７月１２日：今日のプリントは期末テストについての注意と，レポートにできなかった面積分の問題です．このプリントは火曜３限（S2-18 クラス）用です．

- 期末テストは教務課の指示通りの時間に行う．僕の理解によれば，７月２６日（火曜日）の３限のはずだが，必ず確認されたし．
- 試験の場所は僕は知らされていない．いつもと異なる場所の可能性も高いらしいので，注意して下され．
- 試験範囲は「重積分，線積分，面積分」と「ベクトル解析の初歩」．単位が危ない人は,「重積分」を完璧に,「線積分」をその次に... とやっていくのが良いでしょう．
- 学期始めに宣言した通りの方法で成績をつける．特に,「期末での一発逆転もあり」の約束をしたから，中間がダメだった人も心機一転してがんばってほしい．
- 答案の返却や確認について：講義中から何度も言っているように，答案を確認するのは学生さんの権利だから，返却できるような時間を設定する．期末試験後，３日ほどあと（要するに７月２９日の金曜くらい）を考えているが，確定ではない．詳しくは期末試験のときに連絡する．
- なお，上の時間に答案を取りに来れない人や，上のような返却方法を好まない人などには「皆さんからメイルで問い合わせがあったら，そのメイルに返信する形で成績を教える」ことも考えている．

なお,「学習到達度再調査」については,「もう少しで合格なのに」という人には実施する可能性がある.（本来，こういうことはやりたくないが，進学がかかっているらしいから，温情である.）しかし,「合格点からかけ離れた人」に対して実施することは絶対にない．この点をふまえて，きちんと期末を勉強していただきたい．

（レポートになり損ねた面積分の問題）以下の面積分 $\int_{S_i} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$ を計算しよう．曲面の定義をまとめて書いておく．曲面の裏表に関しては，xy-平面を下から上に抜ける向きが「裏から表」だとする.（法線ベクトルはこの「向き」にとる.）

- 曲面 S_1 とは，$x^2 + y^2 \leq 9$ かつ $z = 0$ を満たすところである．
- 曲面 S_2 とは，$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ かつ $z \geq 0$ を満たすところである．
- 曲面 S_3 とは，以下の２つの部分を合わせたものである．一つは「$x^2 + y^2 \leq 9$ かつ $z = 2$」，もう一つは「$x^2 + y^2 = 9$ かつ $0 \leq z \leq 2$」．

a) ベクトル $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$ と曲面 S_1, S_2, S_3 に対して，面積分 $\int_{S_i} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$ を計算せよ．

b) ベクトル $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ と曲面 S_2, S_3 に対して，面積分 $\int_{S_i} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$ を計算せよ．

たくさんあって大変と思うかもしれないが，このうちのいくつかは，面積分の定義をよく考えると，あまり計算せずとも答えが出るようになっている.（ただし，計算練習としては地道にやった方がよいかも.）

こたえ.

まず，問題の曲面を式で表すところからはじめよう．

S_1 は xy-平面上の半径 3 の円である．だから，例えば，$x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, z = 0$ （$0 \le r \le 3,\ 0 \le \phi \le 2\pi$）と表すことができる．従って，この場合，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

たまたま，このベクトルは上向き（z-軸向き）なので，正しい法線ベクトルの向きを向いている．従って，積分結果にマイナスをつける必要はない．もし，意地悪い問題が「法線ベクトルは $-z$ の向きにとる」と書いていたら，法線ベクトルの向きは上とは逆（従って，積分の最終結果にマイナスをつける）と覚えておかなければならない．

S_2 の方は，半径 3 の半球面である．極座標で表すと，

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3\sin\theta\cos\phi \\ 3\sin\theta\sin\phi \\ 3\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = 3^2\,\sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = 9\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

である（$\hat{\boldsymbol{r}}$ は $\boldsymbol{r}$ の向きの単位ベクトル）．このベクトルも正しい法線ベクトルの向きを向いている．

S_3 は 2 つの部分，円柱のフタと側面に分けて考えよう．円柱のフタは S_1 と並行なので，$z = 2$ であること以外は S_1 と同じように考えればよい．つまり，

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

である（$0 \le r \le 3, 0 \le \phi \le 2\pi$）．一方，側面は

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3\cos\phi \\ 3\sin\phi \\ z \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 3\cos\phi \\ 3\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

である（$0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 2$）．これらのベクトルも正しい法線ベクトルの向きを向いている.（ここで，側面は「下から上」じゃないだろう，と思った人がいるかもしれないが，講義中にも注意したように，法線ベクトルは面全体で「自然に」つながった向きにとる．今の場合は円柱のフタの部分で上向きにとっているから，側面もそれに合わせて「外向き」にとるわけだ.）

以上に基づいて，積分をやっていこう．まず，a) から．S_1 では

$$a) \qquad \int_{S_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = 0$$

となる．実のところ，S_1 は xy-平面内にあるので法線ベクトルは z-軸の方を向くのはアタリマエだし，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ なのもまあ，アタリマエ．その意味でこの問題はあんまり面白くない．

次に，S_2 では

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = 9\,\sin\theta\,\cos\theta\,3\cos\theta = 27\sin\theta\,\cos^2\theta$$

であって，積分は

$$\int_{S_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, 27\sin\theta\,\cos^2\theta = 54\pi \int_0^{\pi/2} d\theta\,\sin\theta\,\cos^2\theta = 18\pi \qquad \cdots a) \text{ の答え}$$

S_3 ではフタと側面の部分に分けて考える．まずフタの部分は

$$\int_{S_3\text{のフタ}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix} = \int_0^3 dr\int_0^{2\pi} d\phi\, 2r = 18\pi.$$

一方，側面は

$$\int_{S_3\text{の側面}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\cos\phi\\3\sin\phi\\0\end{pmatrix} = \int_0^2 dz\int_0^{2\pi} d\phi\, 0 = 0$$

従って両者をくわえて，S_3 全体では,

$$\int_{S_3} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = 18\pi \qquad \cdots a)\text{ の答え}$$

である．

以上は大げさに公式に従って計算したが，以下のように考えれば公式を使うまでもない．フタに関しては，法線ベクトルはフタに垂直（z-方向）で，$\boldsymbol{F}$ の向きと同じ，かつ力の大きさは 2 で一定．従って，面積分の値は力の大きさ 2 にフタの面積をかければ求められて，答えは $2\cdot 9\pi = 18\pi$ になる．一方，円柱の側面の法線ベクトルは z-軸に垂直なので，$\boldsymbol{F}$ との内積はゼロだ．つまり，この側面からの積分への寄与はゼロ．

b) も同様に計算できる．S_2 では，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$ なので,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi} = 9\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r} = 27\sin\theta$$

であって，積分は

$$\int_{S_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, 27\sin\theta\ = 54\pi\int_0^{\pi/2} d\theta\,\sin\theta\ = 54\pi \qquad \cdots b)\text{ の答え}$$

となる．

これも，公式を用いなくても簡単に計算できる．法線ベクトルは球面に垂直で $\boldsymbol{F}$ と平行，かつ力の大きさは 3 で一定．従って面積分の値は力の大きさ 3 に半球の面積をかけたものになって，$3\times 2\pi\, 3^2 = 54\pi$.

S_3 では，フタからの寄与は

$$\int_{S_3\text{のフタ}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix}r\cos\phi\\r\sin\phi\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix} = \int_0^3 dr\int_0^{2\pi} d\phi\, 2r = 18\pi.$$

一方，側面は

$$\int_{S_3\text{の側面}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix}3\cos\phi\\3\sin\phi\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\cos\phi\\3\sin\phi\\0\end{pmatrix} = \int_0^2 dz\int_0^{2\pi} d\phi\, 9 = 36\pi$$

である．両者を足して,

$$\int_{S_3} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = 18\pi + 36\pi = 54\pi \qquad \cdots b)\text{ の答え}$$

である．

これもここまで大げさにしなくてももっと簡単に計算できる（特に，フタからの寄与）．各自で考えてみよう．