１０月１９日：今日は「極大・極小問題」の続きを少しやってから，もう「積分」に入ります．実は極大・極小問題にはまだ一つ二つの山場（n 変数の場合，条件付き極値問題）がありますが，これらはもう少し経たないと難しい（「条件付き極値問題」は今からでもやれますが，そのためには「陰関数定理」をちゃんとやる必要があり，これが大変）．すこしだけど教科書と順序が違うので注意.
（予告）１１月４日（金）の３限の演習の時間は石井先生が出張のため演習は行わず，代わりにこの「微積 B」の講義を行います（場所は 23 で）．他クラス聴講などで不都合な人は事前に連絡してください.

4　積分

積分については高校でも習ってはいるが，その基礎を突き詰めていくといろいろと困ったことがでてくる．特に「積分は微分の逆演算」として定義すると,「ある関数 f の積分を求めよ」という問題や「この関数の積分は定義できるか？」という問題でハタと困ってしまう.（微分して f になるような関数がわからない場合，高校までの知識ではお手上げだ.）この節では高校までの知識はいったん忘れて,「積分とは何か」「積分をどのように定義すべきか」から話を始める．その後で高校で習ったこととの関連をつけ，更に積分のいろいろな性質を見ていくことにしよう.

4.1　積分（定積分）の定義

ということで，まずやるべきは「与えられた関数 $f(x)$ に対して，その積分を定義すること」である．これから見ていくように，かなり広いクラスの関数に対してその積分（定積分）を定義することができる．定積分を通して不定積分も定義できるので，高校までの知識とのつながりがつくことになる.

$f(x)$ を適当な（例えば連続な）関数とし，簡単のために $f(x) > 0$ とする．$a < b$ を定めたときの定積分 $\int_a^b f(x)dx$ とは直感的には区間 $[a, b]$ 上での $y = f(x)$ のグラフと x-軸との間の図形の面積である．しかし,「面積とは何か」自体が定義を要する問題である．そこで，この講義では，以下のようにして面積と定積分を同時に定義していくことにする.

なお，教科書では以下よりも簡単な定義をまず採用し，以下の定義に相当するものは後から出てくる形になっている．しかし，僕は積分の最も素朴な定義はこれから紹介する「リーマン和」に基づくもので，教科書のように簡単化してはかえって本質が見えにくくなると思う．そこで話が少しややこしくなることを厭わずに，敢えて「通常の」積分の定義を行うことにした.

定義 4.1.1 (定積分) $a < b$ と．区間 $[a, b]$ で定義された関数 $f(x)$ に対して，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を以下のように定義する（下図を参照）.

- まず，区間 $[a, b]$ を n 個（n は大きな整数）の小区間に分ける：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. これを区間 $[a, b]$ の <u>分割</u> といい，P で表す．できる小区間は $[x_{i-1}, x_i]$ である（$i = 1, 2, \ldots, n$）．小区間の幅の最大値を $|P|$ と書く：$|P| = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$．この $|P|$ は教科書では $d(P)$ と書かれているが，後々でいろいろと括弧が出てきて面倒なので $|P|$ と書くことにした.
- 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に勝手に点 ζ_i をとる（$i = 1, 2, \ldots, n$）．簡単のために $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ をまとめて $\vec{\zeta}$ と書く.
- 上のように決めた $P, \vec{\zeta}$ に対して，<u>リーマン和</u>

$$R(f; P, \vec{\zeta}) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,(x_i - x_{i-1}) \tag{4.1.1}$$

を計算する.

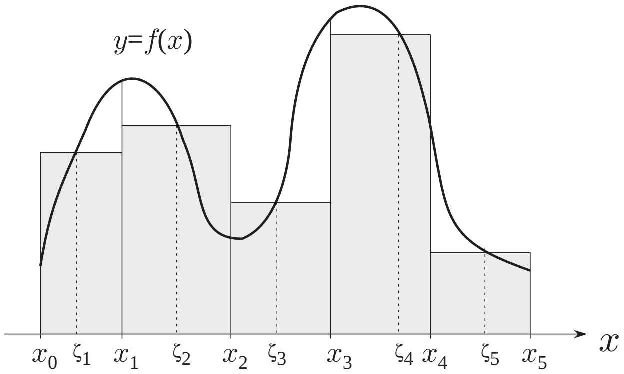
- さて，$|P| \to 0$ を満たすような任意の P と，P に対して上のようにとった任意の $\vec{\zeta}$ を考える．$|P| \to 0$ の極限で $R(f;P,\vec{\zeta})$ の値が（$P,\vec{\zeta}$ の取り方によらず）一定の値に近づくならば，$f(x)$ は $[a,b]$ 上で積分可能（または 可積分）といい，その極限値を定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の値と定める．模式的に数式で書けば

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \text{“}\lim_{|P|\to 0}\text{”}\ R(f;P,\vec{\zeta}) \tag{4.1.2}$$

とするのである（上の極限はかなり複雑なので “ ” を付けた）．

最後に，$a=b$ の場合は $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$ と定義する．また，$a>b$ の場合は $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ と定義する．（$a>b$ の時の定義はもちろん，$\displaystyle\int_b^a f(x)dx$ が定義できる時のみ有効である．）このようにして定義した積分をリーマン式積分，またはリーマン積分という．

$f(x)>0$ の場合の模式図（$n=5$）を以下に示した．図で陰をつけた部分の面積がこの場合の $R(f;P,\vec{\zeta})$ である．



図を見ればわかるように，この定義は大体において，面積の近似値を作るだろうと予想される．少なくとも，上の極限が存在する場合にこの値を面積とすることに異論はないだろう．非常に大きな問題はこの極限がいつ存在するのか（面積がいつ定義できるのか），そもそもこのような極限が存在する関数（つまり可積分な関数）は存在するのか，であるが，これは次の節で詳しく考察する．

ここではまず，定積分とは，グラフの下の図形の面積を細い短冊の和で近似する（近似したい）ものである，ということをはっきりと認識してほしい[1]．

（注）繰り返しになるが，ここで学んでいる定積分の定義から出発して高校でやった「原始関数」につなげていくことはこの後で行う．この意味で，これからやることは高校での積分の導入に厳密な根拠を与える作業である．

4.2 定積分はいつ定義できるのか？

先に注意したように，定義 4.1.1 の極限値 (4.1.2) はいつも存在するとは限らない．例えば，

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x\text{ が有理数の時}) \\ 1 & (x\text{ が無理数の時}) \end{cases} \qquad \text{に対して} \qquad \int_0^1 f(x)dx \tag{4.2.1}$$

を考えても，これは定義 4.1.1 では定義できない．（なぜ定義できないのか，各自で納得するまで考えること．）このような関数に対しても「積分」を定義しよう，というのが Lebesgue が彼の博士論文で提唱した「ルベーグ積分」である．いろいろな意味で，ルベーグ積分の方がリーマン積分より自然な積分だと僕は考えるが，その厳密な理論はそれなりに大変なので，この講義ではルベーグ積分は扱わない．

これから積分の厳密な構築に入る．ちょっと理論的でうるさいところではあるが，大事なところだから，大筋だけでも理解するように心がけてほしい．その際にキーになるのは

[1] 煎じ詰めれば「積分は和のお化け」である．ついでに「微分は差のお化け」である

- 定積分は定義できなくても,「上積分」「下積分」はいつでも定義できること（Darboux の定理，以下の定理 4.2.1）
- 定積分が定義できる必要十分条件は上積分と下積分の値が等しいこと（定理 4.2.2）
- 定積分が定義できる十分条件の一つは f が連続関数であること（定理 4.2.3）

である．特に３番目の「連続関数は可積分である」は非常に重要だから，結果だけでも頭に叩き込んでおくように！

まず,「上積分」などの定義から始めよう．ここでは区間 $[a,b]$ で定義された有界な関数 $f(x)$ に話を限る．$f(x)$ が有界でない場合や $[a,b]$ が有限の区間でない場合は，後（4.4 節）で「広義積分」として取り扱う．

- 分割 P に対して以下のように定義する：区間 $[x_{i-1},x_i]$ における $f(x)$ の下限と上限を $m_i(f;P), M_i(f;P)$ と書く．そして

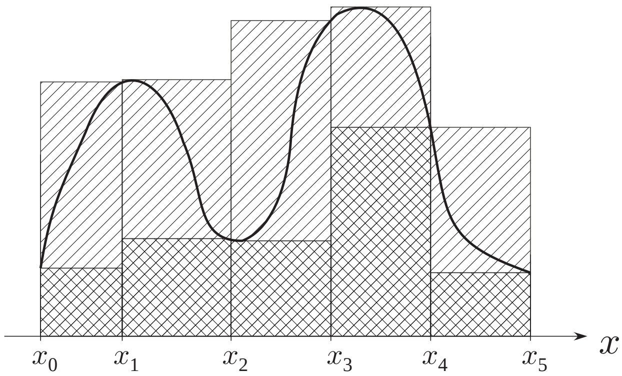
$$s(f;P) \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i(f;P) \times (x_i - x_{i-1}), \qquad S(f;P) \equiv \sum_{i=1}^{n} M_i(f;P) \times (x_i - x_{i-1}) \tag{4.2.2}$$

  を定義する．$s(f;P)$ を下限和，$S(f;P)$ を上限和という．
- 更に，様々な細かさの P を考え，

$$s(f) = \sup\{s(P) \,\big|\, P \text{ は } [a,b] \text{ の分割 }\}, \qquad S(f) = \inf\{S(P) \,\big|\, P \text{ は } [a,b] \text{ の分割 }\} \tag{4.2.3}$$

  も定義する．$s(f)$ を下積分，$S(f)$ を上積分という．

$n=5$ の場合の例を以下に示した．右上から左下への斜め斜線のところの面積が上限和，左上から右下への斜め斜線のところの面積が下限和である．ただし，図では下限和に相当する部分は両方の斜め線が入って十文字の模様になっている．



上の定義から，分割内の分点 $\vec{\zeta}$ の取り方にかかわらず，

$$s(f;P) \le R(f;P,\vec{\zeta}) \le S(f;P) \tag{4.2.4}$$

であることに注意しておこう（上の２つの図を比べてみよ）．

次の定理は，$s(f;P)$ や $S(f;P)$ は，それぞれが極限を持つことを保証する．

定理 4.2.1 (Darboux の定理) 分割 P を限りなく細かくする（$|P| \to 0$）とき，下限和と上限和はそれぞれ一定の値に収束し，その行き先は (4.2.3) で定義された s と S である．つまり，

$$\lim_{|P|\to 0} s(f;P) = s(f), \qquad \lim_{|P|\to 0} S(f;P) = S(f) \tag{4.2.5}$$

がなりたつ.（ただし，$s(f) = S(f)$ とは限らない.）

では，上積分・下積分と積分可能性の関係はどうか？それぞれの P に対しては $s(f;P) \le S(f;P)$ だったから，

$$s(f) \le S(f) \tag{4.2.6}$$

であることはわかる．問題は上積分と下積分がいつ等しいかだ — 関数 f や区間 $[a,b]$ の取り方によってはこの 2 つは等しくないこともある．しかし，この 2 つが等しいことは定義 4.1.1 の積分可能性と同値だ，というのが次の定理である．

定理 4.2.2 (積分可能性の必要十分条件) f が区間 $[a,b]$ 上で積分可能である必要十分条件は，上積分と下積分が一致することである．つまり

$$s(f) = S(f) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ は可積分で，} \int_a^b f(x)dx = s(f) = S(f) \tag{4.2.7}$$

これで積分可能性の一般論はおしまいである．しかしこのままでは，与えられた関数に対して上積分，下積分を計算しないと積分可能かどうかがわからない．これは不便だから，積分可能性の簡単な十分条件を挙げておく：

定理 4.2.3 (連続関数は積分可能) 関数 $f(x,y)$ が区間 $[a,b]$ 上で連続なら，f は $[a,b]$ 上で積分可能である．また，有限個の点を除くと連続な場合も積分可能である．

講義ではこれらの定理の証明（説明）を行う．少し難解かもしれないが，大事なところだし，$\epsilon - \delta$ の非常に良い練習問題にもなっているから，ちょっと辛抱して欲しい．なお，残念ながら証明がチンプンカンプンな人も，諦める必要はない．次回からの積分の応用を勉強すれば，証明がわからなくても単位を取る事は十分に可能だ．

理解を深める問題：

高校の時にもやったかもしれないが，良く知っている関数に対して，上積分，可積分を計算しよう．例えば，積分区間は $[-1,1]$ にして，$f(x) = x^2, x^3$ など，いくつかやってみることを強く奨める．