１０月１９日：今日は「極大・極小問題」の続きを少しやってから，もう「積分」に入ります．実は極大・極小問題にはまだ一つ二つの山場（n 変数の場合，条件付き極値問題）がありますが，これらはもう少し経たないと難しい（「条件付き極値問題」は今からでもやれますが，そのためには「陰関数定理」をちゃんとやる必要があり，これが大変）．すこしだけど教科書と順序が違うので注意.
（予告）１１月４日（金）の３限の演習の時間は石井先生が出張のため演習は行わず，代わりにこの「微積 B」の講義を行います（場所は 23 で）．他クラス聴講などで不都合な人は事前に連絡してください.

4 積分

積分については高校でも習ってはいるが，その基礎を突き詰めていくといろいろと困ったことがでてくる．特に「積分は微分の逆演算」として定義すると,「ある関数 f の積分を求めよ」という問題や「この関数の積分は定義できるか？」という問題でハタと困ってしまう.（微分して f になるような関数がわからない場合，高校までの知識ではお手上げだ.）この節では高校までの知識はいったん忘れて,「積分とは何か」「積分をどのように定義すべきか」から話を始める．その後で高校で習ったこととの関連をつけ，更に積分のいろいろな性質を見ていくことにしよう.

4.1 積分（定積分）の定義

ということで，まずやるべきは「与えられた関数 $f(x)$ に対して，その積分を定義すること」である．これから見ていくように，かなり広いクラスの関数に対してその積分（定積分）を定義することができる．定積分を通して不定積分も定義できるので，高校までの知識とのつながりがつくことになる.

$f(x)$ を適当な（例えば連続な）関数とし，簡単のために $f(x) > 0$ とする．$a < b$ を定めたときの定積分 $\int_a^b f(x)dx$ とは直感的には区間 $[a, b]$ 上での $y = f(x)$ のグラフと x-軸との間の図形の面積である．しかし,「面積とは何か」自体が定義を要する問題である．そこで，この講義では，以下のようにして面積と定積分を同時に定義していくことにする.

なお，教科書では以下よりも簡単な定義をまず採用し，以下の定義に相当するものは後から出てくる形になっている．しかし，僕は積分の最も素朴な定義はこれから紹介する「リーマン和」に基づくもので，教科書のように簡単化してはかえって本質が見えにくくなると思う．そこで話が少しややこしくなることを厭わずに，敢えて「通常の」積分の定義を行うことにした.

定義 4.1.1 (定積分) $a < b$ と．区間 $[a, b]$ で定義された関数 $f(x)$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を以下のように定義する（下図を参照）.

- まず，区間 $[a, b]$ を n 個（n は大きな整数）の小区間に分ける：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. これを区間 $[a, b]$ の 分割 といい，P で表す．できる小区間は $[x_{i-1}, x_i]$ である（$i = 1, 2, \ldots, n$）．小区間の幅の最大値を $|P|$ と書く：$|P| = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$．この $|P|$ は教科書では $d(P)$ と書かれているが，後々でいろいろと括弧が出てきて面倒なので $|P|$ と書くことにした.
- 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に勝手に点 ζ_i をとる（$i = 1, 2, \ldots, n$）．簡単のために $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ をまとめて $\vec{\zeta}$ と書く.
- 上のように決めた $P, \vec{\zeta}$ に対して，リーマン和

$$R(f; P, \vec{\zeta}) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,(x_i - x_{i-1}) \tag{4.1.1}$$

を計算する.

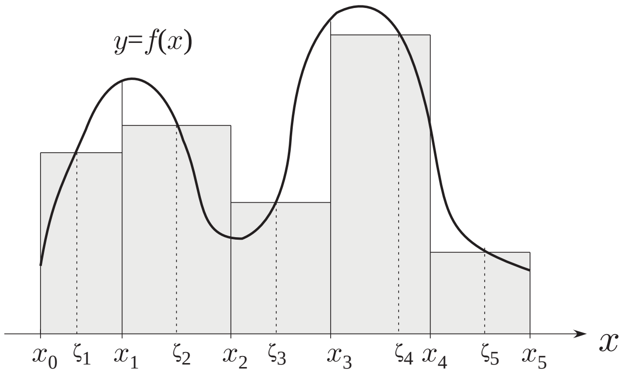
- さて，$|P|\to 0$ を満たすような任意の P と，P に対して上のようにとった任意の $\vec{\zeta}$ を考える．$|P|\to 0$ の極限で $R(f;P,\vec{\zeta})$ の値が（$P,\vec{\zeta}$ の取り方によらず）一定の値に近づくならば，$f(x)$ は $[a,b]$ 上で積分可能（または可積分）といい，その極限値を定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値と定める．模式的に数式で書けば

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \text{“}\lim_{|P|\to 0}\text{”}\ R(f;P,\vec{\zeta}) \tag{4.1.2}$$

とするのである（上の極限はかなり複雑なので“ ”を付けた）．

最後に，$a=b$ の場合は $\displaystyle\int_a^a f(x)dx=0$ と定義する．また，$a>b$ の場合は $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ と定義する．（$a>b$ の時の定義はもちろん，$\displaystyle\int_b^a f(x)dx$ が定義できる時のみ有効である．）このようにして定義した積分をリーマン式積分，またはリーマン積分という．

$f(x)>0$ の場合の模式図（$n=5$）を以下に示した．図で陰をつけた部分の面積がこの場合の $R(f;P,\vec{\zeta})$ である．



図を見ればわかるように，この定義は大体において，面積の近似値を作るだろうと予想される．少なくとも，上の極限が存在する場合にこの値を面積とすることに異論はないだろう．非常に大きな問題はこの極限がいつ存在するのか（面積がいつ定義できるのか），そもそもこのような極限が存在する関数（つまり可積分な関数）は存在するのか，であるが，これは次の節で詳しく考察する．

ここではまず，定積分とは，グラフの下の図形の面積を細い短冊の和で近似する（近似したい）ものである，ということをはっきりと認識してほしい[1]．

（注）繰り返しになるが，ここで学んでいる定積分の定義から出発して高校でやった「原始関数」につなげていくことはこの後で行う．この意味で，これからやることは高校での積分の導入に厳密な根拠を与える作業である．

4.2 定積分はいつ定義できるのか？

先に注意したように，定義 4.1.1 の極限値 (4.1.2) はいつも存在するとは限らない．例えば，

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\text{ が有理数の時})\\ 1 & (x\text{ が無理数の時})\end{cases} \qquad \text{に対して} \qquad \int_0^1 f(x)dx \tag{4.2.1}$$

を考えても，これは定義 4.1.1 では定義できない．（なぜ定義できないのか，各自で納得するまで考えること．）このような関数に対しても「積分」を定義しよう，というのが Lebesgue が彼の博士論文で提唱した「ルベーグ積分」である．いろいろな意味で，ルベーグ積分の方がリーマン積分より自然な積分だと僕は考えるが，その厳密な理論はそれなりに大変なので，この講義ではルベーグ積分は扱わない．

これから積分の厳密な構築に入る．ちょっと理論的でうるさいところではあるが，大事なところだから，大筋だけでも理解するように心がけてほしい．その際にキーになるのは

[1] 煎じ詰めれば「積分は和のお化け」である．ついでに「微分は差のお化け」である

- 定積分は定義できなくても,「上積分」「下積分」はいつでも定義できること（Darboux の定理，以下の定理 4.2.1）
- 定積分が定義できる必要十分条件は上積分と下積分の値が等しいこと（定理 4.2.2）
- 定積分が定義できる十分条件の一つは f が連続関数であること（定理 4.2.3）

である．特に 3 番目の「連続関数は可積分である」は非常に重要だから，結果だけでも頭に叩き込んでおくように！

まず,「上積分」などの定義から始めよう．ここでは区間 $[a, b]$ で定義された有界な関数 $f(x)$ に話を限る．$f(x)$ が有界でない場合や $[a, b]$ が有限の区間でない場合は，後（4.4 節）で「広義積分」として取り扱う．

- 分割 P に対して以下のように定義する：区間 $[x_{i-1}, x_i]$ における $f(x)$ の下限と上限を $m_i(f; P), M_i(f; P)$ と書く．そして

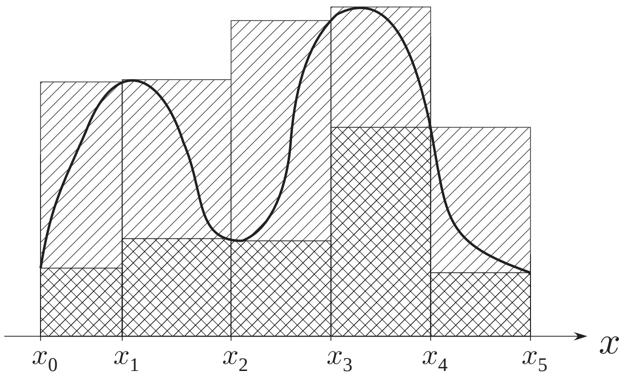
$$s(f; P) \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i(f; P) \times (x_i - x_{i-1}), \qquad S(f; P) \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i(f; P) \times (x_i - x_{i-1}) \tag{4.2.2}$$

  を定義する．$s(f; P)$ を下限和，$S(f; P)$ を上限和という．
- 更に，様々な細かさの P を考え，

$$s(f) = \sup\{s(f; P) \,|\, P \text{ は } [a, b] \text{ の分割 }\}, \qquad S(f) = \inf\{S(f; P) \,|\, P \text{ は } [a, b] \text{ の分割 }\} \tag{4.2.3}$$

  も定義する．$s(f)$ を下積分，$S(f)$ を上積分という．

$n = 5$ の場合の例を以下に示した．右上から左下への斜め斜線のところの面積が上限和，左上から右下への斜め斜線のところの面積が下限和である．ただし，図では下限和に相当する部分は両方の斜め線が入って十文字の模様になっている．



上の定義から，分割内の分点 $\vec{\zeta}$ の取り方にかかわらず，

$$s(f; P) \le R(f; P, \vec{\zeta}) \le S(f; P) \tag{4.2.4}$$

であることに注意しておこう（上の 2 つの図を比べてみよ）．

次の定理は，$s(f; P)$ や $S(f; P)$ は，それぞれが極限を持つことを保証する．

定理 4.2.1 (Darboux の定理) 分割 P を限りなく細かくする（$|P| \to 0$）とき，下限和と上限和はそれぞれ一定の値に収束し，その行き先は (4.2.3) で定義された s と S である．つまり，

$$\lim_{|P| \to 0} s(f; P) = s(f), \qquad \lim_{|P| \to 0} S(f; P) = S(f) \tag{4.2.5}$$

がなりたつ.（ただし，$s(f) = S(f)$ とは限らない.）

では，上積分・下積分と積分可能性の関係はどうか？それぞれの P に対しては $s(f; P) \le S(f; P)$ だったから，

$$s(f) \le S(f) \tag{4.2.6}$$

であることはわかる．問題は上積分と下積分がいつ等しいかだ — 関数 f や区間 $[a,b]$ の取り方によってはこの 2 つは等しくないこともある．しかし，この 2 つが等しいことは定義 4.1.1 の積分可能性と同値だ，というのが次の定理である．

定理 4.2.2 (積分可能性の必要十分条件) f が区間 $[a,b]$ 上で積分可能である必要十分条件は，上積分と下積分が一致することである．つまり

$$s(f) = S(f) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ は可積分で，} \int_a^b f(x)dx = s(f) = S(f) \tag{4.2.7}$$

これで積分可能性の一般論はおしまいである．しかしこのままでは，与えられた関数に対して上積分，下積分を計算しないと積分可能かどうかがわからない．これは不便だから，積分可能性の簡単な十分条件を挙げておく：

定理 4.2.3 (連続関数は積分可能) 関数 $f(x,y)$ が区間 $[a,b]$ 上で連続なら，f は $[a,b]$ 上で積分可能である．また，有限個の点を除くと連続な場合も積分可能である．

講義ではこれらの定理の証明（説明）を行う．少し難解かもしれないが，大事なところだし，$\epsilon - \delta$ の非常に良い練習問題にもなっているから，ちょっと辛抱して欲しい．なお，残念ながら証明がチンプンカンプンな人も，諦める必要はない．次回からの積分の応用を勉強すれば，証明がわからなくても単位を取る事は十分に可能だ．

理解を深める問題：

高校の時にもやったかもしれないが，良く知っている関数に対して，上積分，可積分を計算しよう．例えば，積分区間は $[-1,1]$ にして，$f(x) = x^2, x^3$ など，いくつかやってみることを強く奨める．

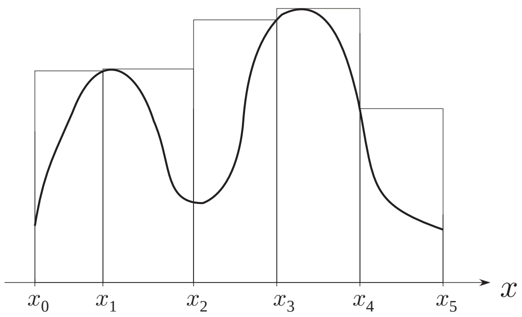
１０月２６日：今日は「積分の理論」の続きです．
来週の水曜日はお休みらしいですが，金曜日（11/4）の演習の時間をこの講義に振り替えます．
（重要な補足）この講義での「極大」「極小」の定義は，教科書では「広義の極大」「広義の極小」をも含んでいる．つまり，この講義では，$\boldsymbol{a}$ の近傍で $f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{a})$ の場合を「極大」といっているが，これではこの近傍中に $f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x})$ なる $\boldsymbol{x}$ がある場合も含んでいる．
これに対し，教科書ではこの近傍で $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$ なら常に $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{a})$ となっている場合を「極大」と言っている．この意味の極大を「狭義の極大」という事もある．

4.2.1 定理 4.2.1 と定理 4.2.2 の証明

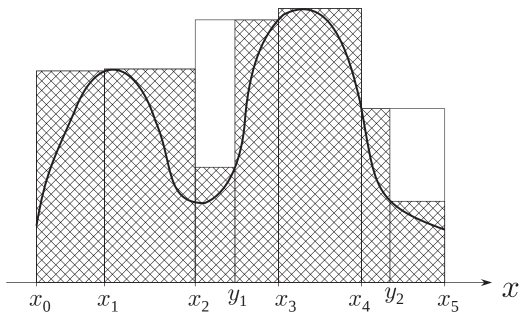
定理 4.2.1 の証明の基本になるのは，以下の性質である．定理 4.2.2 の方は定理 4.2.1 からすぐに出る．

補題 4.2.4 $S(f;P)$ は，分割を細かくすると減少する．より正確にいうと，区間 $[a,b]$ の勝手な分割 P_1, P_2 をとってきて，これを合わせた（つまり，両方の分割の分点を全部集めた）分割を $P_{12} = P_1 \cup P_2$ と書くと，$S(f;P_{12}) \le S(f;P_1)$ および $S(f;P_{12}) \le S(f;P_2)$ である．
同様に，$s(f;P)$ は分割を細かくすると増加する．

この補題は，$S(f;P)$ の定義からほとんどあたりまえである．以下にこの事情を図で例示した．



P_1



$P_1 \bigcup P_2$

左側の図（の長方形の下の面積）が $P_1 = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ のみの場合の $S(f;P_1)$ である．一方，$P_2 = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ を考えると（$y_0 = a, y_3 = b$），右側の図の陰をつけた部分の面積が $P_1 \cup P_2$ の場合の $S(f;P_1 \cup P_2)$ である．図に示すように，白い２つの長方形の部分だけ，$S(f;P_1 \cup P_2)$ が小さくなっている． □

（注）上ではわかりやすいようにわざと不正確な書き方をしたが，本来は「$S(f;P)$ は，分割を細かくすると<u>増加しない</u>」と書くべきであった．同様に，「$s(f;P)$ は，分割を細かくすると<u>減少しない</u>」が正しい．

以下ではこの補題を用いて定理 4.2.1 と定理 4.2.2 を証明する．

定理 4.2.1 の証明 S の方のみ，証明する．s のほうも，いくつかの不等号の向きが逆になるだけで同じだ．
ちょっと考えると，定理 4.2.1 は当たり前に思える．なぜなら，補題 4.2.4 より，$S(f;P)$ は単調減少っぽく見えて,「有界な単調減少列は極限を持つ」から．しかし，これは早とちりだ．というのは，補題 4.2.4 は「P をより細かくしたら $S(f;P)$ は非増加」と言っているだけで，<u>他の分割から出発して</u> 細かくした行き先が， この P から出発した行き先と等しいかどうかは保証の限りではない．この問題を解決するため，以下のように進む．
まず inf としての $S(f)$ の定義から，どんな分割 P に対しても $S(f) \le S(f;P)$ であることに注意しておこう：

$$\forall P, \quad S(f) \le S(f;P). \tag{4.2.8}$$

また，$S(f)$ は $S(f;P)$ の inf であるから，$S(f)$ と $S(f;P)$ の差がいくらでも小さくなるような分割 P もある：

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists P, \quad S(f;P) \le S(f) + \epsilon. \tag{4.2.9}$$

問題は，(4.2.9) が $|P'| \to 0$ なる任意の P' に対して成り立つか，つまり

$$(??) \qquad \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0, \quad |P'| < \delta \implies S(f;P') \le S(f) + \epsilon \qquad (??) \tag{4.2.10}$$

となっているか，ということである．

そこでまず，(4.2.8) の P を固定し，十分細かい分割 P' を,「P' の各ブロック内に P の分点が高々一つしかない」ようにとる．これは $|P'|$ を $|P|$ より小さくとれば絶対に実現できる．次に，P と P' を合わせた分割を考えると，これは P, P' よりも細かいので，細かい方の S の値が小さくなる：

$$S(f; P \cup P') \le S(f;P). \tag{4.2.11}$$

一方，n を P の分点の数，M, m は $[a,b]$ 内での f の上限と下限とすると，

$$S(f;P') - S(f;P \cup P') \le n(M-m)|P'| \tag{4.2.12}$$

が成り立つ．なぜなら，左辺の差への寄与は P' の分割ブロック中に P の分点が入っているときのみゼロでないが，このような分点の数は最大で n 個しかなく，そのような一つのブロックからの寄与は $(M-m)|P'|$ で押さえられるからだ（ここのところは図で納得するのがよい）．(4.2.11) と (4.2.12) から

$$S(f;P') \le S(f;P \cup P') + n(M-m)|P'| \le S(f;P) + n(M-m)|P'| \tag{4.2.13}$$

が結論できた．これと (4.2.9) を組み合わせると

$$S(f;P') \le S(f;P) + n(M-m)|P'| \le S(f) + \epsilon + n(M-m)|P'| \tag{4.2.14}$$

が得られる．さてここで P' を十分細かく，$n(M-m)|P'| < \epsilon$ となるようにとると（ここで，n は P のみで決まり，P' には関係ないことが効いている），

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0, \quad |P'| < \delta \implies S(f;P') \le S(f) + 2\epsilon \tag{4.2.15}$$

が言える．よって,（ϵ は任意だから 2ϵ を ϵ と思い直して）(4.2.10) が結論できる． □

定理 4.2.2 の証明

（十分であること）Darboux の定理の証明中，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ がとれて，

$$|P| < \delta \text{ ならば } \quad S(f;P) < S(f) + \epsilon \quad \text{かつ} \quad s(f;P) > s(f) - \epsilon \tag{4.2.16}$$

であることを見た — (4.2.15) 式．ところで，その定義から，リーマン和は

$$s(f;P) \le R(f;P,\vec{\zeta}) \le S(f;P) \tag{4.2.17}$$

を満たす．従って，$|P| < \delta$ である限り，どんな分割でも，どんな分点 $\vec{\zeta}$ の取り方に対しても，

$$s(f) - \epsilon \le s(f;P) \le R(f;P,\vec{\zeta}) \le S(f;P) \le S(f) + \epsilon \tag{4.2.18}$$

が成り立つことがわかる．ここでもし，定理の仮定のように $s(f) = S(f)$ であれば，$\delta \downarrow 0$ として（このとき，もちろん $\epsilon \downarrow 0$）

$$\lim_{|P| \to 0} R(f;P,\vec{\zeta}) = s(f) = S(f) \tag{4.2.19}$$

が結論できる．リーマン和の極限が確定するから，積分可能である．

（必要であること）ほとんど自明である．というのも，$S(f) - s(f) = c > 0$ と仮定すると，sup, inf としての定義から，

$$s(f;P) \le s(f) = S(f) - c \le S(f;P') - c \tag{4.2.20}$$

が勝手な P, P' に関して成り立つ．つまり，いくら頑張っても $S(f;P)$ と $s(f;P')$ のギャップを埋めることはできず，リーマン和の極限が存在しない（そのような分点をいくらでもとれる）．従って積分不可能である． □

4.2.2 一様連続性

定理 4.2.3 の証明のキーになるのは，以下の「一様連続性」と呼ばれる性質である．これは非常に大事な概念なので，少し詳しく述べておこう．この小節の内容は教科書の 3.1 節．

関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続とは，$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ であることだった．また，関数 $f(x)$ が区間 $[a.b]$ の各点で連続とは，その字のごとく，$[a,b]$ の中の任意の点 c にて $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ となることであった．これを $\epsilon-\delta$ で書いてみると，

$$\forall c \in [a,b] \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon, c) > 0 \qquad |x-c| < \delta(\epsilon, c) \implies |f(x)-f(c)| < \epsilon \tag{4.2.21}$$

ということになる．δ は ϵ に依存するのはもちろんであるが，一般には c にも依存する．特に $c\to\infty$ や $c\to 0$ で $\delta(\epsilon,c)$ がゼロになってしまうことも良くある．実はこのような例は期末テストや中間テストでも出題していた（例：$\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{1}{x}$ を $\epsilon-\delta$ で求め，δ の取り方をも示せ，など）．ともかく，このような連続性は単に「連続」または「各点連続」という．

ところが，関数 $f(x)$ と考えている区間 $[a,b]$ の取り方によっては，上の $\delta(\epsilon,c)$ を c によらずにとれる，つまり $[a,b]$ 内のすべての c に共通の $\delta(\epsilon)$ をとれる，場合がある．このような場合，$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で <u>一様連続</u> であるという．数式で書けば，

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) \quad \forall c \in [a,b] \qquad |x-c| < \delta(\epsilon) \implies |f(x)-f(c)| < \epsilon \tag{4.2.22}$$

となる場合，$f(x)$ は一様連続というのである．(c と δ の順序に注意！）

Remark. 「一様」という概念は $\epsilon-\delta$ の次に待ち受けている，大きな難関のようだ．一般に「一様」が問題になるのは以下のような状況である：

- ある種の極限が問題である．極限をとる変数を x とする．
- 極限をとる変数とは別の変数（パラメーター） y も存在する．
- 問題の極限が「別の変数」y をさほど気にしなくてもとれる場合，つまりいろいろな y の値に関しても同じように極限がとれ，<u>同じような収束の速さ</u> である場合，極限は「一様」であるという．
- y を気にする必要がある（特に y によって収束の速さが非常に異なる）場合，一様とは言わない．

今考えている「一様連続」の場合，極限をとるのは x について（$x\to c$）であり，別の変数（パラメーター）とは c である．連続になるための δ の取り方（x の極限を規定する）がパラメーター c に依存しない（すべての c に共通）ようにとれる，というのはパラメーター c の値をそんなに気にしなくてもよいと言うことだ．この事情を指して「一様」と言っているのである．

ついでに「一様」の例をもう一つ挙げておこう．比較のために一様連続も書いておく．

定義 4.2.5
(i) 区間 $[a,b]$ で定義された関数 $f(x)$ が一様連続とは

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) \quad \forall c \in [a,b] \qquad |x-c| < \delta(\epsilon) \implies |f(x)-f(c)| < \epsilon \tag{4.2.23}$$

が成り立つ場合をいう．
(ii) 区間 $[a,b]$ で定義された関数の列 $f_n(x)$ がある（$n=1,2,3,\ldots$）．このとき，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ が一様収束であるとは，

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \quad \forall x \in [a,b] \qquad n > N(\epsilon) \implies |f_n(x)-g(x)| < \epsilon \tag{4.2.24}$$

となることをいう．

２番目の例では $n\to\infty$ の極限を考えているのだが，その際の $\epsilon-N$ の N が x によらずにとれる（収束の速さが x にほとんどよらない）ことを指して「一様」と言っている．一様収束とは限らない収束のことを「各点収束」という．式で書けば

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon, x) \qquad n > N(\epsilon, x) \implies |f_n(x)-g(x)| < \epsilon \tag{4.2.25}$$

ということで，N が一般には x にもよる．一様収束については数学概論 I でじっくりと，この講義でも後の方で少し，やるだろう．

さて，一様連続性については，以下の非常に重要な定理がある．

定理 4.2.6 (連続関数は閉区間で一様連続) $a < b$ を任意の実数とするとき，閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数は一様連続である．つまり，任意の $\epsilon > 0$ に対して適当な $\delta(\epsilon) > 0$ がとれて，

$$\forall x, y \in [a, b] \qquad |x - y| < \delta(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon \tag{4.2.26}$$

が成立する．数式の書き方からもわかる通り，$\delta(\epsilon)$ はすべての $x, y \in [a, b]$ に共通にとれる．

定理 4.2.6 の証明

ある種の背理法で証明してみよう．考えている区間 $[a, b]$ を 2^n こに等分割してできる小区間を $I_j^{(n)} = [a+\frac{j-1}{2^n}, a+\frac{j}{2^n}]$ と書く（$j = 1, 2, \ldots, 2^n$）．そして，$I_j^{(n)}$ 中の $f(x)$ の最大値を $M_j^{(n)}$，最小値を $m_j^{(n)}$ と書き，$d_j^{(n)} = M_j^{(n)} - m_j^{(n)}$ としよう（f が連続で，小区間は閉区間だから，ここでの最大値，最小値は必ず存在する—定理 2.6.1—ので，この定義は意味を持つ）．そして，それらの最大値を $d^{(n)} = \max_j d_j^{(n)}$ と書くことにする．

その定義から $d^{(n)}$ は n の単調非増加数列であり，非負（つまり下に有界）である．従って，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} d^{(n)}$ が存在すること（更に極限値が非負であること）は保証されている．問題はこの極限の値であるが，定理を証明するにはこの極限がゼロ，つまり

$$\lim_{n\to\infty} d^{(n)} = 0 \tag{4.2.27}$$

を示せば十分である．理由は以下の通りである．(4.2.27) は

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \qquad n \geq N \quad \Longrightarrow \quad d^{(n)} < \epsilon \tag{4.2.28}$$

と同値であり，$d^{(n)}$ の定義から，これは

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \qquad n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \Bigl(1 \leq j \leq 2^n \quad \Longrightarrow \quad d_j^{(n)} < \epsilon\Bigr) \tag{4.2.29}$$

とも同値である．

ところが，$d_j^{(n)}$ の定義を思い出すと,（１）(4.2.29) は同じ小区間 $I_j^{(n)}$ 内の任意の２点 x, y に対して $|f(x)-f(y)| < \epsilon$ を保証することがすぐにわかる.（２）また，x, y が隣り合った区間 $I_j^{(n)}$ と $I_{j+1}^{(n)}$ にそれぞれ入っている場合は（式を見やすくするため，両区間の境目の点を $c = a + \frac{j}{2^n}$ と書く）

$$|f(x) - f(y)| = \bigl|f(x) - f(c) + f(c) - f(y)\bigr| \leq \bigl|f(x) - f(c)\bigr| + \bigl|f(c) - f(y)\bigr| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \tag{4.2.30}$$

となる．

互いの距離が $\frac{b-a}{2^n}$ 以下になっている $[a, b]$ 内の任意の２点 x, y はかならず上の（１）または（２）でカバーできるから，結果的に

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \qquad n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \Bigl(|x - y| < \frac{b-a}{2^n} \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < 2\epsilon\Bigr), \tag{4.2.31}$$

いやもっと簡単に（$\delta = \frac{b-a}{2^N}$ ととるつもりで）

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta \qquad |x - y| < \delta > 0 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < 2\epsilon \tag{4.2.32}$$

が結論できる．これは一様連続性の定義に他ならないから，(4.2.27) が定理の証明には十分であることが示された．

さて，(4.2.27) 自身を証明するには，ある種の背理法を用いる．つまり，(4.2.27) が成り立たなかったと仮定してみる．この極限値が存在して非負であることが単調性から従うことは既に注意したから，(4.2.27) が成り立たないなら，残された可能性は極限値が正，つまり $d > 0$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} d^{(n)} = d \tag{4.2.33}$$

となることである．以下，これがあり得ない（f の連続性に反する）ことを示そう．

さて，もし仮に (4.2.33) となっているとすると，($d^{(n)}$ は単調非増加だったから）すべての n に対して

$$d^{(n)} \geq d \qquad \text{つまり} \qquad \text{各 } n \text{ に対して } j_n \text{ が存在して } d^{(n)}_{j_n} \geq d \tag{4.2.34}$$

となっているはずだ．上の j はもちろん n に依存するが，うまく j_n を選んで区間の減少列

$$I^{(1)}_{j_1} \supset I^{(2)}_{j_2} \supset \ldots \supset I^{(n)}_{j_n} \supset I^{(n+1)}_{j_{n+1}} \supset \ldots, \qquad \text{かつ} \quad \text{すべての } n \text{ で } d^{(n)}_{j_n} \geq d \tag{4.2.35}$$

となるものを選び出すことができる[2]．区間 $I^{(n)}_{j_n}$ の幅は $\frac{b-a}{2^n}$ であって，これは $n \to \infty$ でゼロに行く．従って「区間縮小法」によって，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I^{(n)}_{j_n}$ に属する実数 c がただ一つ存在する[3]．ここでもちろん，$a \leq c \leq b$ である．

ところが，この c においては関数 $f(x)$ は連続ではあり得ない[4]．なぜなら，もし c にて連続であれば $\delta > 0$ が存在して，$|x-c| < \delta$ ならば $|f(x) - f(c)| < \frac{d}{3}$ となっているはずである．(連続性の定義の ϵ を $\frac{d}{3}$ とした.）しかし，もしこうであれば三角不等式から

$$|x-c| < \delta \text{ かつ } |y-c| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(c)| + |f(c) - f(y)| < \frac{d}{3} + \frac{d}{3} = \frac{2}{3}d \tag{4.2.36}$$

となるが，$\frac{b-a}{2^n} < \delta$ となるような大きな n では，(4.2.36) は $d^{(n)}_{j_n} \geq d$ に矛盾する．つまり，c では $f(x)$ が連続になれないのだ．

というわけで，仮に (4.2.33) であれば，$f(x)$ は c にて連続でない，ことが結論されてしまった．これは定理の仮定（f の連続性）に矛盾するから容認できない．つまり，(4.2.33) 自身があり得ないわけで，背理法が完成した． □

4.2.3 定理 4.2.3 の証明

一様連続性がわかれば，証明は簡単だ．

定理 4.2.3 の証明

定理 4.2.2 を考えに入れると，$s(f) = S(f)$ が言えれば定理 4.2.3 の証明には十分だ．そのためには，

$$\text{（？）任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して } 0 \leq S(f;P) - s(f;P) < \epsilon \text{ なる分割 } P \text{ がとれる} \tag{4.2.37}$$

ことを証明すればよい．さて，積分領域の長さは $b-a$ なので，$\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{b-a}$ とおく．f の一様連続性から $\delta > 0$ が存在して，

$$|x-y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon' \tag{4.2.38}$$

とすることができる．そこで，分割 P を，$|P| < \delta$ となるようなものにとろう．この分割は十分小さいので，同じ小区間 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ に属する x, y は $|x-y| < \delta$ を満たしており，したがって $|f(x) - f(y)| < \epsilon'$ も満たされる．よって，I_i 上での f の上限 M_i と下限 m_i は $0 \leq M_i - m_i \leq \epsilon'$ を満たす．これを i について和をとると，

$$0 \leq S(f;P) - s(f;P) = \sum_i (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_i \epsilon'(x_i - x_{i-1}) = \epsilon' \, |b-a| = \epsilon \tag{4.2.39}$$

が得られる．つまり，この P を用いて (4.2.37) が証明できた．メデタシメデタシ． □

理解を深めるための問題：

定積分の定義に従って（上の定理を使っても良い），積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を求めてみよ．ここで

$$a = 0, \quad b = 1, \qquad f(x) = x \tag{4.2.40}$$

[2]なぜかというと，小区間 $I^{(n)}_j$ が小区間 $I^{(n+1)}_k$ と $I^{(n+1)}_{k+1}$ にわかれたとすると，$d^{(n)}_j \geq \max\left\{d^{(n+1)}_k, d^{(n+1)}_{k+1}\right\}$ が成り立っている（つまり，ある小区間で $d_k \geq d$ であれば，この小区間の「親」区間でも $d_j \geq d$）からである

[3]証明を進めるためにはこのような c が少なくとも一つ存在すれば十分だから，区間縮小法を持ち出すまでもない

[4]以下，$a < c < b$ となっている場合に説明する．$a = c$ または $c = b$ の場合もほとんど同じである

とする．余力のある人は他の $f(x)$ の場合も（例：$f(x) = x^2$）やってみようか．

この問題の計算は大変である．しかし，一回はやっておいた方が，後々のためになる．

まあ，定義に従って定積分を求めるのは大変だ（上の問題をやった人は同意するだろう）．でも，高校で習ったように（それでこれから見るように）定積分は微分の逆演算なのだ．この事実により，積分の計算は非常に簡単になるのだ．

4.3 積分の性質

ほとんど当たり前ではあるが，定積分の基本的な性質をまとめて述べておこう．まず，$a \geq b$ の場合の定積分の定義を思い出しておこう．

- $\displaystyle\int_a^a f(x) = 0$ と定める．
- $a < b$ のとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が定義できるならば，$\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ と定める．

さて，定積分の定義から 以下の性質が簡単に導かれる．

定理 4.3.1 (積分の線形性，教科書の定理 3.3.2)
(i) $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ がともに定義できるとき，

$$\int_a^b \bigl\{f(x) + g(x)\bigr\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{4.3.1}$$

である．
(ii) $\int_a^b f(x)dx$ が定義できるとき，任意の実数 α に対して

$$\int_a^b \bigl\{\alpha f(x)\bigr\}dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \tag{4.3.2}$$

である．

いうまでもなく，上の性質は定積分で定義される関数から実数への写像

$$f \qquad \mapsto \quad \int_a^b f(x)dx \tag{4.3.3}$$

が線形写像であることを主張している．線形代数で注意されたかもしれないが，線形写像の一番基本的なものは普通の微分演算や積分演算なのだ．それはともかく，これは高校の時から親しんできた性質であろう．

証明：
(i), (ii) ともに非常に簡単である．定積分はリーマン和の極限として定義されたが，そのリーマン和に対して (i), (ii) に相当する線形写像の関係式が成り立っている．そのため，極限をとった後の定積分でも同じ関係式が成り立つ． □