

微分積分学 B (理学部数学科)「中間」テスト

2005.12.21 実施予定

学生番号() 氏名()

注意:

- 問題は 6 問 .
- 問題は難しさの順には並んでいない可能性がある .
- 「極値を求めよ」「極限を求めよ」「積分を求めよ」などという問題では、極値、極限や積分が存在しない可能性もあるから注意せよ (その場合は理由をつけて「存在しない」などと答えれば良い.)
- 紙の裏も使用して良い . ただし、裏を使用する場合は、「裏に続く」などと明記すること .
- 解答に至るまでの道筋、理由等を明記すること (ただし、「答えのみでよい」の問題を除く) .
- 題意などについて不明の点があれば質問は受け付けるので遠慮しないで .
- 面白くない問題ばかりで申し訳ない . どうも最近、研究面での調子がでないので、それがこのテストにまで反映しているようだ (泣) ...

問	点数
1	
2	
3	
4	
5	
計	

問 1 : (約 20 点) x, y がすべての実数値をとるとき, 以下の関数の極大値, 極小値を求めよ. また, それぞれの極値をとる場合の (x, y) も求めよ.

$$(a) \quad f(x, y) = x^4 + 4xy + 2y^2 \quad (b) \quad g(x, y) = x^2 - 2y^4 \quad (c) \quad h(x, y) = x^4 + (y + 1)^2$$

問 2 : (約 10 点) x, y の関数 $f(x, y) = x \sin(xy)$ を, $(x, y) = (1, \pi)$ の周りでテイラー展開し, 2 次の項まで求めよ.

問 3 * : (約 10 点) 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ が, この区間で $f(x) \geq 0$ を満たしているとする. このとき, 区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の最大値を M と書くと,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b \{f(x)\}^n dx \right)^{1/n} = M$$

であることを証明せよ (念のため: 区間 $[a, b]$ と書いたら, 自動的に $a < b$ は仮定します.)

問 4 : (約 20 点) 次の積分を計算せよ. 通常のリーマン積分として解釈できない場合は, 広義積分として解釈する事. ただし, 問題によっては, 積分の値が (広義積分としても) 定義できないものがあるかもしれない (そのような場合はなぜ定義できていないのかを書けば良い.)

$$(a) \quad I_1 = \int_{-1}^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx \quad (b) \quad I_2 = \int_0^\infty e^{-2x} x dx \quad (c) \quad I_3 = \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$$

問 5 : (約 20 点) 次の関数列の $n \rightarrow \infty$ での極限を $x \geq 0$ に対して求めよ. また, その極限への収束が $x \geq 0$ で一様収束であるか否かを判定せよ.

$$(a) \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n} \quad (b) \quad g_n(x) = nx e^{-nx^2} \quad (c) \quad h_n(x) = n \sin\left(\frac{x}{n}\right)$$

問 6 * : (約 20 点) 広義積分に関する以下の小問に答えよ.

(1) $\alpha > 0$ を定数とする. 広義積分 $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{(\sin x)^{\alpha+1}} dx$ は収束するか? 理由 (証明もどき) をつけて答えよ.

(2) $x \geq 1$ で定義された関数 $f(x)$ と定数 $C > 0, \beta > 1$ があって, $|f(x)| \leq \frac{C}{x^\beta}$ が満たされているとき, 広義積分

$\int_1^\infty f(x) dx$ が収束することを証明せよ.

(注意) 小問 (2) に類似したものは「定理」として講義のプリントで配ってあるし, 教科書にも載っている. しかし, この問題では, その「定理」の証明そのものを問うているのである! (そんなに難しい証明ではないから, 良く理解できている人なら十分にできるはず.)

中間テストの解答例と講評 (2006.01.10)

全般的に、点が思ったほど伸びませんでした。特に、もっと点が出て良いはずの人が、ショウモナイ計算ミスで足を引っ張られたケースが目立ちました。皆さんは発達途中だから、こういう事もあり得る訳ですが、ともかく、解答を細部まできちんと書き出してしっかり理解することを日頃から心がけて欲しいと思います。

問 1 : 単純な極大・極小の問題ですが、(b), (c) は少しだけ工夫が必要。

(a) 極値を取る点の候補は $f_x = f_y = 0$ を解いて、 $(0, 0), (1, -1), (-1, 1)$ の 3 つ。このそれぞれを吟味する。そのためにヘシアンを計算しておく

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det H(x, y) = 16(3x^2 - 1)$$

である。

- $(0, 0)$ では $\det H = -16 < 0$ なので、この点は鞍点 (極大でも極小でもない)。
- $(1, -1)$ では $\det H = 32 > 0$ なので極大か極小である。更に $f_{xx} = 12 > 0$ なので、極小とわかる。極小値は $f(1, -1) = -1$ である。
- $(-1, 1)$ も全く同様である。

実のところ、 $f(x, y)$ は「 x, y 同時に符号を変える変換」に関して不変であるから、 $(1, -1)$ の符号を変えた $(-1, 1)$ でも同じになる事は予想できるのだった。

(b) も同様に考えると、極値を取る点の候補は $(0, 0)$ のみで、この点では $\det H = 0$ である。ここで「わからない」と書いた人がいたが、これでは不十分。わからないなら、もっと調べる必要がある。

調べ方には定石はないから、いろいろとやってみるしかない。ただし、この問題は簡単にしておいて、 x -軸、 y -軸上の動きを見てみると、 $a \neq 0$ では $g(a, 0) = a^2 > 0$, $g(0, a) = -2a^4 < 0$ となっている。つまり、ゼロにいくら近くても、 g の値が 正と負の点が混在 している訳である。これは鞍点である事を意味し、極値はとらない。

(c) 同様に考える。極値の候補は $(0, -1)$ のみであり、ここでは $\det H = 0$ で、もっと調べる必要がある。しかしいつでも $h(x, y) \geq 0$ であり、かつ等号は $x = 0, y = -1$ のときにしか成立しない。という訳で、 $(0, -1)$ は極小 (実は最小) になっていて、極小値は $h(0, -1) = 0$ 。

(注意) この (c) では (b) よりも注意が必要だ。(b) では鞍点である事を言いたかったので、何でも良いから 2 方向を見つけて「この方向ではプラス、あの方向ではマイナス」と言えば良かった。しかし (c) では $(0, -1)$ の周り、どの方向に行っても $f(x, y) > 0$ と言う必要があるから、単に x -軸や y -軸に平行なところだけ見ていては不十分である。この点を間違えた人が非常に多かったので、注意されたし。

問 2 : 計算するだけである。テイラー展開を 2 次まで書くと

$$f(x, y) = f(a, b) + f_1(x - a) + f_2(y - b) + \frac{1}{2} \left[f_{11}(x - a)^2 + 2f_{12}(x - a)(y - b) + f_{22}(y - b)^2 \right] + o(\|x - a\|^2) \quad (1)$$

である (f_1, f_2 などは f の第 1, 第 2 の引数に関する微分。また、微分は点 (a, b) での値)。これに偏微分の結果

$$f_1(x, y) = \sin(xy) + xy \cos(xy), \quad f_2(x, y) = x^2 \cos(xy)$$

$$f_{11}(x, y) = 2y \cos(xy) - xy^2 \sin(xy), \quad f_{12}(x, y) = -x^2 y \sin(xy) + 2x \cos(xy), \quad f_{22}(x, y) = -x^3 \sin(xy)$$

を代入して計算すれば良い。結果は

$$f(x, y) = -\pi(x - 1) - (y - \pi) - \pi(x - 1)^2 - 2(x - 1)(y - \pi) + o((x - 1)^2 + (y - \pi)^2)$$

である。

- テイラー展開の式 (1) 自身が怪しい人、特に 2 次の項の $\frac{1}{2}$ や 2 のない人が散見された。うろ覚えで使わずに、自分で導くべきだ。少なくとも、1 変数の時と矛盾しないかどうか考えれば、 $\frac{1}{2}$ を忘れる事はないはずだよ。

- $(1, \pi)$ の周りの展開なのに, $x - 1$ や $y - \pi$ の代わりに単なる x, y を使っている人もいたぞ ...
- 偏微分の値を $(1, \pi)$ で求めるところで間違っただけ目についた .

問 3 : これはまあ, ちょっと難しかったろうとは思ふ . 何人か, かなり良いところまで行った人はいたのだが ...
 $\limsup, \liminf$ をうまく使うと, 以下のように簡単だ .

まず, $\{f(x)\}^n \leq M^n$ の両辺を a から b まで積分して,

$$\int_a^b \{f(x)\}^n dx \leq \int_a^b M^n dx = (b-a) M^n \quad \Rightarrow \quad \left[\int_a^b \{f(x)\}^n dx \right]^{1/n} \leq (b-a)^{1/n} M$$

を得る . これから ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b \{f(x)\}^n dx \right]^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (b-a)^{1/n} M = \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a)^{1/n} M = M \quad (2)$$

が得られる . ここで任意の正の数 A に対して ,

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} A^\epsilon = A^0 = 1 \quad (3)$$

であることを使った . これはまあ, アタリマエだわな .

問題は逆向きの不等式だ . 被積分関数が M^n に近ければ良いのだが, そうとは言い切れないから困ってしまう .
 でも (3) を思い出すと, 少しは光が見えてくる . 別に $[a, b]$ のすべてで M^n になってなくても良い — $[a, b]$ の一部でも, とにかくゼロでない長さのところでは M^n に近ければ良い .

それでも被積分関数は大抵, M^n より少し小さいはずなのだ . その「少し小さい」を扱うために, $\epsilon - \delta$ を用いる . $f(x)$ の最大値 M が $x = x_0$ で実現されるとしよう — もちろん $x_0 \in [a, b]$. また, 最大値をとる x が複数ある場合は, そのうちのどれでも良いから一つを x_0 をすれば十分だ . そして任意に ϵ を ($0 < \epsilon < M$ となるように) まず決める . すると $f(x)$ が連続なので, $\delta(\epsilon) > 0$ が存在して

$$x \in [a, b] \text{ かつ } |x - x_0| < \delta(\epsilon) \text{ ならば } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

がなりたつ . $\delta(\epsilon) < b - a$ ととることにし, $f(x_0) = M$ であることも考慮すると, 上のは

$$x \in [a, b] \text{ かつ } |x - x_0| < \delta(\epsilon) \text{ ならば } f(x) > M - \epsilon$$

ということだ . これから特に ($x_0 \in [a, b]$ なので) $f(x) > M - \epsilon$ となる $x \in [a, b]$ の範囲は, 少なくとも $\delta(\epsilon)$ の長さを持っていることが結論できる .

$f(x) > M - \epsilon$ ならば $\{f(x)\}^n > (M - \epsilon)^n$ であるから ,

$$\int_a^b \{f(x)\}^n dx \geq \delta(\epsilon) \times (M - \epsilon)^n \quad \Rightarrow \quad \left[\int_a^b \{f(x)\}^n dx \right]^{1/n} \geq \delta(\epsilon)^{1/n} (M - \epsilon) \quad (4)$$

が結論できる . これから

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b \{f(x)\}^n dx \right]^{1/n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \delta(\epsilon)^{1/n} (M - \epsilon) = M - \epsilon \quad (5)$$

が得られる . ところが, $\epsilon > 0$ は任意だったから, これはすなわち

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b \{f(x)\}^n dx \right]^{1/n} \geq M \quad (6)$$

を意味する . (2) と合わせると, これらから

$$M \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b \{f(x)\}^n dx \right]^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b \{f(x)\}^n dx \right]^{1/n} \leq M \quad (7)$$

が得られた． $\liminf, \limsup$ が一致するので，極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b \{f(x)\}^n dx \right]^{1/n}$ が存在し，その値は M に等しい．□

問 4：広義積分の問題も少しは混じってますが，とにかくやるだけです．

(a) これは出題ミスというほどではないけど，ちょっと失敗．まずは「正しい」解答から．

被積分関数は奇関数なので， $[-1, 1]$ での積分の結果はゼロである．従って残るのは $[1, 2]$ での積分の結果で，これは $x^2 = t$ とでもおくと

$$\int_{-1}^2 \frac{x}{x^2+1} dx = \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{dt}{t+1} = \frac{1}{2} [\log(t+1)]_1^4 = \frac{1}{2} \log(5/2)$$

上のような事を考えずに，単に $x^2 = t$ において $[-1, 2]$ の積分をやっても答えは一緒になる．ただし，この場合は $[-1, 0]$ と $[0, 1]$ が考えられていないように見える（もしかしたらちゃんと考えた人がいたのかも知れないけど）ので，ちょっと問題だ．ただ，採点上はややこしくなるので，区別はせず，みんな良しとした．

(b) 定義通りに計算する．まず不定積分を部分積分で求めておくと

$$\int e^{-2x} x dx = -\frac{e^{-2x}}{2} x - \frac{e^{-2x}}{4}$$

なので，

$$\int_0^\infty e^{-2x} x dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L e^{-2x} x dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-2x}}{2} x - \frac{e^{-2x}}{4} \right]_0^L = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-2L}}{2} L - \frac{e^{-2L}}{4} + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4}.$$

なお，積分の下限を代入する際に，なぜか知らないが答えをゼロとしている人がかなりたくさんいた．注意されたし．

(c) 受験数学でやったはずの部分分数に分ける奴ですがねえ... もう忘れてしまいましたか？

$$\begin{aligned} I_3 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \frac{1}{x^2+3x+2} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\log\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \right]_0^L \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\log\left(\frac{L+1}{L+2}\right) - \log(1/2) \right]_0^L = 0 - \log(1/2) = \log 2. \end{aligned} \quad (8)$$

なお，この問題では $\lim_{L \rightarrow \infty}$ の中で部分分数に分けているから， $\frac{1}{x+1}$ と $\frac{1}{x+2}$ の積分結果には当然，同じ $x = L$ を代入すべきである．

問 5：これもまあ，やってみるだけです．一様収束かどうかの判定は確かにちょっと難しかったかも．

(a) x が 1 より大きい小さいか等しいかに分けて計算すれば

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ \frac{1}{2} & (x = 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases} \quad (9)$$

はすぐにわかる（この極限を $f(x)$ と書く）．収束が一樣かどうかは $\sup_x |f_n(x) - f(x)|$ を計算してみるとよい． $x = 1$ の近傍を考えると（ x を 1 に十分近く — n に依存して — とると） $|f_n(x) - f(x)|$ はいくらでも $1/2$ に近づける．従って n によらず $\sup_x |f_n(x) - f(x)| = 1/2$ であり，収束は一樣ではない．

なお，この問題で定理「連続な関数の列が一樣収束すれば極限関数も連続である」の対偶をとって，「極限関数が不連続だから一樣連続ではない」と結論した人が多かった．これは全く正しい論理だが（テスト中にも言ったように）この問題では一樣収束の定義から直接示して欲しかったので，減点してある．

(b) 極限は 0．なぜなら， $x = 0$ ではもちろん $g_n(0) = 0$ だし， $x > 0$ では e^{-nx^2} が前の nx よりもずっと小さくなるから．

一樣かどうかについては， $g_n(x)$ の最大値を求めてみるのが一番確実だが（特に，一樣である事を示すにはこれが絶対に必要），今は一樣でないことを示したいので，もっとずるい手がある．つまり，適当な x の値を代入して

そこでの $g_n(x)$ がゼロに行かない事をいえばよろしい．こういうのは大体，指数関数の肩が 1 くらいのところが大事だから，やってみると，

$$g_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n}{\sqrt{n}}e^{-1} = \frac{\sqrt{n}}{e}$$

である．つまり， $\sup_{x \geq 0} |g_n(x) - 0| \geq \frac{\sqrt{n}}{e}$ であって，こいつはゼロに行かない．従って一様収束ではない．

(c) 気がつかないかもしれないけど， x を固定してると $\frac{x}{n}$ は ($n \rightarrow \infty$ で) ゼロに行くんだから，適当にテイラー展開でも何でもすれば感じはわかるはず．かっこよくやるには

$$n \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \times x \longrightarrow x$$

とする．収束が一様かどうかについては， $\sup_{x \geq 0} |x - h_n(x)|$ を見てやれば良いが， $x = \pi nm$ (m は正の整数，任意) ではいつでも $h_n(x) = 0$ だから，

$$\sup_{x \geq 0} |x - h_n(x)| \geq \pi nm$$

がなりたつ． m は任意なので，これは各 n で既に無限大だ．という訳で，一様ではない．

問 6：これは 2 つとも少しは難しかったと思う．

(a) これは発散する．「発散する」という予想が立てば，その証明はそんなに難しくない．

$$x \geq 0 \text{ では } \sin x \leq x \implies \frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{x} \implies \frac{x^\alpha}{(\sin x)^{\alpha+1}} \geq \frac{x^\alpha}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{x}$$

を用いて，積分を評価すると良い：

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{(\sin x)^{\alpha+1}} dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{x^\alpha}{(\sin x)^{\alpha+1}} dx \geq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0} |\log \epsilon| = +\infty$$

(b) 広義積分の定義から $\int_1^\infty f(x) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_1^L f(x) dx$ だが，右辺の極限は「行き先がわからない極限の問題」である．だから，「コーシーの判定条件」を使うのが自然だ．今の場合，コーシーの条件は

$$\forall \epsilon > 0 \exists M(\epsilon) \quad M(\epsilon) < L_1 < L_2 \implies \left| \int_{L_1}^{L_2} f(x) dx - \int_1^{L_2} f(x) dx \right| < \epsilon \quad (10)$$

であるので，これを以下で証明する．上に出ている積分の差は $\int_{L_1}^{L_2} f(x) dx$ であるので，これを評価すれば良い．さて，

$$\left| \int_{L_1}^{L_2} f(x) dx \right| \leq \int_{L_1}^{L_2} |f(x)| dx \leq \int_{L_1}^{L_2} \frac{C}{x^\beta} dx = \frac{C}{\beta-1} \left\{ (L_1)^{1-\beta} - (L_2)^{1-\beta} \right\} \leq \frac{C}{\beta-1} (L_1)^{1-\beta} \quad (11)$$

であって，これは L_1 を大きくすればいくらでも小さくできる．つまり， M を $\frac{C}{\beta-1} M^{1-\beta} \leq \epsilon$ となるようにとれば，(10) のコーシーの条件を満たさせる事ができる．よって極限 $\lim_{L \rightarrow \infty} \int_1^L f(x) dx$ の存在が証明された． $\square$

(注) なお，(b) で「 $\int_1^\infty |f(x)| dx$ が収束するので (絶対値なしの) $\int_1^\infty f(x) dx$ も収束する」と議論した人も幾人かいたが，これは (このままでは) 正しくない論理である．例えば，

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数}) \\ -1 & (x \text{ が無理数}) \end{cases}$$

とすると， $\int_0^1 |f(x)| dx$ は存在するが $\int_0^1 f(x) dx$ は存在しない．