

7月13日:今日は偏微分の一部の残り,と一学期のまとめです.期末テストについては下をご覧ください.チャレンジ問題のいくつかの解答を載せるつもりだったのですが,間に合いませんでした.後で作成して,僕の部屋の前にしておくつもりです.

夏休み宿題(+テスト対策):期末テストの範囲に相当する部分の教科書(大体,第1章と2.1節,2.2節)の節末問題,章末問題を各自でやっておくこと.秋学期の微分積分学Bの最初の講義(または2回め)で簡単な——主に計算問題の——テストをする.せっかくの夏休みではあるが,後期からも要求される計算力をつけるつもりで,また期末テストに備えるつもりで,がんばってほしい.

期末や成績について:

- 期末テストは教務課の指示通りの時間に行う.7月27日(水)の2限のはずだが,必ず確認されたし.
- 試験の場所は僕は知らされていない.いつもと異なる場所の可能性も高いらしいので,注意して下さい.
- 試験範囲はやったこと全部.とは言っても,そんなにたくさんはやってない.
 - ϵ - δ , ϵ - N 論法.
 - コーシー列,単調列と数列の収束,連続関数の性質
 - テイラーの公式,テイラー展開
 - 偏微分,その定義と連鎖律
 - 高階の偏微分

始めの2つは少し理論的なこと,残りはある程度,実用計算.

- 学期始めに宣言した通りの方法で成績をつける.特に,「期末での一発逆転もあり」の約束をしたから,中間がダメだった人も心機一転してがんばってほしい.
- 答案の返却や確認について:講義中から何度も言っているように,答案を確認するのは学生さんの権利だから,返却できるような時間を設定する.期末試験後,3日ほどあと(要するに7月29日の金曜くらい)を考えているが,翌週にずれこむかもしれない.もう一度,期末試験のときに連絡する.僕のwebでも返却日を知らせる.
- なお,上の時間に答案を取りに来れない人や,上のような返却方法を好まない人などには「皆さんからメールで問い合わせがあったら,そのメールに返信する形で成績を教える」ことも考えている.
- なお,「学習到達度再調査」については,「もう少しで合格なのに」「もう少しで不合格なのに」という人には実施する可能性がある(ボーダーラインの人が下手に通ってしまうと,後期に苦労することにもなりかねない.ボーダーの人にはもっと勉強してもらおう意味で,もう一度きていただくと思う.)なお,「合格点からかけ離れた人」に対して実施することは絶対にない.この点をふまえて,きちんと期末を勉強していただきたい.

演習書の勧め

皆さんは大学生なんだから,「これはヤバい」と思ったら自分で手をうってくださいね.特に,教科書に載っている例題や節末問題,章末問題はできるだけやってください(その意味で夏休み宿題にしました).それでもわかった気がしなかったら,演習書(いわゆる問題集)をやることを勧めます.問題をやることによって,自分が曖昧にしかわかっていなかった部分がはっきりしてくることが多いと思います.ただし,その際,解答を鵜呑みにはせず,自分で納得するまで考えること.考えてもわからなかったら,友達や教官(僕を含む)に訊けばよいのです.

演習書はどれでも良いと思いますが,一応,目についたものを列挙します(第4回レポートの解答編で紹介たものの再録).

- 三村征雄編「大学演習 微分積分学」(裳華房) — 僕はこれを使った.ちょっとムズイかもね.
- 蟹江,桑垣,笠原「演習詳説 微分積分学」(培風館) — なかなか良いが,はじめは難しく感じるかも.
- 杉浦ほか「解析演習」(東大出版会) — これもまあ,大変ではありますが,良い本.
- 鶴丸ほか「微分積分 — 解説と演習」(内田老鶴圃) — 一番「普通」かも.
- 飯高茂監修「微積分と集合 そのまま使える答えの書き方」(講談社サイエンティフィック) — 題名は変だけど,馬鹿にはできない,なかなかの本.流石は飯高さん監修だけあるな.案外,おすすめ.

これ以外にもいくらでも出版されてるから、図書館や本屋さんで自分にあった（読みやすい、やる気になる）ものを選べば良いでしょう。ただしその際、解答や解説のある程度詳しいものがよいと思います。また、無理をして難しすぎるものを選ぶ必要はありません。自分が簡単だと思うことでも（人間はアホやから）わかってないことが一杯あり、むしろ簡単どころが盲点になって先に進めないのです。簡単な演習書でもやれば、大きな効果があるはず。

なお、受験と違って死ぬほどの問題量をこなす必要はありません⁷—自分が納得できるようにいくつか例題をやり、弱いところだけたくさんやれば大抵は十分です。

（ついでに気がついた本）「共立ワンポイント数学双書」というシリーズの中に「イプシロン-デルタ」とか「テイラー展開」のものがあることに気づきました。小さな本ではあるけど、トピックごとにわかりやすく書かれているから、ピンポイントでの勉強に適しています。

ついでに勉強法について今学期の皆さんの反応などをふまえて書いておきます。

- 第一原則として、自分の納得するまで考えて、理解することを目指す。
- でも行き詰まったら、気分転換も兼ねて演習書などをやる。具体的に手を動かすことで、「わかったつもりで全然わかってない」ことが見つかるかも。
- 新しい概念などがわからない時は、その「定義」がそもそもわかってないことが非常に多い。重要な概念の定義が言えるか、自答しよう。定義が言えない時は定義を覚えられるまで、具体例を考えよう（意味もわからずに定義を丸暗記するのは、たいていの場合は無駄だが、やらないよりはましかも。）具体例さえ思い浮かばない時はかなりの重症です。友達や教官に質問しましょう。
- 定義、定理などでは反例を常に思い浮かべるように。「定理のこの条件がなくなったらどこが困るのか」などを考えるとより身近に感じられるかも。
- （最後に）ここは大学で、これまでのように手取り足取りはしてくれない（少なくとも僕はしない）ことを思い出そう。皆さんが自分から動けば道は開けるけども、助けてくれるのを待っているだけでは何も解決しないよ。

先週のレポートの解答

問 16 . とまかくやるだけではありますが ...

(a) まず連鎖律を使う方から、 $z = h$ とかく。後で使うので偏微分を計算しておくとして、

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = \frac{y^3}{r^3} = \sin^3 \theta, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{r^3} = \cos^3 \theta$$

となる。よって、

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial y} = \cos \theta \times \sin^3 \theta + \sin \theta \times \cos^3 \theta = \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta.$$

同様に、

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial y} = -r \sin \theta \times \sin^3 \theta + r \cos \theta \times \cos^3 \theta = r(1 - 2 \sin^2 \theta) = r \cos 2\theta.$$

では次に、 h を r, θ で表してやってみる。単純に代入すると、

$$h(r, \theta) = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r} = r \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

である。よって、これを r, θ で偏微分すれば、上と一致する答えを得る。

(b) 連鎖律を使うためには、 $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ などの偏微分が必要なので、まずこいつを求めよう。そのための一つの方法は、 r, θ を x, y で表すことである。定義から

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

⁷いや、受験だって、本当はそんなに量をこなさなくてもええのよ。浅い理解で問題を解こうとすると量でごまかすしかないけどね

が得られる．ここで \tan の逆関数に持ち込んでも良いが，以下ではそれは使わずにやってみる．
 ともかく， r の微分は簡単で，

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r}$$

である．また， θ の方は $\tan \theta = y/x$ を直接 x, y で微分して，

$$\sec^2 \theta \times \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \implies \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \times \cos^2 \theta = -\frac{y}{r^2}, \quad \text{同様に} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2}$$

とわかる．従って，

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 2r \sin 2\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 2r^2 \cos 2\theta$$

と組み合わせて，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{x}{r} 2r \sin 2\theta - \frac{y}{r^2} 2r^2 \cos 2\theta = 2x \sin 2\theta - 2y \cos 2\theta = 2r \sin \theta = 2y.$$

同様に，

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{y}{r} 2r \sin 2\theta + \frac{x}{r^2} 2r^2 \cos 2\theta = 2x \cos 2\theta + 2y \sin 2\theta = 2r \cos \theta = 2x.$$

$h(x, y)$ を直接計算する方法では，

$$h(x, y) = r^2 \sin 2\theta = r^2 \times 2 \sin \theta \cos \theta = r^2 \times 2 \frac{y}{r} \frac{x}{r} = 2xy$$

であるものを x, y で偏微分すれば，もちろん，上と同じになる．

————— 以下，レジユメの続き —————

定理 3.3.1 の証明は教科書の p.47 に載っているから，略 □

なお，定理 3.3.1 での「 C^2 -級」は十分条件であって，もう少しだけ条件を緩めることも可能である（らしい — 正直，僕自身，条件を緩めなければならない状況に陥ったことはなかったので，今回はじめて勉強した。）例えば，以下のようなものがある（ D は領域， A は D 内の一点．また $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ などと略記する．）

- D にて f_{yx}, f_{xy} が連続なら， D の各点で $f_{xy} = f_{yx}$
- D にて f_x, f_y, f_{yx} が存在し， A にて f_{yx} が連続ならば， f_{xy} も A で存在してかつ $f_{xy} = f_{yx}$
- D にて f_x, f_y が存在し，これらが A にて全微分可能ならば， A にて $f_{xy} = f_{yx}$

高階の偏導関数の意味は以下の幾何学的考察から少しはわかる（かなあ）．もう一つの意味付けは後のテイラー展開から出る．

$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ の意味付けははっきりしている． $z = f(x, y)$ のグラフを y が一定の面で切った切り口で， x の 2 階微分を考えている訳だ．高校の時から知ってるように，2 階微分はグラフの凹凸（曲がり方）を表す．同様に， f_{yy} は x -一定の面で切った場合の， y -方向でのグラフの曲がり方を表している．

問題は $f_{xy} = f_{yx}$ の方だ． x で微分してから y で微分，ううむ，あんまりよくわからない．多少天下りだが，変数変換

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

を考えてみよう．もともとの変数 (x, y) から座標軸を 45° 回転した新しい変数 (u, v) へ移ったと考えるのだ．新しい変数 u, v で偏微分 f_{yx} を表してみるとどうなるだろうか？

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right] \quad (3.3.4)$$

(余談だが, 上の関係は微分演算子の部分だけを取り出して

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \right] \quad (3.3.5)$$

とも書ける. このような書き方は後々, 便利だ.) これを y で微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right] \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right] \right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right] \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right] \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

を得る (上では $f_{uv} = f_{vu}$ を仮定した). 何となく変な量ではあるが, 新しい座標系での u -方向の曲がり方と v -方向の曲がり方の差が $f_{xy} = f_{yx}$ なのである.

以下, テイラー展開をやるが, 2変数のテイラー展開は期末では出題しない方針である (1変数でも怪しい人がいるから, まずは1変数をマスターしてくれ.) ただ, 話の流れ上, ここで触れるのが自然だから軽く触れておく. 2変数のテイラー展開は後期の最初にもう少し触れる予定だ.

テイラー展開. テイラー展開はそれ自身でも非常に重要であるが, 2階の偏導関数の意味付けも与えてくれる.

簡単のため, 2変数の場合を考える. h, k が小さいとき, $f(a+h, b+k)$ を $f(a, b)$ で近似するものとしては平均値の定理があった. その導き方は

$$g(t) = f(a+th, b+tk) - f(a, b) \quad (3.3.7)$$

を考えて, 1変数 t に対する平均値の定理 を使うものであった. この $g(t)$ は1変数 t の関数なんだから, 平均値の定理で止まらずに, t についてのテイラーの公式やテイラー展開を考えてみるのは自然である. 実際, もし $g(t)$ が C^n -級だとすると,

$$f(a+h, b+k) = g(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(n)}(\theta)}{n!} \quad (0 < \theta < 1) \quad (3.3.8)$$

が成立するはずである. 右辺の導関数がいつ存在してそれは何なのか, については, 連鎖律 (を何回もつかうこと) が答えてくれる. つまり, 一回の微分ごとに ($x(t) = a+th, y(t) = b+tk$ のつもりで)

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial y} = h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.3.9)$$

であるから, 例えば, f が C^2 -級ならば

$$\begin{aligned} g^{(2)}(\theta) &= \frac{d}{dt} \frac{dg}{dt} = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + kh \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

と計算できる (偏微分はすべて $(a+\theta h, b+\theta k)$ での値). 上に出ている偏微分の絶対値は f が C^2 -級なら有界 ($\leq M$) であるから,

$$|g^{(2)}(\theta)| \leq 2M(h^2 + k^2) = O(\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|^2) = o(\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|) \quad (3.3.11)$$

が成り立つ (記号を簡単にするため, $\mathbf{a} = (a, b), \mathbf{c} = (a+h, b+k)$ とおいた). つまり, (3.3.8) の $n=2$ を考えると,

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + o(\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|) \quad (3.3.12)$$

が得られた訳である. 期待通り, $f(a+h, b+k)$ の h, k の1次での近似になっている.

この先もどんどんやれる. f が C^3 -級だと仮定すると, 教科書の p.49 にあるように計算して

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \frac{1}{2} [f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2] + o(\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|^2) \quad (3.3.13)$$

が得られる。今度は h, k の 2 次式 (の 3 つの可能性) が出ているが、これも当然であろう。 h^2 の係数が f_{xx} , hk と kh の係数が f_{xy} と f_{yx} である (これらは等しいから上ではまとめてしまったが) ことにも注意しよう。

以上のような計算を一般化すれば、教科書の定理 2.2.3 (p.48) になる。ただし、この定理の書き方がそれほどわかりやすいとは思わない。各自 (2 学期までに) この定理が何を言ってるのか、 $r = 4$ くらいで書き下してみることに。

註: 上で、高階偏導関数の出てくる場合の連鎖律の応用例を扱った。これは落ち着いて意味を考えながらやれば何の問題もないが、案外間違いやすいので注意が必要である。例えば、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ のときに、 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を r, θ の微分で表す問題を考えてみる。一回目の微分は簡単だ。連鎖律で

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{x}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (3.3.14)$$

となるので、微分演算子としては

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (3.3.15)$$

という作用をもっている。さて、もう一回やるときには

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (3.3.16)$$

となるのだが、左側の括弧の中の微分はその右側にあるものすべてにかかる (右側と言っても、右の括弧内のものだけで、左の括弧内のものにはかからない。念のため。) つまり、しつこく書くと

$$= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \quad (3.3.17)$$

となり、微分演算子の左にあるものは微分されない。また、それぞれの項には「積の微分」を適用する必要がある、例えば、

$$\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \times \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = -\frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \quad (3.3.18)$$

などとなる訳だ。このように計算していくと、最終的な答えは

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin 2\theta}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} \quad (3.3.19)$$

となるはずだ (講義のときに配ったプリント、最後の項が落ちてました。指摘してくれた人、ありがとう。) この辺りは落ち着いて、意味を考えながらやれば何ともないはずだが、慣れないうちは非常に間違いやすいから、注意されたし。

(補足) 偏微分がゼロという関数は?

1 変数の関数 f の場合、導関数 f' が恒等的にゼロというのは簡単だった — f は定数しかない。

ところが、多変数の関数では事情が異なる。例えば、2 変数関数 $f(x, y)$ が $f_x(x, y) \equiv 0$ を満たしていると、これは f が x には依存しないと云ってるにすぎない (1 変数の時もそうだったけど、あの場合は x しか変化しなかったから、 x に依存しないなら定数しかなかった。) いまは y にはいくら依存してもよいのだから、このような f は「 $f(x, y) = g(y)$, g は任意の関数」と書けるはずで、定数とはかけ離れたものの可能性が高い。1 変数に慣れすぎたあまり、「導関数がゼロなら定数」と思い込みがちなので、注意しよう。

高階導関数になるといよいよ変だ。例えば、 $f_{xy} \equiv 0$ というのを考えてみる。これは

$$\frac{\partial}{\partial y} (f_x) = 0 \quad (3.3.20)$$

と見ると、「 f_x は y には依存しません」ということなので、

$$f_x(x, y) = g(x) \quad (3.3.21)$$

と書けるはずだ (g は任意の関数) . この両辺を x で積分すると, 左辺は $f(x, y)$ になり, 右辺は g の原始関数になるが, x で積分したときの積分定数は y の任意の関数になれる . なぜなら, 積分定数は積分している変数に依存していなければなんでもよい . いまは x で積分しているので, y に依存するのは勝手である (このところがわかりにくい人は $g(x)$ の原始関数を $G(x)$ として,

$$\frac{\partial}{\partial x} \{f(x, y) - G(x)\} = 0 \quad (3.3.22)$$

が成り立つこと, 従って, $f(x, y) - G(x)$ は y の任意の関数になれることに注目するとよい.) よって, $g(x)$ の原始関数を $G(x)$ と書いて,

$$f(x, y) = G(x) + h(y) \quad (3.3.23)$$

となることがわかった (h がその「積分定数」としてでてくる y の任意関数) . 結局, f は x と y の関数の和であれば何でも良い, という驚愕の (というほどでもないかいな) 事実が得られたのである!

教科書の p.45 や節末問題 p.46 の 3, p.49 の 3 などにもう少し発展した問題が載っている . 各自で考えてみてほしい . それによって, もう少し偏微分の意味がわかってくるかもしれない .

A あわてて作った今学期の補足

今学期早々, 地震のために講義が流れたり, 少し駆け足だったりして, テイラー展開とテイラーの公式 (とオーダーの概念) が少し薄くなってしまった . また, 極限概念をきちんとやっていたために, いくつかの定理 (平均値の定理) をそのままにしてしまったりの部分もあった . ここではそれを補うべく, まとめてみる . ただし, これはまとめだから, 教科書を随所で引用する .

A.1 テイラー展開のまとめ

テイラー展開は何回か, ちょぼちょぼ出てきたので, どこまで証明できたのが怪しくなっているところもあるから, まとめておく .

まず, 有限項までで切った形の「テイラーの公式」とは,

定理 A.1.1 (剰余項が積分形のテイラー (Taylor) の公式, 定理 1.3.1 の再録) $f(x)$ がある開区間 I で C^n -級であると仮定する . この区間 I 内に $a \in I$ をとろう . このとき, 勝手な $x \in I$ について, 以下が成り立つ:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad S_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad R_n(x) := \int_a^x \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!} (x-y)^{n-1} dy \quad (A.1.1)$$

であった . これは (積分をまだきちんと定義していないという問題はあつたものの) いちおう, 自己完結的に導くことができた .

また, 普通の形 (平均値の定理を使って) のテイラーの公式は

定理 A.1.2 (通常のテイラーの公式, 定理 1.3.4 の再録) $f(x)$ がある開区間 I で n 回微分可能と仮定し, この区間内に $a \in I$ をとろう . このとき, 勝手な $x \in I$ に対して, a と x の間の一点 ξ が存在して:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad S_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad R_n(x) := \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-a)^n \quad (A.1.2)$$

である⁸ (要するに, 剰余項 $R_n(x)$ には (A.1.1) と (A.1.2) の 2 通りの表し方があるということだ.)

定理 A.1.2 の証明には平均値の定理を使うのだが, 平均値の定理の証明は実数の連続性 (閉区間で連続な関数は最大値, 最小値をもつこと) を用いるので, 4 月の時点では後回しになっていた . 結局, 時間不足で平均値の定理

⁸今, 気づいたけど, 昔の定理 1.3.4 は少しおかしかったですね — ξ が a と x の間にとれることを明記していなかった . 正しくはここで書いた通りです .

の証明は講義では触れなかったが、今学期の始めの方のプリントに定理 1.3.3 として載せてあるから、できれば読んでおいてほしい。もちろん、教科書にも載っている。

有限項でとめた「テイラーの公式」についての基本事項は以上でおしまいである。

次に、上の展開を無限項までやることを考えよう。要するに (A.1.1) において $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ であれば良い訳だ。一般の関数 f に対しては、もちろん、こうなる場合もあるし、ならない場合もある。改めて定義にしておく。

定理 A.1.3 (テイラー展開) $f(x)$ が点 a の近くで何回も微分できるとすると、定理 A.1.1 や定理 A.1.2 が任意の n で成り立つが、もし、 x を固定したときに $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ であるならば、

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (\text{A.1.3})$$

がなりたつ。これを $f(x)$ の $x = a$ の周りでの テイラー展開 という。

(言葉) 有限項でとめた (剰余項付きの) ものを「テイラーの公式」、上のように無限級数にしたものを「テイラー展開」と区別して使うことになっているが、正直、僕はあんまり気にしていません。

問題はいつテイラー展開 (無限項までの展開) ができるか、つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ となるか、ということだ。その十分条件を 2 つ、挙げておこう。これらは「定理」とはなっているが、証明は簡単だ (教科書の p.31 参照)

定理 A.1.4 (テイラー展開できる十分条件、教科書の定理 1.5.14 と 1.5.15)

(1) 定数 c, M があって (当然, c, M は x, n に依存しない),

$$\text{すべての自然数 } n \text{ とすべての実数 } x \text{ に対して } |f^{(n)}(x)| \leq cM^n \quad (\text{A.1.4})$$

が成り立つならば、 $f(x)$ はテイラー級数に展開できる。つまり、(A.1.3) がなりたつ。

(2) 定数 c, M があって (当然, c, M は x, n に依存しない),

$$\text{すべての自然数 } n \text{ と } |x-a| < \frac{1}{M} \text{ なるすべての実数 } x \text{ に対して } |f^{(n)}(x)| \leq cM^n n! \quad (\text{A.1.5})$$

が成り立つならば、 $f(x)$ は $|x-a| < \frac{1}{M}$ なる x ではテイラー級数に展開できる。つまり、そのような x では (A.1.3) がなりたつ。

証明については教科書の p.31 を見られたい。 □

以上でテイラー展開のそうまとめはおしまい。

A.2 オーダーについて

今学期の最大の失敗は「オーダー」に時間をかけなかったことかもしれないので、もう少しまとめておこう。大文字と小文字の O があるけど、最低限の理解を目指して小文字の o を主に述べる。また、極限がゼロの時がわかれば無限大の時もわかりやすくなるだろうから、そちらに集中する。まず、基本的な定義から。

定義 A.2.1 (無限小の比較, 定義 2.3.1 の再録) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ で、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (\text{A.2.1})$$

の時、 $f(x)$ は $g(x)$ より 高位の無限小 である、と言い、 $f(x) = o(g(x))$ と書く。特に、 $x \rightarrow 0$ で $f(x) = o(|x|^\alpha)$ (α は非負の定数) とは、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|x|^\alpha} = 0 \quad (\text{A.2.2})$$

のことである ($\alpha = 0$ の時は $|x|^\alpha = 1$ であってゼロには行かないが、やはり o の記号を使う。)

実用上で重要なのは、特に $o(x^n)$ などの場合であるので、その場合を中心に解説する。まず、以下の例を見てほしい。

$$f(x) = 1 + x^2 + x^4, \quad g(x) = 1 + x^2 + x^6, \quad h(x) = 1 + x^2 \tag{A.2.3}$$

この場合、上の定義によれば、

$$f(x) = 1 + x^2 + o(x^2), \quad g(x) = 1 + x^2 + o(x^2), \quad h(x) = 1 + x^2 + o(x^2) \tag{A.2.4}$$

の3つともが正しい。(A.2.4)だけを見れば f, g, h はすべて同じ関数のように見えるが、もちろんそうではない。これは慣れないと奇妙かもしれないが、「 $o(x^2)$ とは x^2 より速くゼロに行く関数の総称である」という定義に従えば、正しいのである。 $o(x^2)$ を理解するには、まずこの点を押さえることが必要だ。

さて、「オーダー」がテイラー展開などで役に立つのは以下の性質があるからだ。

命題 A.2.2 (オーダーの基本的性質, 命題 2.3.3 の再録+α) $m, n \geq 0$ (整数でなくてもよい) に対し, $x \rightarrow 0$ でのオーダーを考える。 $f(x) = o(|x|^m), g(x) = o(|x|^n)$ のとき

- (i) $f(x) + g(x) = o(|x|^{m \wedge n})$
- (ii) $f(x)g(x) = o(|x|^{m+n})$
- (iii) $|x|^m g(x) = o(|x|^{m+n})$
- (iv) $f(g(x)) = o(|x|^{mn})$

である。ここで $m \wedge n := \min\{m, n\}$ (m, n の小さい方)。また, $f(g(x))$ については、これが定義できる時のみを考えている。

上で絶対値が入ってるのが嫌だと思ふ人は $x > 0$ に限って x^m, x^n のようにして理解してもよい。

(証明) 定義通りやるだけだけど、そこが良くわからない人も多かったようなので、ここでやっておこう。まず、 $f(x) + g(x)$ については、 $m \leq n$ の場合

$$\frac{f(x) + g(x)}{|x|^m} = \frac{f(x)}{|x|^m} + \frac{g(x)}{|x|^m} \tag{A.2.5}$$

であるが、 $f(x) = o(|x|^m)$ の定義から、右辺の第一項は $x \rightarrow 0$ でゼロに行く。また第2項は $|x| < 1$ では $|x|^n \leq |x|^m$ であるので、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{g(x)}{|x|^m} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{g(x)}{|x|^n} \right| = 0 \tag{A.2.6}$$

であって、やはりゼロに行く。結局 (A.2.5) がゼロに行くので、オーダーの定義から $f(x) + g(x) = o(|x|^m)$ が言えた。 $m > n$ の時も同じであるので略。

次に fg の積については、

$$\frac{f(x)g(x)}{|x|^{m+n}} = \frac{f(x)}{|x|^m} \times \frac{g(x)}{|x|^n} \tag{A.2.7}$$

の両辺で $x \rightarrow 0$ とすると、右辺の2つの項はやはりオーダーの定義からゼロに行くから、 $f(x)g(x) = o(|x|^{m+n})$ が言える。同様に、 $|x|^m g(x)$ も処理できる。

最後に合成関数 $f(g(x))$ については、ちょっといい加減には

$$\frac{f(g(x))}{x^{mn}} = \frac{f(g(x))}{\{g(x)\}^m} \times \frac{\{g(x)\}^m}{x^{mn}} = \frac{f(g(x))}{\{g(x)\}^m} \times \left(\frac{g(x)}{x^n}\right)^m \tag{A.2.8}$$

と書いて、 $x \rightarrow 0$ では $g(x) \rightarrow 0$ であることを思い出すと、上の右辺は $0 \times 0^m = 0$ に行くことがわかって「証明」される⁹。 □

最後に、テイラー展開と多項式近似に関する用語と定理をまとめておこう。この命題を用いると、いろいろな関数の多項式近似が簡単に計算できる。その前にまず、用語の定義。

⁹上の「証明」は合成関数の微分の時と同じで、少し嘘がある。と言うのは、 $x \neq 0$ でも $g(x) = 0$ となるかもしれない、このような x では (A.2.8) の書き換えに意味がつかないからだ。しかし、これは表面的な問題であり、合成関数の微分の時と同じように議論すれば厳密にできる

定義 A.2.3 (n 次より高く近似, 定義 2.3.4 の再録) $x = 0$ の近くで定義された関数 $f(x), g(x)$ があり,

$$x \rightarrow 0 \text{ のときに } f(x) - g(x) = o(x^n) \quad (o \text{ は小文字, } n \text{ は正の整数}) \quad (\text{A.2.9})$$

となるとき, 0 の近くで $g(x)$ は $f(x)$ を n 次より高く (n 次よりも良く) 近似するという.

この用語法に従うと, テイラーの定理は以下のように書き直せる.

命題 A.2.4 (テイラーの定理の言い換え, 定理 2.3.5 の再録, 教科書の定理 1.4.11) 関数 $f(x)$ の $x = 0$ での n 階のテイラーの公式において, $S_n(x)$ が $f(x)$ を $(n-1)$ 次より高く近似する, つまり

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n-1}) \quad (\text{A.2.10})$$

となるためには, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n(x)}{x^{n-1}} = 0$ が必要充分である.

前の命題の十分条件として, 以下がある.

命題 A.2.5 (多項式近似の十分条件, 定理 2.3.6 の再録, 教科書の定理 1.4.12)

1) 0 を内部に含むある区間で $f^{(n)}$ が有界, つまり $\delta > 0$ と $M > 0$ があって,

$$|x| < \delta \text{ ならば } |f^{(n)}(x)| < M \quad (\text{A.2.11})$$

となっているとする. このとき,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(x^n) \quad (\text{A.2.12})$$

である (大文字の O を用いて, 教科書より少しだけ精度を上げた.)

2) 0 を内部に含むある区間で $f^{(n)}$ が連続, つまりこの区間で $f(x)$ が C^n -級なら, 1) のためには十分である.

これらの定理は前に述べたが, その時点ではまだ連続関数の性質を習っていないことになっていたので, 証明ができなかった. 一年生で出てくる関数は C^∞ -級 (何回でも微分できる) のものが多く, これらに対しては上の十分条件が自動的に満たされており, 命題 2.3.5 の結論も成り立つ. これらが無条件に信じるのは問題だが, 「大体大丈夫」の間隔を持つことも大事だから, 敢えて注意した.

ということで, この辺りで計算練習と具体例に慣れるのが良い. 以前に書いた例 (を少し簡単にしたもの) であるが, きちんとやってみよう.

例: $x \rightarrow 0$ を考える. $f(x) = 3 + x^2 + o(x^2)$, $g(x) = 1 + x + o(x)$ の時, その積 $f(x)g(x)$ と商 $f(x)/g(x)$ を出来るだけ高次まで多項式で近似せよ (今は $x = 0$ の近傍のみ考えるから, 商を考える際にも $g(x) \neq 0$ と思ってよい.) 積から行く. とにかく無邪気に積を展開すると

$$f(x)g(x) = 3 + 3x + x^2 + x^3 + (1+x)o(x^2) + (3+x^2)o(x) + o(x^2)o(x) \quad (\text{A.2.13})$$

であるが, 定理 A.2.2 の (iii) から $(1+x)o(x^2) = o(x^2)$, $(3+x^2)o(x) = o(x)$, また定理 A.2.2 の (ii) から $o(x^2)o(x) = o(x^3)$ であるので,

$$f(x)g(x) = 3 + 3x + x^2 + x^3 + o(x^2) + o(x) + o(x^3) = 3 + 3x + o(x) \quad (\text{A.2.14})$$

とわかる (最後のところでは定理 A.2.2 の (i) を使った).

一方, 商の方は, まず $\frac{1}{1+t}$ の展開

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + o(t^3) \quad (\text{A.2.15})$$

から出発する．ここで $t = x + o(x)$ とすると

$$\frac{1}{1+x+o(x)} = 1 - x - o(x) + \{x + o(x)\}^2 - \{x + o(x)\}^3 + o(\{x + o(x)\}^3) \quad (\text{A.2.16})$$

であるが, $\{x + o(x)\}^2 = x^2 + x o(x) + o(x)^2 = x^2 + o(x^2)$, また $o(\{x + o(x)\}^3) = o(x^3 + o(x^3)) = o(x^3) + o(o(x^3)) = o(x^3) + o(x^3) = o(x^3)$ などが成り立つので (最後のところでは定理 A.2.2 の (iv) を使った),

$$\frac{1}{1+x+o(x)} = 1 - x - o(x) + x^2 + o(x^2) = 1 - x + o(x) \quad (\text{A.2.17})$$

を得る．後はこれに $f(x)$ をかけるのだが, これは $f(x)g(x)$ の展開と同じ．結果は

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \{3 + x^2 + o(x^2)\} \times \{1 - x + o(x)\} = 3 - 3x + o(x) \quad (\text{A.2.18})$$

となる．

これまでも何回か強調したことではあるが, $o(x^m)$ は普通の x^m のつもりで計算しても良い (ただし $o(\cdot)$ とすることは忘れない) ことに注意しよう．

—夏休みチャレンジ問題—

問 13 で出題した問題のより詳しいバージョンです (今まで高校で習った \sin, \cos の定義や性質はいったん忘れて) $\sin x$ と $\cos x$ をそのテイラー級数で定義した場合, 我々の知っている \sin, \cos と同じになるかどうかを考える問題．いろいろなアプローチがあるが, この前には一人しか解いてくれなかった (でもその一人は非常に頑張っていました) 以下のようにある程度の道筋を示しておく (順番は割合とええ加減)．我こそはと思う者は, 是非, チャレンジしてほしい．

- とにかく, $\sin x, \cos x$ をそのテイラー級数で定義する．
- (お約束) このテイラー級数はすべての実数 x で収束していることを確かめよう．
- このように定義したものが $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x$ をみたくこと ($'$ は x での微分) を示せ．この場合, \sin, \cos ともに無限級数で定義されているから, 級数の無限和と x による微分の順序交換ができるかどうか問題だ．一般論は後期にやるが, 今までの知識でも (微分の定義から出発して) できるから, 頑張れ!
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を示せ．
- 加法定理が成り立つことを示せ (無限級数の積を考える必要があるから, 極限の取り方などに注意して厳密に議論しよう.)
- $\sin \alpha = 0, \cos \beta = 0$ となるようなゼロでない α, β が存在することを何とかして示せ．
- \sin, \cos が周期関数であることを導け．
- 上の α, β と, 円周率 π の関係をつけよう． π の定義としては「半径 1 の円の円周の長さが 2π 」とする．これまで考えてきた \sin, \cos からその円周の長さを計算することで, π との関係をつけよ．
- その他, わかることがあったら何でもやってみよう．

以上, 時間不足で思いつくままに書いたから, もしかしたらミスが混じってるかもしれない．その時は申し訳ないけど, 自力で修正してください．また, 上のはあくまで一つのアプローチであって, これにとらわれる必要はない．