

b) $\lim_{x \rightarrow a} x^2$ (a は定数)

問 2 : (約 20 点) 次の極限を求めよ (なぜその答えになるかの理由 — 厳密な証明でなくて十分 — を一言二言書くこと . 余力があるなら , 完全な証明を与えてくれれば , なお良い .)

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log(x+1)},$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}$$

問 3 : (約 20 点) 次の数列 a_n, b_n の $n \rightarrow \infty$ での極限は存在するか? 存在するならその極限値を, 存在しないなら存在しない証明を, それぞれ ϵ - N 論法によって与えよ. 極限が存在する場合には, $N(\epsilon)$ をどうとれば良いかも明記せよ (ただし, もっとも効率の良い取り方をする必要はない.)

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & (n \text{ が偶数}) \\ -\frac{1}{n} & (n \text{ が奇数}) \end{cases} \quad b_n := \begin{cases} 0.999 & (n = 10^k, k \text{ は自然数}) \\ 1 - \frac{1}{n} & (\text{上以外の } n) \end{cases}$$

問 4 : (約 2 5 点) 次の関数を $x = 0$ のまわりでテイラー展開し , x^5 の項までの係数を決めよ . (要するに , $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + o(x^5)$ の形に展開して , 係数 $a_0 \sim a_5$ を決めよ , ということ . 場合によっては a_i のいくつかがゼロかもしれない .)

$$a) \log(1+x^2)$$

$$b) \frac{1+x+x^3}{1+x^2}$$

問 5 : (約 15 点) 以下は極限に関する簡単な性質である . これらを極限の定義に従って (ϵ - δ 論法や ϵ - N 論法などを用いて) 証明せよ .

(性質) 関数 $f(x)$ と数列 a_n が $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ かつ $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$ を満たしている . このとき , 新しい数列 $b_n := f(a_n)$ を定義すると , $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ である .

中間テスト (6/1) の解答編 (微積 A, 2005.6.15)

大切なお願い：各問の得点の集計 — 特に十の位 — は間違っている可能性が高いから，各自，一度はチェックすること．これに限らず，皆さんには採点結果に対して文句を言う権利があるから，おかしいと思ったら文句を言いなさい（もちろん，その文句通りに点が変わるかどうかはわからないけど）．

得点分布は以下の通り：

0～9	10～19	20～29	30～39	40～49	50～59	60～69	70～79	80～89	90～99
0	1	3	2	5	9	14	10	7	3

全体的な講評：恐れていたほどひどい出来ではなかった．かなりの人が（完全にはほど遠いにせよ）ある程度の理解と計算力を示しているという事だから，これは希望が持てることだ．ただ，大部分の人にとっては理解や計算力がまだ中途半端という一面があるので，まだまだ気を抜けない．学期半ばで中だるみが生じやすい時期ではあるが，もう少し頑張ってもらいたい．

答案や今までのレポートから見てかなりの努力をし，実力もあると思われるのに，それが得点には反映されなかった人も何人が見られた．このようなテスト形式である以上，ある程度仕方ない事ではあるが，腐らずに努力を続けてほしい．その努力はこれからの3年半で必ず報われるはずだ．

なお，努力をしているのが行間からにじみ出ているのだが，なかなか理解が追いつかない人も散見された．このような人はなかなかつらいだろうとは思いますが，もう少し努力を続けてほしい．今までやってきた事とかなり内容が異なるから，始めは大変なのは仕方ないのだ．騙されたと思って夏休みまでも必死の努力を続ければかなり展望が違ってくるはずだ．ただしその際，

- わからない事は鵜呑みにせず，納得するまで考える．「納得できない解答を丸覚え」は時間の無駄だ．
- それでもわからないから，友達や僕（やほかの教官）に訪ねる．考えようとして放っておくよりは，友達などに聞いた方が良い場合も多い．質問すると，わかったつもりの事がわかってないことに気づいたり，自分で解決してしまうこともある．

の2点を心がけてほしい（以下の解答集にもミスがあるかもしれないから，鵜呑みにしない事．）

問1：素っ気ない解答例は以下の通り．

a) $f(x) = |x - 2|^{1/3}$ と書こう．任意の正数 ϵ に対して， $\delta > 0$ を， $\delta = \epsilon^3$ と決める．すると， $|x - 2| < \delta$ ならば $|f(x) - 0| = |x - 2|^{1/3} < \delta^{1/3} = \epsilon$ となる．これは $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ を ϵ - δ で書いたものそのものだから， $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ が結論できる．

b) $f(x) = x^2$ と書こう．任意の正数 ϵ に対して， $\delta > 0$ を， $\delta = \sqrt{a^2 + \epsilon} - |a|$ と決める（これは $\epsilon > 0$ である限り正だ；各自，確かめる）．さて， $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - a^2| = |x^2 - a^2| = |x - a| \times |x + a| < \delta \times |x + a|$ となるが，三角不等式から

$$|x + a| = |(x - a) + 2a| \leq |x - a| + 2|a| < \delta + 2|a| \quad (1)$$

であるから，

$$|f(x) - a^2| < \delta \times (\delta + 2|a|) = \delta^2 + 2|a|\delta \quad (2)$$

となっている（ここまでは任意の $\delta > 0$ で成り立つ）．ところが，特に $\delta = \sqrt{a^2 + \epsilon} - |a|$ ととったので上の右边はちょうど ϵ である（要するに，上の右边が ϵ になるように δ を決めたのだ）．よって，結局，

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - a^2| < \epsilon \quad (3)$$

が結論できた．これは $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^2$ を ϵ - δ で書いたものそのものだから， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a^2$ が結論できる．

- 上では素っ気なく書いたけど， δ は以下のように決める．a) では $|x - 2|^{1/3} < \epsilon$ となればよいが，これは $|x - 2| < \epsilon^3$ と同値だから $\delta = \epsilon^3$ とすれば良い．

- b) では (2) の右边が $< \epsilon$ となるように解けば良い .
- (1) で $|a|$ の絶対値を忘れた人が多数見られたぞ .
- 何人か $[\epsilon^3]$ などと訳の分からない事を書いている人がいた . 多分 , $\epsilon-N$ の時のノートをわけがよくわからずに覚えたのだろうが , このような態度は非常に良くない . 自分が何をやっているのかをいつも自覚して , 「わからないことは書かない」 くらいの潔い態度が必要だ .

問 2 : 答えは

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log(x+1)} = \infty, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = 0 \quad (4)$$

だ . 問題はどのくらいの説明をするかという事だが , 例えば a) で , 「 x は $\log(x+1)$ よりも高位の無限大だから」と書くのはほとんど理由になってない . なぜなら , 「 x は $\log(x+1)$ よりも高位の無限大」というのは , 「高位の無限大」の定義 , つまり $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log(x+1)} = \infty$ と同値だからだ . だから , これだけを書いているのは答えのみと同じと見なして , 5 点ずつしかあげてません .

理由を書くとすれば , 以下のような例があり得る (あくまで例) .

a) $t = \log(x+1)$ とおくと , 問題の極限は $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log(x+1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t - 1}{t}$ となる . ところが , $e^t = 1 + t + t^2/2 + \dots$ だから , $e^t - 1 \geq t + t^2/2$ である (このところは両辺の差をとって微分して示せば完璧だが , e^t のテイラー展開を直感的に使ってもまあよい .) よって ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t - 1}{t} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + t^2/2}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + t/2) = \infty \quad (5)$$

b) これには $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を既知としてもまあ良いでしょう . ここが気になる人は , $|\sin x| \leq |x|$ から (また , $|x|$ が小さければ $\sin x$ と x が同符号だから)

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1 \quad (6)$$

を示して使えばよろし . とにかく , これらから

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x^2}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \times |x| \leq 1 \times 0 = 0 \quad (7)$$

を得る .

- a) の理由としては , $\log(x+1)$ のグラフの概形を書くなどの方法もある . 特に , $\log(x+1)$ を微分した $\frac{1}{x+1}$ が x の微分である 1 よりも非常に小さいことなどを言えば良い (ここまできるとほとんどロピタルだが .)
- b) でも $\sin x$ または $\sin x^2$ のテイラー展開を用いた人がいた . ただ , 今度は a) と異なり , 「テイラー展開の結果が小さい」ことをいう必要があるので , 厳密にはテイラー展開の収束などをちゃんと考えないといけない . (a ではテイラー展開の各項の係数がすべて正だから , $t + t^2/2$ より大きい , ことはほとんど自明だった .) まあ , わかってやってる人が大部分だとは思ったが , そのように余力のありそうな人にはもうちょっと厳密にも考えてほしいということで 2 点ほど引いときました .
- ある程度予想された事ではあるが , ロピタルの定理を使った人が何人かいた . ロピタルの定理はもちろん (条件さえちゃんと確かめれば) 正しいから , この解答をダメということはできない . ただし , この問題はロピタルなど持ち出さないでも簡単に解けるものばかりだから , 使わないでよかった (ということで 2 点ずつ引かせてもらいました — ちゃんとわかって使っている人には酷かとも思ったが , 訳もわからずに公式を使っているのと区別が付きにくかったので .)

問 3 :

a) 素っ気ない解答は以下の通り . 各項の正負が分かれているが , 見かけ倒しである .
勝手な $\epsilon \leq 1$ をとったときに , $N > 0$ がうまくとれて

$$n > N \quad \implies \quad |a_n - 0| < \epsilon \quad (8)$$

となることを言おう．そしたら $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ だ ($\epsilon > 1$ のときは $\epsilon = 1$ の N を流用できるから別に考える必要はない)．そのためには, $N(\epsilon)$ として

$$N(\epsilon) = \max \left\{ \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{1}{\epsilon^2} \right\rfloor + 1 \right\} \quad (9)$$

ととれば十分である (テストの答案ではこれで十分な事を具体的に書き下すべきだが, 疲れてきたので略.)

b) これが皆さん, 一番苦戦してたかもしれないね.

(方法1) 証明すべきは,

$$\forall \beta \quad \exists \epsilon > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \quad |b_n - \beta| > \epsilon \quad (10)$$

という事だ. 可能な β の値で場合分けしてやる, つまり, どんな β をとってきても $\epsilon > 0$ があって

$$\forall N \quad \exists n > N \quad |b_n - \beta| > \epsilon \quad (11)$$

となってしまうことを言えばよい.

Case 1. $\beta = 1$ のとき. このときは $n = 10^k$ の時に $|b_n - \beta| = 0.001$ となってしまうので, (13) が例えば $\epsilon = 0.0005$ でなりたってしまう (どんなに大きな N を持ってきても, それより大きな $n = 10^k$ で). よって $\beta = 1$ はありえない.

Case 2. $\beta = 0.999$ のとき. このときは 10^k の形に書けない n では $|b_n - \beta| = |0.001 - \frac{1}{n}|$ となるので, $\epsilon = 0.0005$ ととってやると (13) が $N > 10000$ くらいでなりたってしまう. やはり $\beta = 0.999$ もあり得ない.

Case 3. β が上の2つ以外るとき. このときは Case 1 または Case 2 のどちらにでも帰着してやる事ができる (ので, 実際は上のどちらかと同じに議論できるが, わかりやすいように別にした). すなわち, $n = 10^k$ のときに $|b_n - \beta| = |\beta - 1|$ であるから, 例えば $\epsilon = \frac{|1-\beta|}{2}$ ととってみると, (13) が $n = 10^k$ で成り立ってしまう. よってこの場合もダメ.

以上から (12) が証明され, 極限はないことがわかった.

(方法2) レポートの解答でも書いた方法 (かつ, 今日やる予定の「コーシー列」の先取り)

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ とは

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad n > N \implies |b_n - \beta| < \epsilon \quad (12)$$

ということだ. そこで特に, $m, n > N$ では

$$|b_m - \beta| < \epsilon \text{ かつ } |b_n - \beta| < \epsilon \quad \text{なので} \quad |b_n - b_m| = |(b_n - \beta) - (b_m - \beta)| \leq |b_n - \beta| + |b_m - \beta| < 2\epsilon \quad (13)$$

となるはずだ. ところが, どんなに大きな N を持ってきても, それより大きく, かつ $n \geq 10000$ なる $n = 10^k$ と, $m = n + 1$ をとってくると,

$$|b_n - b_m| = \left| 0.999 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| = \left| 0.001 - \frac{1}{n} \right| = 0.001 - \frac{1}{n} \geq 0.0009 \quad (14)$$

が成り立ってしまう. これは特に (13) が, $\epsilon < 0.00045$ ではなりたないことを意味する. つまり, 極限は存在しない.

問4: 先週の講義でも言ったように, 一番簡単なのは以下のようにすることだろう.

a) $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4)$ をまず示す. これの大体のやりかたは教科書に1ページ目に載ってるし, そうでなくても, テイラー展開の公式を闇雲に使えばよい. ここで $t = x^2$ とおくと, $\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + O(x^8)$ となる (ここで $\{O(x^m)\}^n = O(x^{mn})$ であることを用いた). これを x^4 までで切って

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + O(x^6) \quad (15)$$

を得る.

b) 分母子とも厄介だから, こんなのはできるだけ分数を簡単にしよう. やってみると,

$$\frac{1+x+x^3}{1+x^2} = x + \frac{1}{1+x^2} \quad (16)$$

であるから，後ろの項だけ展開して， x を足せばよい．この後ろは $\log(1+x^2)$ と同じノリで $\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2+O(t^3)$ に $t = x^2$ を代入して $\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4+O(x^6)$ を得るので，

$$\frac{1+x+x^3}{1+x^2} = x + \frac{1}{1+x^2} = 1+x-x^2+x^4+O(x^6) \quad (17)$$

となる．

なお，今回の問題では (16) があまりに簡単になりすぎた観があるが，分母が $1+x^2$ なら

$$(x \text{ の多項式 }) + \frac{ax+b}{1+x^2} \quad (18)$$

の形にはできるわけで，より複雑な場合でも同様に対処できる．

もちろん，テイラー展開の公式通り，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \quad (19)$$

を用いて， f の微分をガンガン計算して答えを出す事は可能であるが，大変だ（でも一人か二人，このような原始的な方法で a, b とともに正解していた人もいた．そのような人はかなりの計算力があるわけだから，まあ良いでしょう．）

問5： 実はこのままではこの問題は出題ミスだった．正しくは問題の a_n の条件として「 $a_n \neq \alpha$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 」とすべきであった．なぜ「 $a_n \neq \alpha$ 」が必要かは以下の解答を見ればわかる．

まず $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とは，

$$\forall \epsilon_1 > 0, \quad \exists N(\epsilon_1), \quad n > N(\epsilon_1) \implies |a_n - \alpha| < \epsilon_1 \quad (20)$$

ということだ．一方， $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$ とは

$$\forall \epsilon_2 > 0, \quad \exists \delta(\epsilon_2), \quad 0 < |x - \alpha| < \delta(\epsilon_2) \implies |f(x) - \beta| < \epsilon_2 \quad (21)$$

である（ここで $|x - \alpha| > 0$ の条件が入っている事に注意．これをうまく使うためには，以下でも $a_n \neq \alpha$ が必要なのだ．）．問題はこの2つを組み合わせる

$$(??) \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists M(\epsilon), \quad n > M(\epsilon) \implies |f(a_n) - \beta| < \epsilon \quad (??) \quad (22)$$

とできるか？ということだ．

そのために，まずは $\epsilon > 0$ を任意にとって固定し，(22) となるような $M(\epsilon)$ を探そう．

(21) によると， $0 < |a_n - \alpha| < \delta(\epsilon)$ なら $|f(a_n) - \alpha| < \epsilon$ となってくれる．問題はいつ $0 < |a_n - \alpha| < \delta(\epsilon)$ となるか，だが，

- $|a_n - \alpha| < \delta(\epsilon)$ となるためには，(20) の ϵ_1 を $\delta(\epsilon)$ と読み替えて $n > N(\delta(\epsilon))$ ならばよい．
- あと，出題ミスで落ちていた条件 $a_n \neq \alpha$ から， $|a_n - \alpha| > 0$ はいつでも成り立っている

よって， $\epsilon > 0$ にたいしてまず (21) から $\delta(\epsilon)$ を決め，今度はこの $\delta(\epsilon)$ に依存して (20) から $N(\delta(\epsilon))$ を決めて，これを $M(\epsilon)$ とするのだ．すると，(22) が成立するのでメダタシメダタシ．

ここでのキーポイントは $\epsilon, \delta(\epsilon), M(\epsilon) = N(\delta(\epsilon))$ の決まる順番にある（この順に決める）．これがはっきりと認識できればよい．言うまでもなく以下のようになったらダメだ．

（ダメな例）「 ϵ に依存して δ が決まり， δ によって N が決まり， N によって ϵ が決まる」．この例では一巡して ϵ に戻ってしまってるので，本当にこんな ϵ などがとれるかどうか分からない．