

微分積分学 A (理学部数学科) 期末テストに関する注意

2005.07.27 実施予定

- 問題は全部で 5 問 .
- 問題は難しさの順には並んでいない可能性がある .
- 「極限を求めよ」という問題でも , 極限が ∞ や $-\infty$, 極限がないなどの可能性もある .
- 紙の裏も使用して良い . ただし , 裏を使用する場合は , 「裏に続く」などと明記すること .
- 解答に至るまでの道筋 , 理由等を明記すること (ただし , 「答えのみでよい」の問題を除く) .
- 各問には配点の 目安 を記してある . これはあくまで目安であり , 実際にはこれから 5 ~ 10 点増減することもあり得ると了解されたい .
- 題意などについて不明の点があれば質問は受け付けるので遠慮しないで . 今回は 3 クラス分を作ったのでちょっと注意散漫になってしまった ...
- 問題の程度が適切かどうか自信がありません . 難しいと感じる人 , 逆に簡単すぎると感じる人が両方いるでしょうが , とにかく頑張ってください .
- この試験の答えは採点后 , 8 月 1 日の午後 2 時 ~ 6 時に , 僕の部屋 (六本松 3 号館 3 - 3 1 2 号室) にて返却の予定です . それ以外に , メールに返信する形で点数と合否の通知は行います . 僕のアドレスは hara@math.kyushu-u.ac.jp
- また , 学力再調査にきてもらう人のリストも 8 月 1 日午後 2 時までに僕の部屋の前に張り出します .

微分積分学 A (理学部数学科) 期末テスト

2005.07.27 実施予定

学生番号 () 氏名 ()

問	点数
1	
2	
3	
4	
5	

問 1 a : (約 5 点) 以下の定義を, ϵ - δ または ϵ - N 論法で書け. ここで α, a は与えられた有限の定数である.

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \quad (b) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

問 1 b : (約 10 点) $a > 0$ を定数とする. 極限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x}}$ を ϵ - δ 論法を用いて求めよ. その

際 δ をどのようにとれば良いかも明記せよ (ただし, もっとも効率の良い取り方をする必要はない).

問 2 a : (約 10 点) x, y の関数 $z = z(x, y)$ に対して, 指定された偏導関数を計算せよ (答えだけでいい.)

$$(a) z = x^3 + 2xy + y^2 \text{ に対して } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ を計算.} \quad (b) z = y \cos(x^2 y) \text{ に対して } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ を計算.}$$

問 2 b : (約 15 点) x, y の関数 $f(x, y)$ がある. また, x, y と新しい変数 u, v が以下の関係

$$x = u + v, \quad y = uv$$

で関係づけられている. このとき, 合成関数 $z = h(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ に対して, 以下の偏導関数を計算せよ (x, y に関する f の適当な偏導関数と u, v で表せ).

$$(a) \frac{\partial z}{\partial u} \quad (b) \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$$

問 3 : (約 25 点) 次の関数を $x = 0$ のまわりでテイラー展開し, x^5 の項までの係数を決めよ. (要するに, $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + o(x^5)$ の形に展開して, 係数 $a_0 \sim a_5$ を決めよ, ということ. 場合によっては a_i のいくつかはゼロかもしれない. 答えは $f(x) = \dots$ とまとめて書けばよく, $a_0 = \circ \circ, a_1 = \times \times, \dots$ などと別々に係数を書く必要はない.)

$$a) e^{2x^2} \quad b) \cos(\sin x^2)$$

なお, (a) e^{2x^2} とは, 指数関数の肩に $2x^2$ が乗っているのである. また (b) では $\sin x^2$ とは, $\sin(x^2)$ のことであり, $(\sin x)^2$ ではない. 念のため.

問 4 : (約 20 点) 次の数列 a_n, b_n の $n \rightarrow \infty$ での極限は存在するか? 存在するならその存在証明を与えた上で極限値を求めよ. 極限が存在しないなら存在しない証明 (説明) を与えよ.

$$\text{初項は } a_1 = 1 \text{ で } n \geq 1 \text{ では } a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n$$

$$\text{初項は } b_1 = 1 \text{ で } n \geq 1 \text{ では } b_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + b_n}$$

問 5 : (約 15 点) 数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-2}) = 0$ を満たしているとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{n} = 0 \quad (*)$$

であることを証明せよ (注: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在するなら (*) は当たり前だが, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在しない場合でも (*) が成り立つ, というのがこの問題のミソである.)

期末テスト講評と解答例（微積 A，原）

（初めにお断り）

ここには採点方法や得点分布についての記述がありましたが，web 上での公開にはすぐわないかもしれないので，web 版では省略しました．完全版は僕の office の前のはこの中にあります．

（全体の講評）

- 問 1a は「これが出来なければ即，アウト！」のつもりで出しましたが，極限が無限大の定義を間違った人が案外，いました。「極限がない」と「極限が $+\infty$ 」は違いますよ！
- 問 1b は，やるべきことはわかっているが，計算力がついていけない（特に分子の有理化ができない）人が非常に多かったようです．これくらいは受験数学の常識だと思ったんだが ...
- 問 2 の偏微分は，2 b の (b) を除いては，流石に大体できてました．問題の (b) は，正答率が 3 割くらいで，これも意外です．補講の時に「ここは間違いやすいから注意！」とあれほど言ったのに ...
- 問 3 はまあまあ予想通りの出来で，それほど悪くなかったです．
- 問 4 がまた意外でした．問 4a は実は $a_n = n$ ですが，別にそれを使わなくても， $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \infty$ をいえば済むことです（この主張自身は $\log$ をとってやるのが一番簡単でしょう．）
- 問 4b は「とにかく単調増加」と書いている人が多かったですねえ．最初の数項を書きくだせばわかるけど，この数列は単調列ではありません！（単調列でないものをわざわざ探してきたんや．）
- 問 5 はなかなか出来ないだろうと思って，覚悟の上で出したので，ほとんど全滅という結果にも驚きはしません（でも，3 人ほど，かなり良い線まで行った人がいました．惜しかったね！）ただし，十人近くの人が「 a_n はコーシー列」だと誤って結論していたのにはびっくりしました．もう一度コーシー列の定義を良く思い出しておくように．

個々の問題の解説（かなり急いで作ったのでミスプリがあると思う．要注意．）

問 1a：

書くだけです．(a) は， $\forall \epsilon > 0 \exists N \ n > N \implies |a_n - \alpha| < \epsilon$ ．

(b) は， $\forall M > 0 \exists \delta > 0 \ |x - a| < \delta \implies f(x) > M$ ．

問 1b： 極限の行き先は $1/\sqrt{a}$ であることはすぐに予想がつくから，任意の $\epsilon > 0$ に対してうまく δ をとって， $|x - a| < \delta$ ならば $\left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right| < \epsilon$ となるようにすれば良い．そのためにはこのような x の条件を求めるべきだが，そこで気になるのは x の範囲（特に x がゼロに近くないかどうか）である．今の場合， $x \rightarrow a$ を考えるのだから x が a に近いところのみに限定してよい．つまり， $\delta < a/2$ などを始めから設定しておけば良いわけ．こうすると $x > a - a/2 = a/2$ だから，

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right| = \left| \frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt{xa}} \right| = \left| \frac{a - x}{(\sqrt{a} + \sqrt{x})\sqrt{xa}} \right| \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a} \sqrt{a^2/2}} = \frac{\sqrt{2}|x - a|}{a^{3/2}}$$

がなりたっている．従って，こいつを ϵ より小さくするには， $|x - a| < \epsilon \times a^{3/2}/\sqrt{2}$ なら十分である．もともと $\delta < a/2$ としておいたことも思い出すと，

$$\delta = \min \left\{ \frac{a}{2}, \frac{a^{3/2}}{\sqrt{2}} \right\}$$

ととれば良いことがわかる．

□

問 2a：

計算するだけ．答えは (a) が $3x^2 + 2y$ ，(b) が $\cos(x^2y) - x^2y \sin(x^2y)$ ．

問 2b :

連鎖律の問題だが、それに必要な偏微分をまず計算しておく

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u$$

である。従って、(a) は

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) f = \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}$$

となる。また (b) は上のものを v で微分する訳で、右辺第一項の微分は

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

となる。また第 2 項の微分は、まず $v \frac{\partial f}{\partial y}$ に積の微分を適用して

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial y} + v \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial y}$$

となることに注意する。この第 2 項は $\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x}$ と同様に計算できる。結果をまとめると (f の偏微分の順序は交換できるとして)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (u + v) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + uv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}$$

となる。

問 3 : これはやるだけ。

(a) $e^t = 1 + t + t^2/2 + t^3/6 + o(t^3)$ だから、ここへ $t = 2x^2$ を代入して

$$e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + \frac{(2x^2)^2}{2} + \frac{(2x^2)^3}{6} + o((2x^2)^3) = 1 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^6)$$

を得る。

(b) まず、 $\cos t = 1 - t^2/2 + t^4/24 + o(t^4)$ を導いておく。また、 $\sin s = s - s^3/6 + o(s^3)$ であるので、 $s = x^2$ とすると、 $\sin x^2 = x^2 - x^6/6 + o(x^6) = x^2 + o(x^5)$ を得る。そこで、 $t = \sin x^2 = x^2 + o(x^5)$ を $\cos t$ の展開の式に代入して

$$\cos(\sin x^2) = 1 - \frac{\{x^2 + o(x^5)\}^2}{2} + \frac{\{x^2 + o(x^5)\}^4}{24} + o(\{x^2 + o(x^5)\}^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^7)$$

となって出来上がり。

問 4 :

(a) これは実は出題ミスで、 $a_n = n$ になってしまうのだが、これに気づけばそれもよし、気づかなくても以下のようにすればできる。

要するに、この数列は単調増加ではあるが、有界でないで、極限が存在しない。有界でないことを言うためには、 $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \infty$ をいえば良い。この式を証明するには、両辺の $\log$ をとって、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \infty$$

を示すと十分だ。これはちょっと見慣れないかも知れないが、 $\log$ のテイラー展開を思い出すと、またはより原始的に $0 < x < 1$ では

$$\log(1+x) \geq x - x^2/2$$

であることを用いれば (この不等式自身は両辺の差をとって微分すればわかる) ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right)$$

が得られ、右辺の和は無限大になるので、左辺も無限大とわかる。

(b) 皆さん、思ったより苦戦してましたね。当てずっぽう(?)で「単調増加」と書いた人がかなりいました。苦し紛れとはいえ、そんなのはダメですよ。少なくとも2通りの解き方があります。

(解法1: 極限値を予想して) 極限 β があるならば $\beta = 1 + \frac{1}{\beta+1}$ を満たすはずなので、 $\beta = \sqrt{2}$ のはず。そこで $\sqrt{2}$ と b_n の差をとってやると

$$b_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{b_n + 2}{b_n + 1} - \sqrt{2} = \frac{b_n + 2 - \sqrt{2}b_n - \sqrt{2}}{b_n + 1} = -(\sqrt{2} - 1) \frac{b_n - \sqrt{2}}{b_n + 1}$$

が得られる。簡単な帰納法により $b_n \geq 1$ はすぐわかるので、上の両辺の絶対値をとって

$$|b_{n+1} - \sqrt{2}| = (\sqrt{2} - 1) \frac{|b_n - \sqrt{2}|}{b_n + 1} \leq (\sqrt{2} - 1) |b_n - \sqrt{2}|$$

が得られる。これは $|b_n - \sqrt{2}|$ が、公比 $\sqrt{2} - 1 = 0.4142\dots$ の等比数列であることを示しており、結果として $|b_n - \sqrt{2}|$ はゼロに収束する。つまり、 b_n は $\sqrt{2}$ に収束する。

(解法2: コーシー列) コーシー列になってるはずと思って $b_{n+2} - b_{n+1}$ を計算すると、

$$b_{n+2} - b_{n+1} = \frac{1}{1 + b_{n+1}} - \frac{1}{1 + b_n} = \frac{b_n - b_{n+1}}{(1 + b_{n+1})(1 + b_n)}$$

が得られる。解法1と同じく、 $b_n \geq 1$ を用いると、これから

$$|b_{n+2} - b_{n+1}| \leq \frac{1}{4} |b_{n+1} - b_n|$$

が得られた。このような数列はコーシー列である。なぜなら、上の漸化式から

$$|b_{n+1} - b_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |b_2 - b_1|$$

が成り立つので、 $\ell \geq 1$ に対して

$$|b_{n+\ell} - b_n| \leq \sum_{k=n}^{n+\ell-1} |b_{k+1} - b_k| \leq \sum_{k=n}^{n+\ell-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} |b_2 - b_1| = |b_2 - b_1| \times \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

が得られるが、この右辺は n を十分大きくとるといくらでも小さくできるからである。よってこの数列は収束する。収束先は解法1で書いたように $\sqrt{2}$ とわかる。

(解法3: 数列 b_n を具体的に求める!) これは思いもよらぬ方法で、正直、感心しました。この問題を解くには必要ありませんが、計算力はなかなかのものです。

$c_n = \frac{1}{b_n - \sqrt{2}}$ に対する漸化式を作ると、

$$c_{n+1} = \frac{1}{1 - \sqrt{2} b_n - \sqrt{2}} = -\frac{3 + 2\sqrt{2}}{b_n - \sqrt{2}} - (1 + \sqrt{2}) = -(3 + 2\sqrt{2})c_n - (1 + \sqrt{2})$$

となるので、これを高校での知識で解いて、最終的に

$$b_n - \sqrt{2} = \frac{4}{(-1)^{n-1}(3 + 2\sqrt{2})^{n-1}(4 + 3\sqrt{2}) - \sqrt{2}}$$

になる(と思う。一応、検算したけど、タイプミスがあるかも...) ここで $n \rightarrow \infty$ とすれば $b_n - \sqrt{2}$ がゼロに収束することがわかる。

問5:

まあ、これは難しいからできなくても仕方ない。正直、2, 3人でできれば良い方だと思ってました(結果的には完答が一人、惜しい人が2人くらい)。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a_{n-2}) = 0$ の条件を「 a_n がコーシー列」と読み間違っただけはやめて下されや。こんなことやってるとコーシー列の定義が何もわかってないということになるぞ。

書きやすくするため, $b_n = a_n - a_{n-2}$ とする. 条件から

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \quad n \geq N \implies |b_n| < \epsilon$$

である. 以下, N より十分大きい n をとり, n から 2 ずつ引いていって, N より小さくなる直前の数を M とする. ($M = N$ または $M = N + 1$ だ). この M を用いて,

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= (a_n - a_{n-2}) + (a_{n-2} - a_{n-4}) + \cdots + (a_{M+2} - a_M) + a_M \\ &\quad - (a_{n-1} - a_{n-3}) - (a_{n-3} - a_{n-5}) - \cdots - (a_{M+3} - a_{M+1}) - a_{M+1} \end{aligned}$$

と書いた上で, 三角不等式を使うと

$$|a_n - a_{n-1}| \leq |a_M| + |a_{M+1}| + \sum_{k=M+2}^n |a_k - a_{k-1}| \leq |a_M| + |a_{M+1}| + (n - M)\epsilon$$

が得られる. この両辺を n で割ってみると,

$$\frac{|a_n - a_{n-1}|}{n} \leq \frac{|a_M| + |a_{M+1}|}{n} + \frac{n - M}{n} \epsilon$$

となるが, ここで $n \rightarrow \infty$ とすると (M と N は ϵ だけで決まるから, 固定されている, 従って a_M と a_{M+1} も固定されていることに注意),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n - a_{n-1}}{n} \right| \leq 0 + \epsilon$$

となる. ϵ は任意の正の数だったので, これは上の左辺がゼロであることを意味する.

(本当は上で $n \rightarrow \infty$ としないで, 「 n を十分大きくとると $\frac{|a_M| + |a_{M+1}|}{n} < \epsilon$ とできる」とやるべきかもしれないが, まあ, 同じこと.)

問5の発展問題: 問題を少し変えて, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{f(n)} = 0$ となるためには, $f(n)$ はどのくらいの大きさでないといいないか? を考えてみると良い (問題から $f(n) = n$ なら十分なことはわかった. $f(n) = \sqrt{n}$ ならどうか? $f(n) = \frac{n}{\log n}$ はどうか, など).