一番効く（２次以上の項は１次の項より凄く小さい）から，$f(x,y)$ は $(a,b)$ では極大にも極小にもなれない（各自，確かめよ）．この対偶をとれば定理の (i) になる．

(ii) １階微分が２つともゼロで，３つの２階微分の少なくとも一つがゼロでない場合．

次に，$f_x=f_y=0$ の時には上の２次以上の項が重要になる．まずは２次の項のどれかがゼロでない場合を考えよう．この時は ... の項が２次の項に比べて無視できる．

さて，１変数の時と異なって厄介なのは，真ん中の $2f_{xy}(x-a)(y-b)$ の項だ．他の２つの項では $(x-a)^2, (y-b)^2$ は共に正であるが，この真ん中の項では $(x-a)(y-b)$ は正にも負にもなるから，困ってしまう．これをちゃんと

理解するには「行列の対角化」（線形代数でやったかな）をやる必要がある．ここでは行列の対角化を用いずに，今考えている２変数に限って簡単に理解できる方法を説明しよう．

問題は（$A = f_{xx}, B = f_{xy} = f_{yx}, C = f_{yy}$ と書いた）

$$g(x, y) = A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2 \tag{3.26}$$

が $x = a, y = b$ の近傍で正か負かということだが，これは受験数学でやった平方完成の問題だ．

$A \neq 0$ の場合をまず考えると，

$$g(x, y) = A\Big\{(x-a) + \frac{B}{A}(y-b)\Big\}^2 + \frac{CA - B^2}{A}(y-b)^2 \tag{3.27}$$

である．よって場合分けすると

- $A > 0$ かつ $CA - B^2 > 0$ ならば（$(x-a)^2 + (y-b)^2 > 0$ の時）これはいつも正
- $A < 0$ かつ $CA - B^2 > 0$ ならば（$(x-a)^2 + (y-b)^2 > 0$ の時）これはいつも負
- $A$ の符号にかかわらず $CA - B^2 < 0$ ならばこれは正にも負にもなる
- $CA - B^2 = 0$ なら $x - a = B(y-b)/A$ の時にこれはゼロ $\Longrightarrow$ もっと高次の項まで考えないとわからない

となって，定理の $a, b, c$ の場合がでてくる．

$C \neq 0$ の場合は $x, y$ の役割を取り替えれば同様．

最後に $A = C = 0$ の場合は $g(x, y) = 2B(x-a)(y-b)$ であって，$B \neq 0$ ならこれは正にも負にもなりうるので，極大や極小にはなれない．$A = B = C = 0$ ならば $g(x, y) \equiv 0$ だから，高次の項を考えないと何も言えない．

(iii) １階微分も２階微分もすべてゼロの場合：

この時は . . . についてもっとたくさんの情報が得られない限りは，どうしようもない．この場合は定理では (ii) の c の場合に分類されてしまっているが．

ともかく，２変数の関数の場合に定理 3.5 を理解するのは，このように地道に考えれば可能である． □

以上をまとめると，２変数の関数の極値問題は以下のようになる．

（１）極値を取る点の候補を求める．点 $(a, b)$ で極値をとるとすると，そこでは

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0 \tag{3.28}$$

である 必要 がある．従って，上の連立方程式を解けば，極値を取る点の候補はわかる．

（２）実際に極値になっているかを調べる（講義ノートの定義 3.4 と定理 3.5）．上を満たす $(a, b)$ の一つ一つについて，ヘシアン

$$H(a, b) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \qquad \text{偏微分は } (x, y) = (a, b) \text{ での値} \tag{3.29}$$

を定義すると，

- $\det H(a, b) > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) > 0$ なら，$f(x, y)$ は $(a, b)$ にて極小
- $\det H(a, b) > 0$ かつ $f_{xx}(a, b) < 0$ なら，$f(x, y)$ は $(a, b)$ にて極大
- $\det H(a, b) < 0$ なら $f(x, y)$ は $(a, b)$ にて極大でも極小でもない
- $\det H(a, b) = 0$ なら極大とも極小とも判定できない（もっと詳しく調べるべし）

１月２６日：今日で最後です．２変数関数極値問題をまとめた後,「連鎖律」について簡単に触れます．
期末試験は教務課の掲示通りの場所，時間で行います．各自で確かめて下さい．問題は試験範囲ですが，今回は変則な進み方になってしまったため，思い切って題材を絞ることにしました．その題材と予想問題は以下の通り：

- テイラーの定理とテイラー展開（１変数関数）．
  - 以下の関数をテイラー展開して，最初のゼロでない３項を求めなさい．
  - テイラーの定理を用いて，sin(1) の近似値を求めなさい．
- 積分の定義（区分求積法）—— ただし，これは簡単に（10 点程度）．
  - 以下の定積分を区分求積法で計算しなさい（訊くとしたら簡単な多項式だけ；レポートの sin なんかは訊かないので安心して）．
- 偏微分の計算
  - 以下の関数 $f$ に対してその偏微分を $f_x, f_y, f_{xy}$ を計算しなさい．
- ２変数関数の極大極小
  - 以下の２変数関数の極大値を極小値を求めなさい．

要するに，レポートで訊いたようなものばっかりです．もちろん，レポート問題は（ゆっくり時間をかけられるので）計算が大変なものが多かったから，そこのところは考慮します．また，試験時間との兼ね合いで上の中でも訊かない題材はあるでしょう．
これ以外にも少しだけやった（やる）題材はありますが，試験には ほとんど 出ないでしょう.（連鎖律だけは気の迷いで少しだけ訊くかも —— これは今日の進み具合にもよります.）

なお,「学習到達度再調査」もやる，と宣言したのでやります．やりますけど，できるだけ期末一発で通るように努力して下さいね.（一週間だけ勉強してもそんなに力がつくとは思えないから.）

———————————先週のレポートの解答 ———————————

**問５：** ともかくやってみるだけです.「計算が面倒だった！」との不満の声も聞かれましたし，実際，面倒な問題が多かったとは思います．ただ，ある程度複雑な関数でないと極大と極小が両方出ることはなく，問題として成り立ちません．計算量についてある程度の配慮はしますが，期末試験でもいくつかの候補点が出てくると覚悟して下さい．

$f$ について：まず極値点の候補 $(x, y)$ を求める．これは

$$0 = f_x(x, y) = 3x^2 - 3y \qquad \text{かつ} \qquad 0 = f_y(x, y) = 3y^2 - 3x$$

の解．これは要するに $y = x^2, x = y^2$ ということ．
まずは $y$ を消去して $x = x^4$ を得るので，これを因数分解して解くと（受験数学！）$x = 0, 1$ が出る．これをもとの２つの式に代入して，極値点の候補は $(0, 0)$ と $(1, 1)$ の２つとなる．これからそれぞれの点でのヘシアンなどを計算するので微分をやっとくと

$$f_{xx}(x, y) = 6x, \qquad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = -3, \qquad f_{yy}(x, y) = 6y$$

となっている．
点 $(1, 1)$ では，ヘシアンの値は $6^2 - (-3)^2 = 27 > 0$，また２階微分も $f_{xx}(1, 1) = 6 > 0$ なので，この点は極小点だ．関数の値は $f(1, 1) = -1$.
点 $(0, 0)$ ではヘシアンの値は $0^2 - (-3)^2 = -9 < 0$ なので，これは鞍点（極大でも極小でもない）．

$g$ について：極値点の候補 $(x, y)$ は

$$0 = g_x(x, y) = 2x(1 - x^2 + y^2)\, e^{-x^2-y^2} \qquad \text{かつ} \qquad 0 = g_y(x, y) = -2y(1 + x^2 - y^2)\, e^{-x^2-y^2}$$

の解だけども，$e^{-x^2-y^2}>0$ だから，上のは結局

$$0=x(1-x^2+y^2) \qquad かつ \qquad 0=y(1+x^2-y^2)$$

と同値だ．一つ目の式は

$$x=0 \qquad または \qquad x^2=1+y^2$$

と同値だし，二つ目のは

$$y=0 \qquad または \qquad y^2=1+x^2$$

と同値だ．そこでこの $2\times 2$ の組み合わせをしらみつぶしに考えて行くと（$x^2=1+y^2$ かつ $y^2=1+x^2$ の組み合わせは実数解がないとわかる）極値点の候補は

$$(0,0), \qquad (\pm 1,0), \qquad (0,\pm 1)$$

の 5 つであることがわかる．以下，この 5 つを考えるが，その前に微分の計算をしておくと（引数の $x,y$ は省略）

$$g_{xx}=2(1-5x^2+y^2+2x^4-2x^2y^2)\,e^{-x^2-y^2} \qquad g_{xy}=g_{yx}=4xy(x^2-y^2)\,e^{-x^2-y^2}$$
$$g_{yy}=-2(1+x^2-5y^2-2x^2y^2+2y^4)\,e^{-x^2-y^2}$$

である．まあ，かなりこの計算は大変ですよね．期末試験ではこんな大変なのは出さないので，安心して下され．（以下の計算では極値点の候補で $x,y$ に具体的な値を代入してからヘシアンなどを計算するのが良いだろう．）ヘシアンを $H$ と略記する．

$(0,0)$ では $H=-4<0$ なので，これは鞍点だ．

$(\pm 1,0)$ では $H=16/e>0$，$f_{xx}=-4/e<0$ なので，極大である．関数の値は $1/e$.

$(0,\pm 1)$ では $H=16/e>0$, $f_{xx}=4/e>0$ なので，極小である．関数の値は $-1/e$.

$h$ について：極値点の候補 $(x,y)$ は

$$0=h_x(x,y)=4x^3-4(x-y)=4(x^3-x+y) \qquad かつ \qquad 0=h_y(x,y)=4y^3-4(y-x)=4(y^3-y+x)$$

の解．これもちょっと解きにくいけど，

$$y=x-x^3, \qquad x=y-y^3$$

だと思って辺々引くとか，何も考えずに $y$ を消去するとかすれば良い．極値点の候補は

$$(0,0), \qquad (\sqrt{2},-\sqrt{2}), \qquad (-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

の 3 点である．例によって微分を計算しておくと

$$h_{xx}=12x^2-4, \qquad h_{xy}=h_{yx}=4, \qquad h_{yy}=12y^2-4$$

である．

点 $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ と点 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ では，ヘシアンは 384 で $h_{xx}=20>0$ なので極小である．関数の値は $-8$.

点 $(0,0)$ ではヘシアンは 0 なので，これだけでは何ともいえない（ので，もっと調べる必要がある）．その調べ方だが，原点に入るいろいろな向きの直線を考えて，その上で $h$ の値が正か負かを考えて行くのがよいだろう．格好よくやるなら，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とおいてみると，

$$\begin{aligned} h(r\cos\theta,r\sin\theta)&=r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)-2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\ &=\frac{r^4}{2}\{2-\sin^2(2\theta)\}-2r^2\cos(2\theta)\end{aligned}$$

となる．これは $\theta = 0$ では（$r$ が充分小さいなら）負，一方 $\theta = \pi/4$ では正だ．このように原点の周りで正も負も両方あるから，これでは極値にはなり得ない（極値の定義を思い出そう）．

（注意）代数方程式がきちんと解けない人がかなりいたようです．特に，$y$ を消去して $x$ の候補を出した後で，もとの２つの式の両方を満たすように $y$ を決めるべきなのに，片方しかチェックしてない，など．受験の時にはちゃんとできたはずなんだから，復習しておいて下さいね．

———————————————以下，レジュメの続き ———————————————

## 3.6 連鎖律

今学期最後の話題です．時間の関係もあるので，あまり期末試験には出ませんが，将来，知っておかないと困ることもあるだろうからやっておきます．

考えたいのは以下のような問題．

- ２変数 $x, y$ の関数 $f(x,y)$ がある（例：$f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$）
- $x, y$ のそれぞれは別の変数 $u, v$ の関数である（例：$x = u^2, y = 2v$）．
- 元の関数 $f(x,y)$ を新しい変数 $u, v$ の関数として書くことは可能だから，それを $g(u,v) = f(x,y)$ とする．このとき，$g$ の $u, v$ に関する偏微分はどうなるか？

もちろん，これは地道にやればできる．上の例なら

$$g(u,v) = \sin\{(u^2)^2 - (2v)^2\} = \sin(u^4 - 4v^2) \tag{3.30}$$

だから，この右辺を普通に $u, v$ で偏微分すればよい．

ではあるけど，この方法は往々にして大変である．つまり，$x, y$ を $u, v$ で表して $f(x,y)$ の表式に代入する訳だが，結果が非常に複雑になることもある．その複雑なのを $u, v$ で偏微分しに行くと，計算間違いもしやすい．ここはあまり具体的に代入などせず，一般論を考えたい．

この問題に関して思い起こすべきは１変数関数の「合成関数の微分」だ．その場合，関数 $f(x)$ と，新しい変数 $y$ と $x$ の関係 $x = x(y)$ が与えられた時に $h(y) = f(x(y))$ を考え，$h$ を $f$ と $x$ の合成関数と言った．そして $h(y)$ の導関数は

$$h'(y) = f'(x(y))\, x'(y) \qquad \text{つまり} \qquad \frac{dh}{dy} = \frac{df}{dx}\,\frac{dx}{dy} \tag{3.31}$$

で与えられた（受験数学）．これは形式的には $dx$ が分母分子に挟まった形になっている．上の式に相当するものを偏微分の際に導こう，というのが問題．

そこでまず，この１変数の問題に近いものとして，以下の問いを考える：

> （問１）$x, y$ の関数 $f(x,y)$ がある．また，$x, y$ は別の変数 $t$ の関数になっている；つまり $x = x(t), y = y(t)$．このとき，$f\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ を $t$ で微分した結果はどうなるか？

この問いへの答えは以下で与えられる：

$$\frac{d}{dt} f\bigl(x(t), y(t)\bigr) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{3.32}$$

これは１変数の時と似ている．ただし，$f$ が $x, y$ 両方によるから，この両方が分母分子に挟まった形になっている（以下でちゃんと説明）．

（理由）完全な証明は大変なので，なぜそうなるか，の感じだけ説明する．微分の定義を思い出すと $\dfrac{df}{dt}$ とは $t$ を少しだけ変えた時の $f$ の変化を見るものだった．ただし，今は $t$ が変わると $x(t), y(t)$ の両方が変化するから，我々の考えるべきは以下の極限だ：

$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f\bigl(x(t+h), y(t+h)\bigr) - f\bigl(x(t), y(t)\bigr)}{h} \tag{3.33}$$

この分子はこのままでは扱いにくい．そこでこれを

$$\begin{aligned}
&\frac{f\bigl(x(t+h),y(t+h)\bigr)-f\bigl(x(t),y(t)\bigr)}{h}\\
&\qquad=\frac{f\bigl(x(t+h),y(t+h)\bigr)-f\bigl(x(t),y(t+h)\bigr)}{h}+\frac{f\bigl(x(t),y(t+h)\bigr)-f\bigl(x(t),y(t)\bigr)}{h}\\
&\qquad=\frac{f\bigl(x(t+h),y(t+h)\bigr)-f\bigl(x(t),y(t+h)\bigr)}{x(t+h)-x(t)}\times\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\\
&\qquad\quad+\frac{f\bigl(x(t),y(t+h)\bigr)-f\bigl(x(t),y(t)\bigr)}{y(t+h)-y(t)}\times\frac{y(t+h)-y(t)}{h}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

と書いてみる．最後の２行の後ろの方は $h\to 0$ では $x'(t)$ や $y'(t)$ に行く．また，最後の行の前のものは，$y(t+h)=y(t)+h'$ と書いてみると

$$\frac{f\bigl(x(t),y(t+h)\bigr)-f\bigl(x(t),y(t)\bigr)}{y(t+h)-y(t)}=\frac{f\bigl(x(t),y(t)+h'\bigr)-f\bigl(x(t),y(t)\bigr)}{h'}\quad\longrightarrow\quad\frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(t),y(t)\bigr) \tag{3.35}$$

に行く．最後に，下から２行目の前のものは「大体」$\dfrac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ だ．(ここのところ，もちろん，ちゃんと証明できるが，このノートでは略)．

以上を集めると上の結果 (3.32) になる． □

ここまで来ると，もっと複雑な以下の問いの答えも簡単だ．

（問２）$x,y$ の関数 $f(x,y)$ がある．また，$x,y$ は別の変数 $u,v$ の関数になっている；つまり $x=x(u,v),y=y(u,v)$．このとき，$f\bigl(x(u,v),y(u,v)\bigr)$ を（$v$ を固定して）$u$ で微分した結果はどうなるか?

$u$ で偏微分とは要するに，$v$ を止めておいて $u$ で微分することだから,（問１）での $t$ を $u$ だと思えばこの問いの答えはわかる．つまり，

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{3.36}$$

となるのだ.

変数の数が増えても同じである．例えば，３変数の関数 $f(x,y,z)$ があって $x,y,z$ がそれぞれ $u,v$ の関数のとき，

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \tag{3.37}$$

となる．要するに $f$ の依存する変数を間に挟めば良い.

連鎖律の重要な応用として，先週紹介した多変数の平均値の定理とテイラーの公式がある．

# 練習問題

参考までに，いくつか練習問題を載せておきます．急いで作ったので解答（裏）が間違ってる可能性もあります.（本当は良くないんですが，[3] の解答は自分では確かめてません.）解答がおかしいと思ったら教えてくれると助かります．僕のホームページ（http://www.math.kyushu-u.ac.jp/ hara/lectures/lectures-j.html）で訂正できるかも．

[1] テイラー展開の問題：以下の関数を $x = 0$ の周りでテイラー展開して，最初のゼロでない 3 項を求めよ．

$$f(x) = (1+x)^{1/3} - (1-x)^{-1/3}, \qquad g(x) = e^x \sqrt{1-x}, \qquad h(x) = e^{1+x^2}, \qquad p(x) = \log(\cos x)$$

区分求積法の問題は略.

[2] 偏微分の計算問題：以下の関数 $f, g$ に対して，1 階と 2 階の偏導関数をすべて求めよ.（要するに $f$ ならば $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ を求めよ，ということ.）

$$f(x,y) = \frac{y}{x}, \qquad g(x,y) = \log(x^2 + y^2)$$

[3] 2 変数関数の極値問題：以下の関数が極値を取る点とその点での関数の値を求めよ．ただし，$x, y$ はすべての実数を動くものとする．

$$f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 - x - 2y, \qquad g(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^4, \qquad h(x,y) = x^5 - x^2 y + y^2$$

なお，上でカバーできていない問題も出す可能性はあります.（特に，テイラー展開から sin(1) などの近似値を求める問題.）ただし，そのような問題の重みはそれほど大きくないので，上のような問題が正しくできれば，B 以上はとれると思います.

言わずもがなのことですが，上に掲げた問題数では十分ではないかもしれません．また，裏の解答も「答えだけ」で親切ではありません．これで足りないと思ったら，是非，自分で演習書をやって下さい．お願いします.（図書館に行って、適当な微積の教科書の例題や問題をやるだけでも違いが出ると思います.）

解答です（答えのみ）.

[1]

$$f(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{9} - \frac{5}{27}x^4 + ...$$
$$g(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + ...$$
$$h(x) = e + ex^2 + \frac{e}{2}x^4 + ...$$
$$p(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + ...$$

[2]

$$f_x = -\frac{y}{x^2} \qquad f_y = \frac{1}{x} \qquad f_{xx} = \frac{2y}{x^3} \qquad f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{x^2} \qquad f_{yy} = 0$$
$$g_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad g_y = \frac{2y}{x^2+y^2} \qquad g_{xx} = -\frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \qquad g_{xy} = g_{yx} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad g_{yy} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

[3]

$f$ の時，極値の候補点は $\left(\frac{6}{7}, \frac{5}{7}\right)$．ヘシアンは正，$f_{xx} > 0$ なのでここで極小．関数の値は $-8/7$.

$g$ の時：極値の候補点は $(0,0)$ と $(\pm 1, \pm 1)$（複合同順）.
　$(0,0)$ ではヘシアンは負なので極値ではない（鞍点）.
　$(\pm 1, \pm 1)$ ではヘシアンは正で $f_{xx} > 0$ ゆえ極小．関数の値は $-1$.

$h$ の時：極値の候補点は $(0,0)$ と $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{50}\right)$.
　$\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{50}\right)$ ではヘシアンが正で $f_{yy} > 0$ ゆえ極小値，関数の値は $\dfrac{-1}{12500}$.
　$(0,0)$ ではヘシアンはゼロなのでこのままではわからない．$h(0,0) = 0$ である．また，$h(x,0) = x^5$ であって，$x$ がいくらゼロに近くても（$x \neq 0$ なら）これは正にも負にもなる. したがって，これは極値ではない.