問 1： $a > 0$ を定数とする，以下の関数 $f(x)$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を，その上積分，下積分を計算する事により，求めよ.（つまり，分割 P に対する上限和，下限和を計算して，$|P| \to \infty$ の極限をとる.）

ただし，本来は様々な（もちろん，等分割ではない）分割 P について上の極限を計算する必要があるが，これはかなり面倒である．そこで，分割 P が区間 $[0, a]$ を等分割する場合のみを考えても良いものとする．

なお，(c) はちょっと厄介で，上限和，下限和を一般の N で正確に求めようとすると死ぬだろう．ただし，我々の欲しいものは上積分，下積分（$|P| \to 0$ の極限）だから，この極限が計算できれば良いと思えば，決して不可能ではない.

$$(a)\quad f(x) = x, \qquad (b)\quad f(x) = x^2, \qquad (c)^*\quad f(x) = x^N \quad （N は 3 以上の整数）$$

（念のための注）もちろん，この講義で一生懸命やっている事により，高校までの積分の知識はすべて正当化されるから,「原始関数」の概念を使えば，皆さんは上の定積分の値を即座に計算できる（と言うか，高校 2 年生ならできるよね）．しかし，この問題では，敢えてそのような簡単な計算法をとらず，面倒でも区分求積を手でやって頂く（それにより，定積分の感じをつかんでもらう）ことを目指している．

なお，分割 P が等分割になっていない場合に挑戦する事も，もちろん歓迎である.（ただし，講義でやっている一般論，特に「連続関数は積分可能」などを使っては面白くないよね.）

問 2*： （チャレンジ問題）以下の関数 $f(x)$ の定積分 $\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を，問 1 と同じようにして求めよ（α は正の有理数）.

$$(d)^{**}\quad f(x) = x^\alpha, \qquad (e)^{**}\quad f(x) = \sin x$$

（注）これは問 1 の続きだが，かなり難しいので問 1 からは分割してチャレンジ問題とした．特に (d) は...

解答例

問１：

(a), (b), (c) ともに単調増加関数であるから，分割を $P=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ とした場合（$x_0=0, x_n=a$），上限和，下限和は

$$S(f;P)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\,f(x_i),\qquad s(f;P)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\,f(x_{i-1}) \tag{1}$$

となっていて，分割の幅 $|\Delta|$ をゼロにした極限でのこれらの値が上積分，下積分である．

Δ が等分割の場合に具体的に計算してみよう．$x_i=ai/n$ であるから，(a) なら，

$$S(f;P)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{n}\frac{ai}{n}=\frac{a^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{a^2}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{a^2(n+1)}{2n} \tag{2}$$

となり，$n\to\infty$ ではこいつは $a^2/2$ に行く．下限和は $s(f;P)=\dfrac{a^2(n-1)}{2n}$ となるので，$n\to\infty$ では同じく $a^2/2$ に行く．

(b) も同様に，

$$S(f;P)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{n}\Big(\frac{ai}{n}\Big)^2=\frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{a^3}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{a^2(n+1)(2n+1)}{6n^2} \tag{3}$$

下限和は $s(f;P)=\dfrac{a^3(n-1)(2n-1)}{6n^2}$ となるので，$n\to\infty$ ではこれらは共に $a^3/3$ に行く．

(c) も，

$$S(f;P)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{n}\Big(\frac{ai}{n}\Big)^N=\frac{a^{N+1}}{n^{N+1}}\sum_{i=1}^{n}i^N \tag{4}$$

となるので，$\sum_{i=1}^{n}i^N$ の表式がわかれば良いのだが，一般の N で求めるのはなかなか大変だ．しかし，$n\to\infty$ での極限さえわかれば良い訳で，そのためには，$\sum_{i=1}^{n}i^N$ 中の n^{N+1} の項がわかれば十分だ．そこで，結果を見越して，少しずるい事をやってみる．

高校でもやったと思うが，i^N の和は求めにくいけども，$i(i+1)(i+2)\cdots(i+N-1)$ の和は計算できる．実際，

$$\begin{aligned}n(n+1)(n+2)\cdots(n+N)&=\sum_{i=1}^{n}\big\{i(i+1)(i+2)\cdots(i+N)-(i-1)i(i+1)(i+2)\cdots(i+N-1)\big\}\\&=(N+1)\sum_{i=1}^{n}i(i+1)(i+2)\cdots(i+N-1)\end{aligned} \tag{5}$$

となっている．ところが，右辺の和の中身を展開すると，

$$i(i+1)(i+2)\cdots(i+N-1)=i^N+\sum_{l=0}^{N-1}c_l i^l \tag{6}$$

とかけて（c_l は i にはよらない定数），第２項を i について和をとると

$$0\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=0}^{N-1}c_l i^l\le n\times\sum_{l=0}^{N-1}c_l n^l\le\Big(\sum_{l=0}^{N-1}c_l\Big)\times n^N \tag{7}$$

となる．この項は n^{N+1} で割って $n\to\infty$ とすればゼロになる．従って (5)，(6) と組み合わせると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{N+1}}(N+1)\sum_{i=1}^{n}i^N=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{N+1}}n(n+1)(n+2)\cdots(n+N)=1 \tag{8}$$

が得られる．つまり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{N+1}}\sum_{i=1}^{n}i^N=\frac{1}{N+1} \tag{9}$$

であり，これからただちに

$$\lim_{|P|\to 0} S(f;P) = \frac{a^{N+1}}{N+1} \tag{10}$$

が得られる．$s(f;P)$ も同様である．

問 2*：

(d) これは (c) の続きのようなものだが，まあ大変．被積分関数が単調増加ではあるから

$$S(f;P) = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}\Bigl(\frac{ai}{n}\Bigr)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}}\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha}, \qquad s(f;P) = \frac{a^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}}\sum_{i=0}^{n-1} i^{\alpha} \tag{11}$$

となるところまでは今までと同じで，後はこの和の求め方の問題である．いろいろなやり方があろうが，(c) の延長上でやるとすれば，以下のようになるだろう．以下では有理数 α を互いに素な整数 β,γ （$\gamma>1$）をもちいて，$\alpha=\beta/\gamma$ と書く．(α が正の整数の場合は (c) でやったから，考えない．α が整数でなければ，$\gamma>1$ である.)

(5) にならって

$$a_i := \bigl\{i(i+1)(i+2)\cdots(i+\beta+\gamma-1)\bigr\}^{1/\gamma} \tag{12}$$

に対して，

$$\bigl\{n(n+1)(n+2)\cdots(n+\beta+\gamma-1)\bigr\}^{1/\gamma} = a_n = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) \tag{13}$$

を考える．右辺の差は

$$a_i - a_{i-1} = \bigl\{i(i+1)(i+2)\cdots(i+\beta+\gamma-2)\bigr\}^{1/\gamma} \times \bigl\{(i+\beta+\gamma-1)^{1/\gamma} - (i-1)^{1/\gamma}\bigr\} \tag{14}$$

であるので，これをうまく分解したい．まず後ろの因子は（$\delta = 1/\gamma$ と書く）

$$(i+\beta+\gamma-1)^{\delta} - (i-1)^{\delta} = i^{\delta}\Bigl\{\Bigl(1+\frac{\beta+\gamma-1}{i}\Bigr)^{\delta} - \Bigl(1-\frac{1}{i}\Bigr)^{\delta}\Bigr\} \tag{15}$$

であるが，後ろのかっこの中を扱うために不等式（$0<\delta<1$）

$$1+\delta x - \frac{\delta(1-\delta)}{2}x^2 \le (1+x)^{\delta} \le 1+\delta x \qquad (0<x) \tag{16}$$

および

$$1-\delta x - \delta(1-\delta)2^{1-\delta}x^2 \le (1-x)^{\delta} \le 1-\delta x \qquad \Bigl(0<x<\frac{1}{2}\Bigr) \tag{17}$$

を用いよう.（この不等式自身は差をとって微分をやれば証明できる.）$i \ge \beta+\gamma$ であれば，上の不等式を用いて

$$i^{\delta}\,\delta\Bigl\{\frac{\beta+\gamma}{i} - c_{\beta,\gamma,\delta}i^{-2}\Bigr\} \le i^{\delta}\Bigl\{\Bigl(1+\frac{\beta+\gamma-1}{i}\Bigr)^{\delta} - \Bigl(1-\frac{1}{i}\Bigr)^{\delta}\Bigr\} \le i^{\delta}\,\delta\Bigl\{\frac{\beta+\gamma}{i} + c'_{\beta,\gamma,\delta}i^{-2}\Bigr\} \tag{18}$$

が結論できる（$c_{\beta,\gamma,\delta}$ と $c'_{\beta,\gamma,\delta}$ は定数）.

また，(14) の前の因子は大きな定数 $C_{\beta+\gamma}$ を用いて

$$i^{\beta+\gamma-1} \le i(i+1)(i+2)\cdots(i+\beta+\gamma-2) \le i^{\beta+\gamma-1} + C_{\beta+\gamma}i^{\beta+\gamma-2} \tag{19}$$

と書けるから

$$\begin{aligned} i^{\delta(\beta+\gamma-1)} &\le \bigl\{i(i+1)(i+2)\cdots(i+\beta+\gamma-2)\bigr\}^{\delta} \le \bigl\{i^{\beta+\gamma-1} + C_{\beta+\gamma}i^{\beta+\gamma-2}\bigr\}^{\delta} = i^{\delta(\beta+\gamma-1)}\bigl\{1+C_{\beta+\gamma}i^{-1}\bigr\}^{\delta} \\ &\le i^{\delta(\beta+\gamma-1)}\{1+C_{\beta+\gamma}i^{-1}\} \end{aligned} \tag{20}$$

がなりたつ（最後のところでは (16) の不等式を用いた）.

(18) と (20) を (14) とあわせると，最終的に（C_1 は定数）

$$\delta(\beta+\gamma)i^{\delta(\beta+\gamma-1)+\delta-1}(1-C_1 i^{-1}) \le a_i - a_{i-1} \le \delta(\beta+\gamma)i^{\delta(\beta+\gamma-1)+\delta-1}(1+C_1 i^{-1}) \tag{21}$$

つまり，

$$(\alpha+1)i^{\alpha}(1-C_1 i^{-1}) \le a_i - a_{i-1} \le (\alpha+1)i^{\alpha}(1+C_1 i^{-1}) \tag{22}$$

が得られた．

この両辺を $i=1$ から[1] $i=n$ まで和をとって (13) を思い出すと，

$$\Bigl|\sum_{i=1}^{n}(\alpha+1)i^{\alpha} - \bigl\{n(n+1)(n+2)\cdots(n+\beta+\gamma-1)\bigr\}^{1/\gamma}\Bigr| \le \sum_{i=1}^{n}(\alpha+1)C_1\, i^{\alpha-1} \le (\alpha+1)C_1\, n^{\alpha} \tag{23}$$

が得られる．そこで，不等式の両辺を $n^{\alpha+1}$ で割ってから $n\to\infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{i=1}^{n}(\alpha+1)i^{\alpha} = \lim_{n\to\infty}\frac{\bigl\{n(n+1)(n+2)\cdots(n+\beta+\gamma-1)\bigr\}^{1/\gamma}}{n^{\alpha+1}} = 1 \tag{24}$$

つまり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1} \tag{25}$$

が得られる．ああ，しんどかった． $\square$

(e) $a \le \pi/2$ をまず，考える．このとき，被積分関数が単調増加なので，

$$S(f;P) = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\Bigl(\frac{ai}{n}\Bigr), \qquad s(f;P) = \frac{a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\Bigl(\frac{ai}{n}\Bigr) \tag{26}$$

であって，この和を求めたい．高校の時にやったように，倍角公式，半角公式を使ってみよう．答えには cos が出るはずだから，いろいろと試行錯誤する：

$$\cos\Bigl(\frac{a(i+\frac{1}{2})}{n}\Bigr) - \cos\Bigl(\frac{a(i-\frac{1}{2})}{n}\Bigr) = -2\sin\Bigl(\frac{ai}{n}\Bigr)\,\sin\Bigl(\frac{a}{2n}\Bigr) \tag{27}$$

だから，両辺を $\sin(\frac{a}{n})$ で割ってから i について和をとると，

$$\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\Bigl(\frac{ai}{n}\Bigr) = \frac{a}{-2n\,\sin(\frac{a}{2n})}\Bigl[\cos\Bigl(\frac{a(n+\frac{1}{2})}{n}\Bigr) - \cos\Bigl(\frac{-a}{2n}\Bigr)\Bigr] \tag{28}$$

ここで $n\to\infty$ とすると，前のファクターは（$\frac{a}{2n}\to 0$ なので）-1 に収束する．後ろのファクターは $\cos a - 1$ に収束するので，結果として

$$\lim_{|P|\to\infty} S(f;P) = 1 - \cos a \tag{29}$$

となって，もちろん，我々の知ってる結果に一致する．下限和の方も同様である．

問題は $a > \pi/2$ の場合である．このとき，被積分関数 $\sin x$ は $x\pi/2$ では単調増加だが，それ以降は単調減少と単調増加が交互に出てくる．これを考えに入れて上限和，下限和の定義を書き下す必要があるのだが，なかなか面倒くさい.（この面倒くさい事をちゃんとやってくれた人もいた．なかなかよろしい.）

そこで，少しずるい方法を示す．正直，このような問題では，下手すると「連続関数は積分可能」の一般論に戻ってしまいがちで，以下に示すのもちょっとその傾向があるのだが，まあ，良しとしよう.（以下，上限和を考える．下限和も全く同じ）．記号を簡単にするため，$x_i = ai/n$ と書く．

まず，$a < \pi/2$ での上限和の表式（$a > \pi/2$ ではこれは上限和ではないが，敢えて，これを考える）

$$S'(f;P) = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin x_i \tag{30}$$

[1]厳密にいうと，これらの不等式は i が十分に大きいところでのみ成り立つ（$i \ge \beta+\gamma$ とか）．しかし，この不等式が証明されていないところはどっちにしろ有限の i だけだから，それらの i からの寄与は有限であり，$n\to\infty$ での振る舞いには効かない．それでうるさいから $i=1$ から，と書いてしまった．ちゃんとやるには $i\ge\beta+\gamma$ くらいはここに書いてあるようにやって，$i<\beta+\gamma$ からの寄与はともかく有限だ，と議論する

を考えよう．$a < \pi$ での計算と全く同様にして，

$$\lim_{|P|\to\infty} S'(f;P) = 1 - \cos a \tag{31}$$

を示す事ができる．そこで以下では，本当の上限和が上の S' の極限と同じ極限を持つ事を示したい．

さて，$\sin x$ は連続だから，考えている小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ での最大値，最小値をとる x の値はこの区間内に絶対にある．そこで，この区間では $x = \zeta_i$ で最大値がとられたとしよう．すると，上限和は

$$S(f;P) = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\zeta_i \tag{32}$$

となる．これが，上の $S'(f;P)$ と同じ極限に収束する事を示せば良いので，差をとってみる：

$$S(f;P) - S'(f;P) = \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big[\sin\zeta_i - \sin x_i\Big] \tag{33}$$

和の中に入っている差がどのくらいの大きさかが問題だが，

$$\sin\zeta_i - \sin x_i = 2\cos\frac{\zeta_i + x_i}{2}\,\sin\frac{\zeta_i - x_i}{2} \tag{34}$$

と書いた上で，$\cos$ の絶対値は 1 以下であることと，(n が大きければ) $\zeta_i - x_i$ が小さいので $\left|\sin\frac{\zeta_i - x_i}{2}\right| \le \frac{|\zeta_i - x_i|}{2}$ であることを用いると，

$$\big|\sin\zeta_i - \sin x_i\big| \le |\zeta_i - x_i| \le \frac{a}{n} \tag{35}$$

が得られる．従って，

$$\big|S(f;P) - S'(f;P)\big| \le \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{n} = \frac{a^2}{n} \tag{36}$$

が得られて，これは $n \to \infty$ でゼロに行く．これで，本当の上限和 $S(f;P)$ と便宜的（計算のしやすい）和 $S'(f;P)$ が同じ極限を持つ事が示せた．メデタシメデタシ． $\square$