４月１８，１９日：今日は予告通り,「重積分はいつ定義できるのか」についてやります．１次元の積分と基本的には同じ事ですが，復習も兼ねてやることにしました.

1.3 重積分はいつ定義できるのか？

前節で２重積分を「定義」したが，どのような関数に対して，この定義が意味を持つのか，を知っておくことは大切だ.（この定義が有効な例が極端に少なかったりしたら，意味がないから.）やりたいことは下の３つの命題に要約される.

その前に設定や補助的な定義などから.

- 先週と同じく，長方形 $A = [a,b] \times [c,d]$ 上で関数 $f(x,y)$ を積分することを考えている．f はこの長方形上で有界としておく.
- A を横方向に n 個，縦方向に m 個に分割して分割 Δ を作り，その中の点 ζ_{ij} をとる（前回のプリント参照）.
- リーマン和は $S(\Delta, \vec{\zeta}) \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$
- $\lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta, \vec{\zeta})$ の極限が存在するとき，f は A 上で積分可能と言い，その極限を $\iint_A f(x,y)dxdy$ と定義する.
- 分割 Δ に対して以下のように定義する：小さな長方形（ブロックとよぼう）I_{ij} における $f(x,y)$ の最大値と最小値（正確には上限と下限）を M_{ij}, m_{ij} と書くとき，

$$\overline{S}(\Delta) \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \tag{1.3.1}$$

$$\underline{S}(\Delta) \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \tag{1.3.2}$$

また，

$$\overline{S} = \inf\{\overline{S}(\Delta) \,\big|\, \Delta \text{ は } A \text{ の分割 }\}, \qquad \underline{S} = \sup\{\underline{S}(\Delta) \,\big|\, \Delta \text{ は } A \text{ の分割 }\} \tag{1.3.3}$$

と書く．$\overline{S}$ を上積分，$\underline{S}$を下積分 という.

上積分，下積分の定義から，$\vec{\zeta}$ の取り方にかかわらず，

$$\underline{S}(\Delta) \le S(\Delta, \vec{\zeta}) \le \overline{S}(\Delta) \tag{1.3.4}$$

であることはわかる．次の定理は，上積分や下積分は，自分自身では良い極限を持つことを保証する.

定理 1.3.1 (Darboux の定理) 分割 Δ を限りなく細かくするとき（つまり，$|\Delta| \to 0$ で），上積分と下積分はそれぞれ一定の値に収束し，その行き先は $\overline{S}$ と $\underline{S}$ である．つまり，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \overline{S}(\Delta) = \overline{S}, \qquad \lim_{|\Delta|\to 0} \underline{S}(\Delta) = \underline{S}. \tag{1.3.5}$$

（ただし，$\overline{S} = \underline{S}$ とは限らない.）

では，上積分・下積分と積分可能性の関係はどうか？$\underline{S}$ と $\overline{S}$ の sup, inf としての定義から

$$\underline{S} \le \overline{S} \tag{1.3.6}$$

であることはわかるが，問題はこの２つがいつ，等しいかだ．これは積分可能性と同値だ，というのが下の定理.

定理 1.3.2 (積分可能性の必要十分条件) f が長方形 A 上で積分可能である必要十分条件は，上積分と下積分が一致することである．つまり

$$\overline{S} = \underline{S} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ は可積分で，} \iint_A f(x,y)dxdy = \overline{S} = \underline{S} \tag{1.3.7}$$

最後に，簡単な十分条件を挙げておく：

> **定理 1.3.3 (連続関数は積分可能)** 関数 $f(x,y)$ が長方形 A 上で連続なら，f は A 上で積分可能である．また，有限個の点を除くと連続な場合も積分可能である．

講義ではこれらの定理の証明（説明）を行う．良くわかっている人には退屈かもしれないし，わかっていない人には難しいと思えるかもしれないが，大事なところだからちょっと辛抱して欲しい —– 次回からは少し趣が異なるはずだ．なお，この講義のレベルでは，上の定理の主張を理解していれば十分である（証明はわからなくても良い）．

> 上の３つの定理の証明は，１次元の積分の時と全く同じであり，何重積分かは全く関係ない．講義では１次元積分の場合を思い浮かべながら説明する予定．

証明の基本になるのは，以下の２つの性質である．

（１）$\overline{S}(\Delta)$ は分割を細かくすると減少する．より正確にいうと，勝手な分割 Δ_1, Δ_2 をとってきて，これを合わせた（つまり，両方の分割の分点を全部集めた）分割を $\Delta_{12} = \Delta_1 \cup \Delta_2$ と書くと，$\overline{S}(\Delta_{12}) \le \overline{S}(\Delta_1)$ および $\overline{S}(\Delta_{12}) \le \overline{S}(\Delta_2)$ である．

（１′）同様に，$\underline{S}(\Delta)$ は分割を細かくすると増加する．

（２）有界な集合上の連続関数は一様連続である．つまり，任意の $\epsilon > 0$ に対して適当な $\delta > 0$ がとれて，

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \epsilon \tag{1.3.8}$$

が成立する[1]．

定理 1.3.1 の証明　$\overline{S}$ の方のみ，証明する．

ちょっと考えると，これは当たり前に思える．なぜなら，（１）より，$\overline{S}(\Delta)$ は単調減少っぽく見えて，「有界な単調減少列は極限を持つ」から．しかし，これはウソだ．というのは，（１）は「Δ をより細かくしたら $\overline{S}(\Delta)$ は非増加」と言っているだけで，他の分割から出発して細かくした行き先が，この Δ から出発した行き先と等しいかどうかは保証の限りではない．この問題を解決するため，以下のように進む．

まず，inf としての定義からどんな分割 Δ に対しても $\overline{S} \le \overline{S}(\Delta)$ である：

$$\forall\Delta, \quad \overline{S} \le \overline{S}(\Delta) \tag{1.3.9}$$

また，inf であるから，$\overline{S}$ と $\overline{S}(\Delta)$ の差がいくらでも小さくなるような分割 Δ もある：

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\Delta, \quad \overline{S}(\Delta) \le \overline{S} + \epsilon. \tag{1.3.10}$$

問題は，(1.3.10) が $|\Delta'| \to 0$ なる任意の Δ' に対して成り立つか，つまり

$$(?) \qquad \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0, \quad |\Delta'| < \delta \implies \overline{S}(\Delta') \le \overline{S} + \epsilon \tag{1.3.11}$$

となっているか，ということである．

そこでまず，(1.3.9) の Δ を固定し，十分細かい分割 Δ' を，「Δ' の各ブロック内に Δ の分点が高々一つしかない」ようにとる．これは $|\Delta'|$ を $|\Delta|$ より小さくとれば絶対に実現できる．次に，Δ と Δ' を合わせた分割を考えると，これは Δ, Δ' よりも細かいから (1.3.9) から

$$\overline{S}(\Delta \cup \Delta') \le \overline{S}(\Delta) \tag{1.3.12}$$

ではある．しかし同時に，p を Δ の分点の数，M, m は A 内での f の上限と下限とすると，

$$\overline{S}(\Delta') - \overline{S}(\Delta \cup \Delta') \le p(M-m)|\Delta'|^2 \tag{1.3.13}$$

[1] ２変数の関数 f を考えているつもりだが，引数を２成分まとめて $\boldsymbol{x}$ などと表した

が成り立つ．なぜなら，左辺の差への寄与は Δ' の分割ブロック中に Δ の分点が入っているときのみゼロでないが，このような分点の数は最大で p 個しかなく，そのような一つのブロックからの寄与は $(M-m)|\Delta'|^2$ で押さえられるからだ．(1.3.12) と (1.3.13) から

$$\overline{S}(\Delta') \le \overline{S}(\Delta \cup \Delta') + p(M-m)|\Delta'|^2 \le \overline{S}(\Delta) + p(M-m)|\Delta'|^2 \tag{1.3.14}$$

が結論できた．これと (1.3.10) を組み合わせ，更に Δ' を十分細かく，$p(M-m)|\Delta'|^2 < \epsilon$ となるようにとると（ここで，p は Δ のみで決まり，Δ' には関係ないことが効いている），

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0, \quad |\Delta'| < \delta \implies \overline{S}(\Delta') \le \overline{S} + 2\epsilon \tag{1.3.15}$$

が言える．よって，(ϵ は任意だから 2ϵ を ϵ と思い直して）(1.3.11) が結論できる． □

定理 1.3.2 の証明

（十分であること）Darboux の定理の証明中，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ がとれて，

$$|\Delta| < \delta \text{ ならば } \quad \overline{S}(\Delta) < \overline{S} + \epsilon \quad \text{かつ} \quad \underline{S}(\Delta) > \underline{S} - \epsilon \tag{1.3.16}$$

であることを見た — (1.3.15) 式．ところで，その定義から，リーマン和は

$$\underline{S}(\Delta) \le S(\Delta, \vec{\zeta}) \le \overline{S}(\Delta) \tag{1.3.17}$$

を満たす．従って，$|\Delta| < \delta$ である限り，どんな分割でも，どんな分点 $\vec{\zeta}$ の取り方に対しても，

$$\underline{S} - \epsilon \le \underline{S}(\Delta) \le S(\Delta, \vec{\zeta}) \le \overline{S}(\Delta) \le \overline{S} + \epsilon \tag{1.3.18}$$

が成り立つことがわかる．ここでもし，定理の仮定のように $\underline{S} = \overline{S}$ であれば，$\delta \downarrow 0$ として

$$\lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta, \vec{\zeta}) = \overline{S} = \underline{S} \tag{1.3.19}$$

が結論できる．リーマン和の極限が確定するから，積分可能である．

（必要であること）ほとんど自明である．というのも，sup, inf として定義から，$\overline{S} - \underline{S} = c > 0$ と仮定すると，

$$\underline{S}(\Delta) \le \underline{S} = \overline{S} - c \le \overline{S}(\Delta') - c \tag{1.3.20}$$

が勝手な Δ, Δ' に関して成り立つ．つまり，いくら頑張っても $\overline{S}(\Delta)$ と $\underline{S}(\Delta')$ のギャップを埋めることはできず，リーマン和の極限が存在しない（そのような分点をいくらでもとれる）． □

定理 1.3.3 の証明

証明のキーは「一様連続性」である．定理 1.3.2 を考えに入れると，$\overline{S} = \underline{S}$ が言えれば十分だ．そのためには，

$$(?)\ \text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して } 0 \le \overline{S}(\Delta) - \underline{S}(\Delta) < \epsilon \text{ なる分割 } \Delta \text{ がとれる} \tag{1.3.21}$$

ことを証明すればよい．さて，積分領域の面積を $|A|$ と書くことにし，$\epsilon' = \epsilon/|A|$ とおく．f の一様連続性から $\delta > 0$ が存在して，

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \le \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \epsilon' \tag{1.3.22}$$

とすることができる．そこで，分割 Δ を，$|\Delta| < \delta$ となるようなものにとろう．この分割は十分小さいので，同じブロック I_{ij} に属する $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < \delta$ を満たしており，したがって $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \epsilon'$ も満たされる．よって，I_{ij} 上での f の上限 M_{ij} と下限 m_{ij} は $0 \le M_{ij} - m_{ij} \le \epsilon'$ を満たす．これを i, j について和をとると，

$$0 \le \overline{S} - \underline{S} = \sum_{ij} (M_{ij} - m_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \le \sum_{ij} \epsilon'(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \epsilon' \, |A| = \epsilon \tag{1.3.23}$$

が得られる．つまり，この Δ を用いて (1.3.21) が証明できた．メデタシメデタシ． □

理解を深めるための問題：

重積分の定義に従って（上の定理を使っても良い），積分 $\displaystyle\iint_A f(x,y)dxdy$ を求めてみよ．ここで

$$A = [0,1] \times [0,1], \qquad f(x,y) = xy \tag{1.3.24}$$

とする．余力のある人は他の $f(x,y)$ の場合も（例：$f(x,y) = x^2$）やってみようか.

この問題の計算は大変である．１次元の積分でも大変だったことを思い返せば当然だろう．しかし，一回はやっておいた方が，後々のためになる．また，その過程で，来週にやる予定の「累次積分」の感覚も掴めると思う．だから面倒でも自分でやってみることを奨める.

まあ，定義に従って重積分を求めるのは大変だ（上の問題をやった人は同意するだろう）．来週は重積分を一次元積分２回に直してやる方法を考える．これで重積分の計算は非常に簡単になるのだ.

1.4 一般の領域での重積分

前節への補足として，一般の領域での重積分の定義を簡単に述べておく．この小節の内容は，まあ常識的なものだから,「油断すると変なこともある」点以外はそれほど気にしなくてよい.（ただし「縦線図形上の積分」は後で一杯出てくる.）

今までは xy-平面の長方形 $A = [a,b] \times [c,d]$ 上の積分を考えてきた．xy-平面の一般の図形 B での積分はどう定義したら良いだろうか？まず天下りに定義を与え，その後で意味を説明する.

B を xy 平面内の有界な図形とする．B の特性関数（定義関数）と呼ばれる関数 $\chi_B(x,y)$ を,

$$\chi_B(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in B \text{ のとき} \\ 0 & (x,y) \notin B \text{ のとき} \end{cases} \tag{1.4.1}$$

と定義する．また，B をその内部におさめられるような，十分大きな長方形 B^* をとる.

この準備の下で，まず図形 B の面積を定義しよう.

定義 1.4.1 (一般の図形の面積) 図形 B の面積は，重積分

$$\iint_{B^*} \chi_B(x,y)\, dxdy \tag{1.4.2}$$

によって定義する．この積分が存在しない場合は，B の面積は定義できないと考える．この積分が存在する場合，B は面積確定であるという.

上の定義の右辺は，B^* が長方形であるから，前節までの定義によって解釈できる．χ_B の定義を見ればわかるように，この右辺では積分に実質的に効いてくるのは B の中だけである．この意味で上の定義は直感的に「正しい」ものと考えて良い.

図形 B の「面積」とは何か？は決してアタリマエの事ではない．我々が日常見かけるような図形は，その境界が滑らかな曲線であるから，その面積は直感的にも定義できる．しかし，その境界が連続な曲線まで拡げると，既に上の定義では面積が確定できない図形も多々ある．物理や工学に出てくる曲線でも滑らかでないものもある（例：ブラウン運動の軌跡．もう少し講義で）.

この意味で,「図形の面積」は我々が苦労して，意識的に定義すべきものである．以下に，面積が確定するための十分条件を少し挙げる.

定理 1.4.2 (B の面積確定のための十分条件) 図形 B の面積が定義できるための十分条件のいくつかは以下の通りである：

（１）B の境界が滑らかな曲線であること．つまり，$x = x(t), y = y(t)$ という閉曲線（$0 \le t \le 1$ かつ $x(0) = x(1), y(0) = y(1)$）があって，その内部が B であり，かつ，$x(t), y(t)$ が t の関数として C^1-級（一階微分可能で，導関数が連続）であること．

（２）$x = a, x = b$ の２つの直線と $y = \varphi(x), y = \psi(x)$ （ただし $a \le x \le b$ で $\varphi(x) \le \psi(x)$，かつ $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ は x の連続関数）なる２つの曲線で囲まれた部分が B であること．

定理の（２）に出ているような図形を縦線図形という．上では y-方向の「縦線」でできた図形の例を示したが，x-方向の「横線」でできた図形，つまり

$$y = c, \quad y = d, \qquad x = \varphi(y), \quad x = \psi(y) \quad \text{で囲まれた図形} \tag{1.4.3}$$

に対しても定理は成り立つ．これは本来,「横線図形」と呼ぶべきだろうが．このような図形も「縦線図形」という．

この準備の下で,

定義 1.4.3 (面積確定の図形の上の重積分) 面積が確定する図形 B が与えられたとする．B 上で定義された関数 $f(x, y)$ が与えられたとき，f の B での積分は，重積分

$$\iint_B f(x,y)dxdy \equiv \iint_{B^*} f(x,y)\chi_B(x,y)\,dxdy \tag{1.4.4}$$

によって定義する．右辺の積分が定義できる場合は f は B で可積分（積分できる），定義できない場合は f は B で積分できないという.

最後に，積分可能の十分条件を挙げておく．図形 B が面積確定との条件をつければ，だいたい，長方形上での積分と同じ事になる．

定理 1.4.4 (積分可能の条件) 図形 B の面積が定義できる時，その上の関数 f が B で積分可能なための十分条件は，f が B 上で連続な事である．

1.5 重積分と累次積分

先週の「理解を深めるための問題」にあるように，重積分をその定義から（分割を使って）求めるのは大変だ．ところが，n 重積分は（大抵の場合）n 個の１次元積分のくり返しで求められる．これは非常な省力化であり，実用上も非常に有り難い．この節ではこの重要な性質を学ぶ.

まずは簡単のために，$A = [a, b] \times [c, d]$（長方形） の上での $f(x, y)$ の重積分を考える．図形 A が前小節の「一般の図形」の場合については後で少しだけ触れる．

定理 1.5.1 (累次積分への帰着) 関数 $f(x,y)$ が A 上で積分可能とする．このとき，すべての $x \in [a,b]$ に対して

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy \tag{1.5.1}$$

を定義できるならば，

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx \tag{1.5.2}$$

が成り立つ．x, y を入れ替えた形の定理ももちろん，なりたつ．すなわち，すべての $y \in [c,d]$ に対して

$$G(y) = \int_a^b f(x,y)dx \tag{1.5.3}$$

を定義できるならば，

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_c^d G(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \tag{1.5.4}$$

である．

講義で詳しく説明するが，$z = f(x,y)$ のグラフの下の体積を求めると思えば，この定理の主張を高校までの積分で理解できる．高校では，このような立体を x-軸に垂直な面で切り，その断面の面積を積分することで体積を求めた．(1.5.4) は，正にこれになっている［$F(x)$ が断面の面積に相当］．

記号：(1.5.4) の積分は，通常はカッコを省略して

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx \tag{1.5.5}$$

と書かれる（a,b,c,d と x,y の順番に注意）．ただ，これでは x,y どっちの変数がどこまで動くのかが混乱しがちなので，積分範囲を明確にするために

$$\int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) \tag{1.5.6}$$

と書くことも多い．(物理や工学では後者の書き方が一般的である.）後者では「積分記号の直後にある積分変数がその範囲を動く」点がわかりやすいが，その反面，この後に更に数式が続いた場合など，「どこまでが非積分関数か」わかりにくい面もある…

系 1.5.2 (Riemann 積分に対する Fubini の定理) 関数 f が A 上で積分可能のとき（両辺に意味がつく限り）

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \tag{1.5.7}$$

が成り立つ．つまり，累次積分の順序を交換できる．

問： A 上で積分可能であるが，上の $F(x)$ が（ある $x \in [a,b]$ に対しては）定義できないような $f(x,y)$ の例を作れ．

問： 以下の重積分を計算せよ．$A = [0,1] \times [0,1]$.

$$\iint_A (x^2+y^2)dxdy, \qquad \iint_A xy\,dxdy, \tag{1.5.8}$$

定理 1.5.1 の証明について：

上に書いたように，立体の体積だと思えばアタリマエのようなものだが，一応，講義では説明する． □