５月９，１０日：今日は「積分の順序交換」を少しやってから「重積分での変数変換」をやります.

（少し進んだ話題）

１．定理 1.5.1 では $F(x)$ や $G(y)$ が定義できることを仮定したが，これを仮定しないバージョンは以下のようになる：f が A で可積分の時，$\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$ の上積分と下積分をそれぞれ $\overline{F}(x), \underline{F}(x)$ で表すと，

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \overline{F}(x)dx = \int_a^b \underline{F}(x)dx \tag{1.5.9}$$

である.（上積分，下積分はいつでも存在するから，f の可積分性のみを仮定すれば十分.）

２．定理 1.5.1 は「$f(x,y)$ が A で積分可能ならば，重積分は累次積分で書ける」ことを主張している．この逆は成り立つかを考えたい．つまり，

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \qquad \text{（累次積分が定義できて積分順序によらない）} \tag{1.5.10}$$

ならば，f は A で可積分だろうか？

残念ながら，そうとは限らない．次のやや人工的な f は (1.5.10) が成り立つにもかかわらず，A で積分できない例である．このような意味で，累次積分の性質からもともとの重積分が定義できるかどうかを判定することはできない.

例： 正方形 $[0,1]\times[0,1]$ を S と書く．また，k-番目に大きい素数を p_k と書く（$k=1,2,\ldots$）．更に，適当な 1 以上の整数 k と整数 m,n を用いて $\left(\frac{m}{p_k},\frac{n}{p_k}\right)$ の形に書ける S の内点の全体を T と書く：

$$T = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{m}{p_k},\frac{n}{p_k}\right) \middle|\, 0<m<p_k,\ 0<n<p_k \right\} \tag{1.5.11}$$

更に，

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \bigl((x,y)\in T\bigr) \\ 1 & \bigl((x,y)\in S\backslash T\bigr) \end{cases} \tag{1.5.12}$$

と定義する．このとき，

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)dx\right] dy = 1 \tag{1.5.13}$$

であるが，$\displaystyle\iint_S f(x,y)\,dxdy$ は<u>定義できない</u>.

３．このように，Riemann 積分では何かと話がヤヤコシイのだが，この点は Lebesgue 積分を考えると大幅に改善される．粗っぽくいうと，上の反例などは大体が非常に些細なところから出ているので，その部分を「無視」するような定義を用いれば反例が消滅するわけ．Lebesgue 積分というのはどの部分が「些細」で無視して良いかを合理的に決めたものとも考えられる.

一般の図形上での積分に対する累次積分

長方形でない図形 B 上での積分を累次積分に帰着することも，同様に考えていける．たとえば，B が

$$x=a, \quad x=b, \qquad y=\varphi(x), \quad y=\psi(x) \tag{1.5.14}$$

で囲まれた縦線図形の場合（$a\le x\le b$ で $\varphi(x)<\psi(x)$），

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right] dx \tag{1.5.15}$$

が成り立つ.

（前回の補足：重積分の順序交換）

前回,（非積分関数が「良い」性質を持っていれば）重積分の順序は交換できる，ことをみた．これは重積分を累次積分に帰着することから出てきたもので，考え方は非常に単純 —— 要するに，与えられた積分範囲をどんな順番でも良いから尽くすように覆えばよいわけだ．でもこれは応用上，非常に大事なものである．

例えば，前回のレポート問題 c) では $x=0, y=0, 2x+y=1$ で囲まれた三角形の領域での積分を考えた．上の解答にも載せたように，x, y どちらの積分を先にやっても構わない．また，例えば x での積分を先にやる形の累次積分で与えられた積分の順序を変えて，y から積分しても良い．問題によっては，このように順序を変えることで簡単に計算できる場合があるので，これは実際問題としては大事である.（以下の具体例をみよ.）

例題： 積分領域 B を，$(x-1)^2+y^2 \le 1$ と $y \ge 0$ で囲まれた図形として，積分 $\iint_B x^2 y\, dxdy$ を計算せよ.（この問題は x, y のどちらか一方を先にやると簡単にできる．順序を逆にすると大変だよ.）

順序交換は実用上，非常に大事だから，いくつか例題を挙げておく：以下の積分の順序交換を納得せよ（f は適当な関数，$a, b > 0$ は定数）

$$\int_0^a dx \int_{-bx}^{bx} dy\, f(x,y) = \int_0^{ab} dy \int_{y/b}^{a} dx\, f(x,y) + \int_{-ab}^{0} dy \int_{-y/b}^{a} dx\, f(x,y),$$

$$\int_0^{1/2} dx \int_{x^2}^{x} dy\, f(x,y) = \int_0^{1/4} dy \int_y^{\sqrt{y}} dx\, f(x,y) + \int_{1/4}^{1/2} dy \int_y^{1/2} dx\, f(x,y)$$

このような問題では，積分領域の図を描いて，間違わないように書き換えるのが良い．

1.6 重積分の変数変換

１変数関数の積分では変数変換（置換積分）の公式が存在した，多重積分においても同様の公式が存在し，かつ実際上，非常に有用である．

１次元の場合を思い出そう．この場合，$x = x(t)$ と変数変換すると，

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t))\, x'(t)\, dt \tag{1.6.1}$$

であった（t_1, t_2 は $x(t)$ がそれぞれ x_1, x_2 になる t の値）．x と t の間で，座標が伸び縮みした分を考慮に入れるために，$x'(t)$ が必要になったのである．

２重積分の時に，これに相当するものは何だろうか？今，(x, y) から新しい座標 (u, v) に移ることを考える．ここで新しい座標系が (u, v) だが，後々が楽になるので，(x, y) と (u, v) の関係を

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v) \tag{1.6.2}$$

と書くことにする．例としては，$x = u+v, y = u-v$ などを想定して欲しい．このとき，(x, y) でみた時の積分領域 A が，(u, v) では B になるとしよう．また，上の変数変換をして f を表したものを $g(u, v)$ と書こう：

$$g(u,v) \equiv f(x(u,v), y(u,v)). \tag{1.6.3}$$

さて，問題：重積分 $\iint_A f(x,y)dxdy$ は，u, v での重積分として，どのように書けるだろうか？

単純に考えて，積分領域 A が B になるのだから，

$$\text{（間違い！！）} \qquad \iint_A f(x,y)\, dxdy = \iint_B g(u,v)\, dudv \qquad \text{（間違い！！）} \tag{1.6.4}$$

となると思ったら，一般には間違いである．これが間違いであることは，１次元の時を思いだせば，ある程度は理解できる．１次元の場合，区間 $[x_1, x_2]$ が区間 $[t_1, t_2]$ に変わったからと言って，

$$\text{（間違い！！）} \qquad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t))\, dt \qquad \text{（間違い！！）} \tag{1.6.5}$$

ではなかった．変数変換によって区間が伸び縮みする効果を考えに入れるために，$x'(t)$ が必要だったわけね．

重積分でも事情は同じで，変数変換によって座標が伸び縮みした効果を表すものが必要である．ただし，考えている座標の変換が２次元的だから，伸び縮みだけでなく,「ひねり」の要素も加わるので，話がややこしい．

答えを言ってしまうと，以下のようになる．

まず，変数変換に対応して，ヤコビアンと呼ばれる関数 $J(u, v)$ を，以下の行列式で定義する：

$$J(u,v) \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}. \tag{1.6.6}$$

また，変数変換は十分に性質の良いもの，つまり

- 領域 A と B の点が１対１に対応し，
- $x = x(u, v)$ と $y = y(u, v)$ が偏微分可能で導関数が連続，
- B 内でヤコビアン $J(u, v)$ がゼロでない

だとする．このとき，

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_B g(u,v)\,|J(u,v)|\,dudv \tag{1.6.7}$$

である．

なお，上の定理では，ヤコビアンの絶対値をとったものが現れていることにも注意しよう．１次元の積分では $x'(t)$（絶対値ではない）が出ていたこととちょっと違う．この理由は講義で説明する．

非常に重要な例：平面の極座標

直交座標 (x, y) から極座標 (r, θ) への変換を考えよう．座標変換の式は

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{1.6.8}$$

であるから，ヤコビアンは

$$J(r,\theta) = \det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \tag{1.6.9}$$

というわけで，皆さんのよく知っている（はずの） $dxdy$ を $rdrd\theta$ に変換するのが出てきた.（３次元の極座標については来週くらいにやります）.

言うまでもなく，このような変数変換は，それをやることによって初めて積分できる場合が多いから重要なのだ．例えば積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ はこのままでは積分が非常に難しい．しかし，極座標に変換すると

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^1 dr\,r \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-r^2} = 2\pi\int_0^1 e^{-r^2}\,r\,dr = 2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^1 = \pi(1-e^{-1}) \tag{1.6.10}$$

と計算できる．

このような応用例としては

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \tag{1.6.11}$$

の証明がある．答えを知ってないととても出来そうにないが，これは

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \tag{1.6.12}$$

と考えて極座標に変換すると計算できるのだ．

ヤコビアンの意味

上の変数変換の式（ヤコビアン）が出てくる理由を述べよう．そのためには重積分の定義に戻って考えるのが良い．

何度も強調したように，$\iint_A f(x,y)dxdy$ とは，xy 座標系を細かく四角に区切って，その四角の面積と $f(x,y)$ の値をかけたものを足し併せ（たものの極限をと）る，ことだった．同様に，$\iint_B h(u,v)dudv$ は，uv 座標系での四角の面積と h の値をかけて和をとるわけ．

さて，uv-平面での小さな四角 $[u,u+du]\times[v,v+dv]$ を考えよう．これがもとの xy-平面で囲む図形は，その4つの頂点が

$$(x(u,v),y(u,v)),\ \ (x(u+du,v),y(u+du,v)),\ \ (x(u,v+dv),y(u,v+dv)),\ \ (x(u+du,v+dv),y(u+du,v+dv)) \tag{1.6.13}$$

で与えられる，近似的な平行四辺形になる．この平行四辺形を作る2つのベクトルは du,dv が非常に小さいとすると，

$$\begin{bmatrix} x(u+du,v)-x(u,v) \\ y(u+du,v)-y(u,v)\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u}du\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u}\end{bmatrix} du \quad \text{と} \quad \begin{bmatrix} x(u,v+dv)-x(u,v) \\ y(u,v+dv)-y(u,v)\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ \\ \frac{\partial y}{\partial v}dv\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix} dv \tag{1.6.14}$$

である．ところで，ベクトル (a,b) と (c,d) の作る平行四辺形の面積は，行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ の行列式，つまり $ad-bc$（の絶対値）で与えられた（線形代数の講義を思い出そう；忘れていても，初等的にも導けるよ）．これを用いると，考えている近似的な平行四辺形の面積は以下（の絶対値）になるはずだ．

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial v}dv\end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix} dudv = J(u,v)\,du\,dv \tag{1.6.15}$$

このようにしてヤコビアンが登場するのである． □