3.6 ２種類のポテンシャルとベクトルの分解

いままでの結果を基に，ベクトル場と「ポテンシャル」の関係をまとめておこう.（多分，大半は聞いたことのあるはなしでしょうね.）

結果を述べてしまおう．以下ではベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ などが与えられているとする.

一つ目の定理は，$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$ に関するものである.

定理 3.6.1 (rotation-free とスカラーポテンシャル) 以下の同値関係がなりたつ.

すべての場所で　$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$

$\Longleftrightarrow$

適当なスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ が存在して, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r})$ と書ける (3.6.1)

なお，$\boldsymbol{E}$ を与えるスカラーポテンシャルは，付加定数の自由度を除いて（つまり，勝手な定数を足したりひいたりする自由度はあるが）一意的に定まる.

証明：

下から上は，単なる計算だ．つまり，$\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\,\phi$ ならば $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$ であることを計算で示せばよい.

問題は上から下を出す方で，こっちは全然当たり前には見えない（少なくとも初めのうちは）．でも，ストークスの定理（または系 3.4.4）を思い出すと，簡単である.

いま，点 A と点 B を結ぶ，任意の曲線 C を考えよう．線積分 $\int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ の値は，C の取り方にはよらない．そこで，例えば原点でのポテンシャルの値を一つ勝手に決めて（ϕ_0），他の点でのポテンシャルを

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_0 - \int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \qquad (C \text{ は原点から } \boldsymbol{r} \text{ へ行く勝手な曲線}) \tag{3.6.2}$$

としてやろう．この表式を実際に微分してみると，$-\mathbf{grad}\,\phi = \boldsymbol{E}$ であることはすぐにわかる．つまり，このように定義した $\phi(\boldsymbol{r})$ が定理の主張するところのスカラーポテンシャルになっていることが確かめられた.

最後に，ポテンシャルの一意性について考えよう．上でポテンシャルの存在は言ったので，このベクトルは「保存力」である．だから，定理 3.2.3 が使えるが，これは任意の２点間のポテンシャルの差を一意に決めてしまう．任意の２点間のポテンシャルの差が決まっているので，残されたのは空間全体でポテンシャルを同じ量だけ上げ下げする自由度のみである．これは要するに，上の ϕ_0 の自由度だ. □

２つ目の定理は，$\mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ ならどうか，と言うもの：

定理 3.6.2 (divergence-free とベクトルポテンシャル) 以下の同値関係がなりたつ.

すべての場所で　$\mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0$

$\Longleftrightarrow$

適当なベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が存在して, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ と書ける (3.6.3)

また，$\boldsymbol{B}$ を与えるベクトルポテンシャルは一意には定まらないが，そのようなベクトルポテンシャルの２つを $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}'$ とすると，その差は適当なスカラー場 ϕ を用いて $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}' = \mathbf{grad}\,\phi$ と書ける．つまり，$\mathbf{grad}\,\phi$ の自由度を除いて一意に決まると言って良い.

証明：

これも，下から上は単なる計算で確かめられる．問題はこの逆だね.

まず，定理を満たすようなベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の存在は，実際にそのような $\boldsymbol{A}$ を構成することで証明で

きる．ともかく一つでもそのような $\boldsymbol{A}$ を作れば良いのだから，天下りに答えを与えると，

$$\boldsymbol{A}(x_1, y_1, z_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^{x_1} B_z(x, y_1, z_1)dx \\ \int_0^{y_1} B_x(0, y, z_1)dy - \int_0^{x_1} B_y(x, y_1, z_1)dx \end{pmatrix} \tag{3.6.4}$$

が良いことがわかる．(この $\boldsymbol{A}$ を微分して実際に $\boldsymbol{B}$ がでることを確かめるのは良い練習問題だからやってみると良い.）実のところ，上のような $\boldsymbol{A}$ を自力で作るのはちょっと面倒だったので，適当な本をカンニングした．

一意性については以下のようになる．まず，$\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ ならば，

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}' = \mathbf{rot}\,(\boldsymbol{A} - \mathbf{grad}\,\phi) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} - \mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,\phi = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \tag{3.6.5}$$

なので，$\boldsymbol{A}'$ も正しいベクトルポテンシャルであることがわかる．次に，$\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}'$ ならば，

$$\mathbf{rot}\,(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}') = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \tag{3.6.6}$$

であるが，これはベクトル場 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}'$ が rotation-free であると主張している．すると，定理 3.6.1 から，$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}'$ が gradient の形に書けることが結論できる． □

これまでで，divergence-free または rotation-free なベクトル場が，それぞれスカラーポテンシャル，ベクトルポテンシャルで書けることがわかった．でも一般のベクトル場はこのどちらでもない．そのようなベクトル場に対しては，どのようにポテンシャルを導入すべきなのだろうか？そもそも，ポテンシャルで書けるのだろうか？答えは以下の定理で与えられる．

定理 3.6.3 (一般のベクトルの分解) 任意のベクトル $\boldsymbol{F}$ は，divergence-free な場 $\boldsymbol{B}$ と，rotation-free な場 $\boldsymbol{E}$ の和に分解することができる：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}), \qquad \text{すべての点で}\quad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}, \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{3.6.7}$$

この分解は一意とは限らないが，２つの可能な分解を $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{B}_1$ と $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{B}_2$ とすると，用いて

$$\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1 = \mathbf{grad}\,\psi, \qquad \text{すべての点で}\quad \Delta\psi = 0 \tag{3.6.8}$$

が成り立つようなスカラー関数 ψ が存在する．逆に，$\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{B}_1$ が (3.6.7) を満たしている場合，(3.6.8) で関係づけられた $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{B}_2$ も (3.6.7) を満たす．

この定理から直ちに以下を得る．

系 3.6.4 (一般のベクトル場の「ポテンシャル」) 任意のベクトル $\boldsymbol{F}$ は，適当なスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}) + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.9}$$

と表すことができる．

定理 3.6.3 を仮定した系 3.6.4 の証明

定理 3.6.3 でみつかった $\boldsymbol{E}$ をスカラーポテンシャルで $\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\,\phi$ と，また $\boldsymbol{B}$ をベクトルポテンシャルで $\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ と表せばすぐに出る． □

定理 3.6.3 の証明はそう簡単ではない．少し発見法的にやってみよう．定理の主張のように分解できるとすると，

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{div}\,\boldsymbol{F}, \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{3.6.10}$$

および

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}, \qquad \mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{3.6.11}$$

が成り立つはずである．ここで $\mathbf{div}\,\boldsymbol{F}$ と $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ から決まっている量だから，右辺が与えられたとして，左辺の $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を決めればよいわけだ．つまり問題は，以下の質問の答えを見つけることに帰着する．この質問とその答えはそれなりにヤヤコシイので，以下の小節で行うことにした． □

3.6.1 ベクトルの逆問題

上で必要になったのは，以下のような問題である．

Q 1：与えられたスカラー場 $\psi(\boldsymbol{r})$ に対して，

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r}), \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{0} \tag{3.6.12}$$

を満たすようなベクトル場 $\boldsymbol{E}$ を決定せよ．

Q 2：与えられたベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ に対して，

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.13}$$

を満たすようなベクトル場 $\boldsymbol{B}$ を決定せよ．

以下，この問の答えを発見法的に求め，最後に定理の形でまとめよう．

Q 1 から行く．$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$ だから，何かのポテンシャル ϕ でもって，$\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\,\phi$ と書けているはず．従って，この ϕ をまず求め，それから $\boldsymbol{E}$ を求めることにしよう．

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.14}$$

の両辺の $\mathbf{div}$ をとると，

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \mathbf{div}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.15}$$

となる．ここで出てきた $\mathbf{div}\,\mathbf{grad}$ と言うのはラプラシアンと呼ばれるもので，デカルト座標では

$$\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\phi(x,y,z) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\phi(x,y,z) \equiv \Delta\,\phi(x,y,z) \tag{3.6.16}$$

となっている．ということで，スカラーポテンシャル ϕ は，（もし存在するなら）

$$\Delta\phi(x,y,z) = -\psi(x,y,z) \tag{3.6.17}$$

を満たすべし，と言うことがわかる．逆に，これさえ満たしている ϕ から作った $\boldsymbol{E}$ は題意を満たしていることはすぐにわかるので，問題は (3.6.17) を満たす ϕ を求めることに帰着された．

さてさて，(3.6.17) は Poisson の方程式と言われるもので，（普通に性質の良い）$\psi(\boldsymbol{r})$ に対しては，その解が存在することが知られている．実際，

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\psi(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}|}dv(\boldsymbol{q}) \tag{3.6.18}$$

と定義された $\psi(\boldsymbol{r})$ が (3.6.17) を満たすことは少し頑張れば確かめられる[7]．（ここで，$dv(\boldsymbol{q})$ は，$\boldsymbol{q}$ の 3 つの成分による，単なる 3 重積分を表す）．従って，このような ϕ を持ってきて $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r})$ を作ると，問題の答えが得られるわけだ．

Q 2 も同様に考える．今度は $\boldsymbol{B}$ を与えるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ があるはずである：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.19}$$

[7] 興味のある人への注：電磁気の講義などで聴いたかもしれないが，ここでは $\Delta_{\boldsymbol{q}}\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q})$ の関係に注目するとよい．ここで $\Delta_{\boldsymbol{q}}$ は，$\boldsymbol{q}$ に関するラプラシアンを表す．また，ここでは無限の広さの 3 次元空間で考えているが，有限の領域であっても本質的には同じ事である．

この両辺の $\mathbf{rot}$ をとると，

$$\mathbf{rot}\bigl(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\bigr)=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.20}$$

が得られる．つまり，$\boldsymbol{A}$ は上の方程式の解である必要があるし，逆にこれで十分であることはすぐにわかるだろう．

さて，問題は (3.6.20) はあるのか，あるとしたら何なのかということだが，これについては $\mathbf{rot}$ についての恒等式

$$\mathbf{rot}\bigl(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\bigr)=-\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})+\mathbf{grad}\bigl(\mathbf{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\bigr) \tag{3.6.21}$$

を用いることにする．このままではこいつは扱いにくいが，今は条件を満たすベクトルポテンシャルを少なくとも一つ求めればよいのだから，

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=0 \qquad (\text{すべての } \boldsymbol{r} \text{ で}) \tag{3.6.22}$$

を要求してしまうことにする．すると，$\boldsymbol{A}$ の満たすべき条件は

$$\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.23}$$

となる．これは両辺にベクトルが出ているが，その成分ごとに見ると (3.6.17) と同じ形をしていることがわかるだろう．従って，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}|}dv(\boldsymbol{q}) \tag{3.6.24}$$

ととれば良いことがわかる．

これで一応，Ｑ１，Ｑ２への答えを得たのだが，これらの答えが一意的かどうかにはあまり触れなかった．ポテンシャルから調べていっても良いが，以下のようにベクトルを直接扱うのが簡単である．Ｑ１の答えになる $\boldsymbol{E}$ が２通りあったとして，それらを $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2$ と書こう．これらは

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{E}_i=\psi,\qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}_i=\mathbf{0}\qquad (i=1,2) \tag{3.6.25}$$

を満たしているから，$i=1,2$ の対応する式を引き算すると，

$$\mathbf{div}\,\tilde{\boldsymbol{E}}=0,\qquad \mathbf{rot}\,\tilde{\boldsymbol{E}}=\mathbf{0} \tag{3.6.26}$$

が得られる（$\tilde{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2$）．ここで第２の式は，$\tilde{\boldsymbol{E}}$ が rotation-free であると主張しているから，適当なスカラーポテンシャル $\tilde{\phi}$ を用いて

$$\tilde{E}=\mathbf{grad}\,\tilde{\phi} \tag{3.6.27}$$

と書けるはずだ．これを第一の式に入れると

$$\Delta\tilde{\phi}=\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\tilde{\phi}=0 \tag{3.6.28}$$

が得られる．これが $\tilde{\phi}$ の満たすべき必要条件である．逆に，$\boldsymbol{E}$ が (3.6.12) を満たし，かつ $\tilde{\phi}$ が (3.6.28) を満たすときに， $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}+\mathbf{grad}\,\tilde{\phi}$ も (3.6.12) を満たすことがわかる．つまり，このような $\tilde{\phi}$ は十分でもあるのだ．

つまり，結論として，$\boldsymbol{E}$ は，いたるところで $\Delta\tilde{\phi}=0$ なるスカラー関数 $\tilde{\phi}$ を用いて $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}+\mathbf{grad}\,\tilde{\phi}$ とおきかえても構わない自由度を持っていることがわかる．

Ｑ２の方も同様に，もし $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$ が共に条件を満たしていれば，$\tilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2$ は

$$\mathbf{div}\,\tilde{\boldsymbol{B}}=0,\qquad \mathbf{rot}\,\tilde{\boldsymbol{B}}=\mathbf{0} \tag{3.6.29}$$

を満たすことがわかるが，これは (3.6.26) と同じ形であるから，同じ結論になる．

以上をまとめると以下の命題になる．

命題 3.6.5 Q 1 に対する答えは，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}) + \mathbf{grad}\,\tilde{\phi}, \qquad \phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\psi(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}|}dv(\boldsymbol{q}) \tag{3.6.30}$$

で与えられる．また，Q 2 の答えは，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \mathbf{grad}\,\tilde{\tilde{\phi}}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}|}dv(\boldsymbol{q}) \tag{3.6.31}$$

で与えられる．ここで $\tilde{\phi}, \tilde{\tilde{\phi}}$ は

$$\Delta\tilde{\phi} = 0, \qquad \Delta\tilde{\tilde{\phi}} = 0 \qquad （すべての点で） \tag{3.6.32}$$

を満たす任意の関数である．

定理 3.6.3 の証明

既に $\mathbf{div}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{div}\,\boldsymbol{F}$ かつ $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$，および $\mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ かつ $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,F$ である $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ をみつける必要があることは見ている．問題はこれで十分かということであるが，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}$ となってくれないと困るから，上のようなベクトルを勝手に見つけただけでは不十分だ．

この点を解決するため，まず

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{div}\,\boldsymbol{F}, \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0} \tag{3.6.33}$$

となるようなベクトル $\boldsymbol{E}$ を見つけよう．これは上の命題 3.6.5 で解決済みだ．次に，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{E}$ としてベクトル $\boldsymbol{B}$ を定義する．

すると，

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = \mathbf{div}\,\boldsymbol{F} - \mathbf{div}\,\boldsymbol{E} = 0 \tag{3.6.34}$$

が自動的に成り立っている．つまり，このように作った $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ を用いると，

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}, \qquad \mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0, \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0} \tag{3.6.35}$$

が成り立っている訳だ．これは定理 3.6.3 の条件を満たしているから，そのような $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ の存在が証明された．

一意性については，命題 3.6.5 の証明と全く同じなので，省略する． □

（上の証明を見ると，定理 3.6.3 だけの証明には命題 3.6.5 の Q2 は不要であった — $\boldsymbol{E}$ の方をちゃんと作れば，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{E}$ が Q2 部分の答えを与える．しかし，Q2 はそれ自身で面白いものなので，命題 3.6.5 では Q2 を別途に考察した．

3.6.2 おまけ：Poisson 方程式の解の一意性

上の問題と関連して，またガウスの定理（グリーンの定理）の応用例として，Poisson 方程式

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.36}$$

の解の一意性について触れておこう．

今，上の Poisson 方程式を有限の領域 V で考え，その表面を ∂V と書く．∂V での ϕ の値を与えられた関数 f に固定したとき，ϕ の値は一意に決まるだろうか？（似たような問題として，無限の 3 次元領域 $\mathbb{R}^3$ を考えて，その境界付近では ϕ がゼロになるとして一意性を問うこともできる．）

この問題を考えるため，条件を満たす解が 2 通りあったとし，それらを ϕ_1, ϕ_2 とする．差を $\psi(\boldsymbol{r}) = \phi_1(\boldsymbol{r}) - \phi_2(\boldsymbol{r})$ と書くと，

$$\Delta\psi(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad （すべての\ \boldsymbol{r} \in V\ で） \tag{3.6.37}$$

かつ

$$\psi(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \text{（すべての } \boldsymbol{r} \in \partial V \text{ で）} \tag{3.6.38}$$

が満たされている．従って，このような ψ が恒等的にゼロであることを言えばよい．

ここでガウスの定理（または Green の第一定理）が登場する．Green の第一定理は

$$\int_V \Big(\psi \Delta \psi + (\nabla \psi)^2\Big)\, dxdydz = \int_{\partial V} \psi \nabla \psi \cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.6.39}$$

である．しかし，この右辺は境界で $\psi = 0$ 故にゼロ．また左辺の第一項もゼロ．従って，

$$\int_V (\nabla \psi)^2\, dxdydz = 0 \tag{3.6.40}$$

なのだ．でも，この非積分関数は非負だ．それを積分してゼロならば，非積分関数そのものがゼロと言うことになる．つまり，

$$\nabla \psi = 0 \qquad \text{（} V \text{ の中全部で）} \tag{3.6.41}$$

従って，ψ は V の中全部で一定の値をとるが，表面でゼロなんだから，内部でもゼロしかない． $\square$