５月１６日：今日は「重積分の変数変換」の補足と,「３重積分（とそれ以上)」,「線積分」です．
２週間後の 5/30 に中間テストをする可能性が高いので，来週の講義での情報（または僕の web page での情報）に注目のこと．

発展問題：

重積分の順序交換の応用として，１変数関数のテイラーの定理（剰余項の表式つき）を導いてみよう．簡単のため，関数 $f(x)$ はすべての x で無限階微分可能だとする．

1. 微分積分学の基本定理から以下が成り立つことに注意しよう（ここで $f'(t)$ は $f(t)$ の，t に関する導関数）
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, \qquad \text{同様に，} \quad f'(t) = f'(a) + \int_a^t f''(s)ds \tag{1.6.16}$$
2. 右の式を左の式に代入して，$f(x)$ の表式を作れ．そこに出てくる２重積分の順序を交換して
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-s)f''(s)ds \tag{1.6.17}$$
が成り立つことを示せ．
3. これを帰納法的にくり返して，$f(x)$ の n 次のテイラー展開の式を求めよ．

この結果として得られる表式は剰余項を積分で与えてくれるものなので，かなり使いやすい．通常は「区間 $[a,x]$ 中の一点 x_1 があって，$f^{(n+1)}(x_1)(x-a)^{n+1}/(n+1)!$ が剰余項」などとするが，これでは x_1 がどこにあるのかわかりにくいので，困ることがある．

1.7 ３次元以上の重積分

いままで，平面上の領域での重積分を考えてきた．空間内での積分（３重積分）は平面の場合と全く同様のアイディアで定義される．ただし，平面の場合には考える積分領域（２次元）を細かい長方形のメッシュで覆ったが，３次元の場合には積分領域（３次元）を細かい直方体で覆うところが異なる.（これ以外は全く同じだからくり返さない．でもよく考えると，１次元と２次元の差も，覆う対象が１次元の領域か２次元の領域か，それに応じて分け方を変えただけだった.）

４次元以上での積分（４重積分，５重積分）も同様に定義できるが，同じなのでくり返さない．

これらの n 重積分も，２重積分と同様の性質を持っている．すなわち，

1. n 重積分は，非積分関数と積分領域の性質が良ければ，n 個の累次積分で表せる．実際に累次積分に直すには，n-次元空間での積分領域を図示して（4 次元以上では不可能だが，少なくともできるだけ思い浮かべて)，丁寧に直していけばよい．
2. n 重積分においても，性質の良い変数変換に対しては，ヤコビアンを用いた変数変換の公式が成り立つ．勿論，この場合のヤコビアンは $n \times n$ 行列の行列式である．

ヤコビアンについて補足しておく．n 次元での元々の座標が $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 新しい座標が $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ で，各 x_i は u_1 から u_n の関数として書けているとする．このとき，
$$\iint \cdots \int_A f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \iint \cdots \int_B g(u_1, u_2, \ldots, u_n) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \right| du_1 du_2 \cdots du_n \tag{1.7.1}$$
となる．ここで B は新しい座標 $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ で見た積分領域 A のことであり，g は対応する点での f の値を表す．また，ヤコビアンは
$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \tag{1.7.2}$$

という $n \times n$ 行列の行列式である．

座標変換で最も重要なのは極座標への変換であろう．３次元の場合，これは

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\phi, \quad y = r\,\sin\theta\,\sin\phi, \quad z = r\cos\theta \tag{1.7.3}$$

で，(r, θ, ϕ) の動く範囲はそれぞれ $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．この場合のヤコビアンは（各自確かめる）

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \det \begin{bmatrix} \sin\theta\,\cos\phi & r\cos\theta\,\cos\phi & -r\sin\theta\,\sin\phi \\ \sin\theta\,\sin\phi & r\cos\theta\,\sin\phi & r\sin\theta\,\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} = r^2\sin\theta \tag{1.7.4}$$

となる．以下に極座標関連の発展問題を２つ載せる．どちらもかなり大変だから，無理にできるようになる必要はない．今できることよりも，将来，何らかの役に立つだろうと思って載せている．

発展問題：

４次元以上の極座標と，そのヤコビアンがどうなるか，一度はやってみると良い．ただし，一般次元では計算が非常に大変であるから，相当の覚悟が必要.

発展問題その２：

n を３以上の整数とする．原点を中心とする半径 r の n-次元球とは，$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2$ を満たす点の集合である．こいつの体積 $V_n(r)$ を求めるには，いくつかの方法がある．

- 上の発展問題で求まったはずのヤコビアンを用いて，n-次元極座標へ変換した積分を行う．非積分関数には，この球の定義関数をとればよい．この方法は一番の基本だが，ヤコビアンの計算が大変で死ぬことが多い...
- この球を x_n が一定の面で切ると，その切り口は半径が $\sqrt{r^2 - x_n^2}$ の，$(n-1)$ 次元球になる．この切り口の面積（体積）を x_n で積分することで，n 次元球の体積が求められるはずだ：

$$V_n(r) = \int_{-r}^{r} dx_n\, V_{n-1}(\sqrt{r^2 - x_n^2}) \tag{1.7.5}$$

一方，相似な図形の体積を考えると，半径 r と半径 1 の球の体積の比は丁度 r^n のはずである：

$$V_n(r) = r^n V_n(1) = r^n \times a_n \tag{1.7.6}$$

この２つの式を組み合わせると，a_n と a_{n-1} の間の漸化式が得られる．２次元球（円）や３次元球では $a_2 = \pi, a_3 = 4\pi/3$ を知っているから，漸化式を解くことで a_n と $V_n(r)$ がわかる．
- n 次元のガウス積分 $\displaystyle\iint \cdots \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ を以下の別々の方法で計算して，結果を比較する．
  - 指数関数が積に分かれることから，各成分でバラバラに積分する．結果は $\pi^{n/2}$ のはず.
  - n 次元の極座標に変数変換するつもりになる．しかし，今は非積分関数が球対称だから，角度成分は積分できてしまって，結局 $\int_0^\infty dr r^{n-1} c_n\, e^{-r^2}$ の形になるはずだ．ここで c_n は n ー次元の立体角（半径 1 の n-次元球の表面積）であり，a_n とは，$c_n = n a_n$ の関係にある．

両者を等置して，

$$\pi^{n/2} = n\, a_n \int_0^\infty dr\, r^{n-1}\, e^{-r^2} \tag{1.7.7}$$

となるはずで，これから a_n と $V_n(r)$ が求まる.（右辺の積分ができないって？ Γ-関数だよ.）

1.8 おまけ：広義多重積分

１変数関数の場合，広義積分というのは $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ や $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx$ のように，(1) 非積分関数がある点で無限大になってしまうもの (2) 積分区間が無限の大きさを持ってしまうもの，などを言った．これらは共に，最低限のリーマン積分の定義からはみ出しており，何らかの補足的な定義を必要とするからである．

そして実際，これらの積分は以下のような極限として定義（解釈）された：

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{1+x^2}\,dx \tag{1.8.1}$$

（これらの極限が存在する場合，その極限値を広義積分の値と定義する．）左の例では $x=0$ で非積分関数が無限大になるので，そこを ϵ だけ避けた形の積分をまず考え，$\epsilon\to 0$ の極限を考えている．右の例では積分区間が無限に広いから，$[0,R]$ という有限のところでの積分をまず考え，$R\to\infty$ とすることで無限区間での積分を再現したつもりになっている．

なお，$\lim_{\epsilon\downarrow 0}$ というのは，ϵ を正のままゼロに近づける，の意味であり，$\lim\limits_{\epsilon\to 0+}$，$\lim\limits_{\epsilon\to +0}$ などとも書く．

重積分の場合も広義積分は極限として定義するが，極限の取り方がもっと色々あるから大変だ．例えば,「平面全体」で積分する場合，どのような形の有限領域を拡大していくかで極限が異なる可能性がある.（１次元の時でさえ，$\int_{-\infty}^\infty dx f(x)$ とは，プラスとマイナスの方向を別々に無限大にすることだった.）

一応，定義に類するものを与えておこう．

定義 1.8.1 (広義積分のちょっといい加減な定義) 平面内の図形 A で関数 f を積分し，$\iint_A f(x,y)dxdy$ を求めたいが，非積分関数が無限大になったり，積分領域が無限に広かったりして，いままでの重積分の定義が適用できないとしよう．このとき，以下のような積分領域の列を考える．

(a) 図形 A は有界だが，その内の一点 a で f が無限大になる場合：　このときは一点 a とその周囲を少し除いた形の領域の列 $\{A_n\}$ で，$n\to\infty$ では A に一致するようなものを考える．

(b) 図形 A が無限の広がりを持つ場合：　このときは，有界な領域の列 $\{A_n\}$ で，$n\to\infty$ では A に一致（近づく）ようなものを考える．

このどちらの場合でも，もし，極限

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{A_n} f(x,y)dxdy \tag{1.8.2}$$

が存在し，かつその 極限が $\{A_n\}$ の取り方に依らない ならば，この極限を広義積分 $\iint_A f(x,y)dxdy$ の値と定める．極限が存在しなかったり，極限が $\{A_n\}$ の取り方によるばあいは，広義積分 $\iint_A f(x,y)dxdy$ は存在しない，という．

上の (a), (b) の両方に該当する場合や f が無限大になる点が複数ある場合などは，その都度，適当に A_n をとって考える．なお，問題によっては，特定の列 $\{A_n\}$ についてのみ極限があれば良しとする場合もあるので注意.

あまり一般的にやってもややこしくなるだけなので，以下の２つの例を中心に考える（$\alpha>0$ は定数）.

$$(a)\quad \int\limits_{0<x^2+y^2\le 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy, \qquad (b)\quad \int\limits_{x^2+y^2\ge 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy \tag{1.8.3}$$

(a) の場合，非積分関数が原点で無限大になるが，ともかく半径１の円内で積分したい．そこで，A_n として，円環 $\frac{1}{n^2}\le x^2+y^2\le 1$ をとってみる．原点でやばいことがおこっているので，そのまわりを少しだけ除いた訳だ．

極座標に移ると，A_n は $\frac{1}{n}\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi$ の領域に移る．従って，

$$\iint_{A_n}\frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_{1/n}^1 dr\,r\,\frac{1}{r^{2\alpha}} = 2\pi\int_{1/n}^1 dr\,r^{1-2\alpha} \tag{1.8.4}$$

が得られた．この積分は $\alpha<1$ ならば，$n\to\infty$ でも存在する．一方，$\alpha\ge 1$ では，$n\to\infty$ の時に発散してしまう．従って，元の重積分が定義できるためには，$\alpha<1$ が必要であることがわかる．

なお，広義積分の定義では，上のような円環以外の A_n についての極限も考察し，それらがすべて同じであることを確かめねばならない．これはなかなか大変なのであるが，今の場合は非積分関数が正であるため，積分の値は領域 A_n について単調増加である．つまり

$$A\subset B \qquad \text{なら，}\qquad \iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy \le \iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}dxdy \tag{1.8.5}$$

が成り立つ．この性質を利用して，一般の A_n での積分の値を，上で定義した円環での積分の値で挟み込むことができ，このような議論からどのような A_n についても積分の極限値は等しいことがわかる．つまり，$\alpha < 1$ がこの広義積分の存在のための必要十分条件だ．

(b) の場合，今度は積分領域が無限に広いので，$1 \le x^2 + y^2 \le n^2$ なる円環を A_n としてやろう．極座標に移って同様に計算すると，

$$\iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy = \int_1^n dr r \frac{1}{r^{2\alpha}} = \int_1^n dr\, r^{1-2\alpha} \tag{1.8.6}$$

が得られる．この積分は $n \to \infty$ の時，$\alpha > 1$ なら収束するが，$\alpha \le 1$ なら発散する．(a) の場合と同様に単調性を使って議論すると，この広義積分が定義されるためには $\alpha > 1$ が必要十分であることがわかる［(a) の場合と不等号の向きが逆なことに注意］．

2 線積分と面積分

前節では，２次元的，３次元的なところでの積分を考えた．これらは１次元での積分の自然な拡張であるが，１次元での積分の拡張はこれだけではない．その重要な例として,「線積分」と「面積分」を考える．後を見てもらうとわかるように,「線積分」は１次元積分の,「面積分」は２重積分の，それぞれ拡張になっているが，それは積分領域が「くにゃくにゃ曲がっている」方向への拡張である．まあ，これではなんのことかわからないと思うので，講義を聴いてくれ．

2.1 曲線とは

わざわざ節を立てるまでもないが,「曲線」の定義を与えておく．我々は直感的に曲線とは何か，知っているつもりだが，どのような変態なものまで許すか考え出すと，それなりに厄介だ．そこで，この講義では以下の定義を採用する．

定義 2.1.1 (曲線) n-次元空間の中の<u>曲線</u>とは，各成分が実数 t の連続関数であるような，n-成分の関数 $\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_n(t))$ の（軌跡の）ことである．このとき，t を，曲線を表す媒介変数（パラメーター）と呼ぶ．また，この講義では t の範囲を常に区間 $[0, 1]$ にとることにする．

この定義でわかるように，t を 0 から 1 まで動かすことで，曲線をなぞっていける．この意味で，曲線には向きが自然に定義される．また，$t = 0$ での曲線上の点を曲線の<u>始点</u>，$t = 1$ の点を曲線の<u>終点</u>という．

なお本来の意味で曲線という場合には，上の定義で t を動かしたときにできる，n-次元空間内での軌跡を指す．この意味で，軌跡が同じならパラメーターの入れ方が違うものでも同じ曲線とみなす．例：原点と $(1, 1)$ を結ぶ線分は，$\boldsymbol{r}(t) = (t, t)$ と書いても良いし，$\boldsymbol{r}(t) = (t^2, t^2)$ でも良いし，$\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{t}, \sqrt{t})$ でも良いし... でも，それをいちいち書くと面倒だから，以下では何か一つのパラメーター表示を決めたものとして通す.（興味のある人は，線積分の結果がパラメーター表示を変えても変わらないことを確かめるとよい.）

以下では主に３次元空間の中の曲線を考える．その際は $\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ の代わりに，$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ と書くこともある．

上で定義した曲線はちょっと一般的すぎるので，以下でよく考えるものを改めて定義しておく．

定義 2.1.2 (滑らかな曲線) n-次元空間の中の曲線 $\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_n(t))$ のうち，<u>滑らかな曲線</u>とは以下の２条件を満たすものである：

(1) 各成分 $x_i(t)$ が t の関数として微分可能で導関数が連続，かつ

(2) $\boldsymbol{r}'(t)$ は $0 \le t \le 1$ でゼロベクトルにはならない

2.2 線積分の定義

この節では線積分を定義する．記述を簡単にし，かつイメージが湧きやすいように 3 次元での話に限定するが，一般の n-次元への拡張は自明であろう．

線積分とは，以下のような問いを考える際に自然に出てくるものである．

> 問：空間内に曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ が与えられており（$0 \le t \le 1$）この曲線に沿って粒子が動いた場合，どのくらいの仕事がなされたかを考えたい．ただし，粒子にかかる力は場所 (x, y, z) ごとに異なり，$\boldsymbol{F}(x, y, z)$ というベクトル形で与えられているとする．簡単のため，曲線の始点は原点 $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$，終点は $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ とする．

Step 1. まず簡単のため，考えている曲線は直線で，粒子に働く力は場所に依らない，場合を考える．つまり，粒子は原点から点 (a, b, c) まで直線上を動き，粒子に働く力はこの直線に沿った方向で，大きさが F（一定）だとしよう．

このとき，粒子がなされる仕事の総量は (力の大きさ) $\times$ (動いた距離) だから，$F\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ である．この表式は $F > 0$（力と運動が同じ向き）の場合も，$F < 0$（力と運動が逆向き）の場合も正しい．

Step 2. 粒子は上と同じく原点から点 $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ まで直線上を動くが，粒子に働く力は $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ というベクトルで必ずしも直線と同じ方向でない（ただし，各成分は一定）場合．

粒子になされる仕事には，力 $\boldsymbol{F}$ の直線に沿った分力が関係する．この分力を表すために，直線の方向ベクトルが $\boldsymbol{n} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$ で表されることに注意しよう．力 $\boldsymbol{F}$ の直線の方向の分力は，向きは $\boldsymbol{n}$ で，大きさ（符号こみ）は $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ である（$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積）．つまり，問題の分力は $(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ である．

これで力の大きさがわかったから，Step 1 に従うと，粒子のされた力の総量は

$$(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = F_x\, a + F_y\, b + F_z c = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a} \tag{2.2.1}$$

となる．最右辺の表式が有用である：言葉でまとめると「粒子が直線に沿って，一定の力の下で運動するとき，粒子の受ける仕事の総量は（粒子の変位ベクトル）と（力のベクトル）の内積で与えられる」となる．もちろん，Step 1 の結果は上の特殊な場合である．

（この辺りは,「力学」の講義などでやっているはずだが，一応，復習した．以下では,「粒子が曲線に沿って動く」「力が一定ではない」の 2 方向に一般化することで，線積分を導入する．ただし，この 2 方向はほとんど同じ複雑さを要求するので，両方一辺にやる.）

Step 3. 粒子が折れ線に沿って運動し，粒子に働く力は折れ線ごとに一定の場合．

折れ線は原点 $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, 0)$ から出発して，n 個の点 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{a} = (a, b, c)$ を順に結ぶものとする．点 $\boldsymbol{r}_{i-1}$ から $\boldsymbol{r}_i$ を結ぶ折れ線を ℓ_i と書き，各 ℓ_i 上では力が一定（$\boldsymbol{F}_i$ と書く）としよう．折れ線 ℓ_i 上で粒子のされた仕事は，Step 2 から $\boldsymbol{F}_i \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1})$ である．従って，原点から (a, b, c) までの仕事の総量は

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.2}$$

となっているはずだ．

Step 4. 粒子が滑らかな曲線 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ に従って運動し（$0 \le t \le 1$）, 粒子に働く力は粒子のいる場所の関数である場合．つまり，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ における力は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$ の形のベクトル（各成分が (x, y, z) の関数）で与えられる場合．

これがもっとも一般の場合であるが，Step 3 の自然な拡張として考えられる．滑らかな曲線（曲がっている）のは考えにくいから，今までやってきたことに倣って，まずは曲線を折れ線で近似しよう．すなわち，始点から終点までの曲線上に，順に $\boldsymbol{r}_0 = \mathbf{0}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{a}$ の点を取り，曲線を Step 3 のような折れ線で近似することを考える．$\boldsymbol{r}_{i-1}$ から $\boldsymbol{r}_i$ の部分を ℓ_i と書くとき，ℓ_i の長さが十分に小さく，かつ $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{r}$ に滑らかに依存する場合は,

各 ℓ_i 上では $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ はほとんど一定のベクトルと思って良いだろう．ここまで近似すると，問題は Step 3 で解いたものになるので，

$$（この近似での仕事量）= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.3}$$

となるはずである．

そして，本当の答え（滑らかな曲線に沿っての仕事）は，上の近似値の極限，つまり

$$\lim_{分割を細かく} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.4}$$

で与えられる，と考えるのが自然である.（ここで「分割を細かく」というのは，上での n を無限大にして，すべての i について $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}$ の長さをゼロにする極限を指す.）

以上を動機付けとして，以下のように「線積分」を定義する．

- 空間内の曲線 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$,（$0 \le t \le 1$）が与えられている．この曲線を C とよぶことにしよう．
- 空間の各点で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ も与えられている.（空間全体で定義されていなくても，曲線上の各点で定義されていれば十分.）
- 曲線 C 上に，その順に沿って 始点$=\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n=$終点 の点をとる．これを曲線 C の分割と呼び，Δ で表す．
- $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$\boldsymbol{r}_{i-1}$ と $\boldsymbol{r}_i$ の間（両端も含む）に勝手に点 ζ_i をとる．ζ_1 から ζ_n をまとめて $\vec{\zeta}$ と書く．
- 分割 Δ とその間の点のあつまり $\vec{\zeta}$ に対して，線積分のリーマン和を

$$S(\Delta, \vec{\zeta}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\zeta_i) \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.5}$$

  として定義する．
- 分割を細かくした極限（つまり，$|\Delta| = \max_i |\boldsymbol{r}_{i-1} - \boldsymbol{r}_i|$ がゼロに行く極限）を考える．どのような分割の取り方，および，どのような $\vec{\zeta}$ の選び方に対しても上のリーマン和の極限が同じ値に収束するとき,「曲線 C に沿った $\boldsymbol{F}$ の線積分」が存在するといい，その極限値をこの線積分の値と定義する．記号では

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta, \vec{\zeta}) \tag{2.2.6}$$

１次元のリーマン積分，また２重積分や３重積分の定義を思い出してもらうと，上の定義はこれらの自然な拡張（または親類）になっていることが納得できるだろう．

理解を深めるための問題： 曲線 C を，原点と $(1,1,1)$ をつなぐ放物線（$y = z = x^2$），ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix} \tag{2.2.7}$$

とするとき，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ を，上の定義に従って求めよ．

ここで問題になるのは，どのような曲線，どのようなベクトル場なら線積分が定義できるのか，ということである．曲線に沿っての積分だから，まず曲線の長さが定義できることがほとんど必要であることは納得できるだろう．その上で，$\boldsymbol{F}$ 自身もそれなりに性質の良いことが求められよう．そのような十分条件の一つとして，以下が挙げられる．

定理 2.2.1 (線積分が定義できる十分条件) 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ が定義できる十分条件の一つは，以下の２つが成り立つことである．

- 曲線 C が「滑らかな曲線」（定義 2.1.2 参照）であり，
- ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ は，その引数 x, y, z に関する連続関数である．

（余談）上の定理では曲線が滑らかなことを仮定したが，これはあくまで十分条件である．多分，曲線の各成分 $x_i(t)$ が「有界変動関数」であり，$\boldsymbol{F}$ が連続関数ならば積分可能と思うが，ちょっと確認する時間がなかった．