

5月18日:今日は ϵ - δ の続きと「オーダー」の概念です.

お詫び2件.

重要:6月1日(水)のこの時間に中間テストをします. 範囲は今までのところ(テイラー展開の初歩, ϵ - δ の初歩, オーダーの概念)です. 問題の大半はレポートの必修問題の程度でしょう.

第4回レポート問題 (ϵ - δ その2):今回は全員にやってほしい問題と, やりたい人がチャレンジする問題に分けました.

問7: 次の極限をそれぞれ ϵ - δ 論法の定義に基づいて求めよ. $\delta(\epsilon)$ の大体の大きさも明示すること. (ここで $a > 0$ は定数である.)

$$a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|}$$

問8: $f(x)$ を以下のように定めるとき, 極限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ は存在するか? 存在するならその値と収束証明を, 存在しないならその理由(収束しないことの証明)を ϵ - δ 論法の定義に基づいて述べよ.

$$f(x) := \begin{cases} 0.001 & (x = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, \dots) \\ x & (\text{上以外のとき}) \end{cases}$$

問9: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ かつ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ の時, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha + \beta$ が成り立つ. これを ϵ - δ 論法によって証明せよ.

問10: (数列に関するチャレンジ問題) 今日の講義で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \alpha$$

を説明する(予定). そこで, 右辺の「 a_1 から a_n の平均」をより一般の加重平均にして, 同様の結果が成り立つかどうかを考えよう(より詳しくは以下に説明). まず, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ を非負の数列として,

$$b_n := \frac{\sum_{j=1}^n \rho_j a_j}{\sum_{j=1}^n \rho_j}$$

を考える. 「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ならば必ず $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ となる」ためには, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ がどのような条件を満たしていれば良いか. できるだけ必要十分に近いものを考えてみよう.(講義でやったものは $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \dots = 1$ に相当している.)

番外問題:これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ, わかりにくかったところ, 講義への要望などがあれば自由に書いてください. また, 質問があれば, それもどうぞ. この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから, 次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります.

レポート提出について:

上の問に解答し,

5月23日(月)午後5時までに, 原の部屋(六本松3号館3-312)の前の箱に

入れてください. 整理の都合上, 用紙はできるだけA4を使ってください(B5だとなくなっても知らんぞ). また, 2枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてください.

重要: レポートは友達と相談した結果を書いても良い. ただし, 誰と相談したかは明記すること. (「俺は人に教えてやっただけで人からは全く教わってない」と思う人は書かなくても良いが.) 相談した人の名前を書かせるのは,

それで点数を左右するのが目的ではない。「お世話になった文献, 人にはきちんと感謝する」という, 科学上の最低ルールを守ってもらうためである。

——以下, レジユメの続き——

まずはいくつかの例 (証明) で ϵ - δ の使い方を少しでも理解してもらおう。(九重でも「どこが大事かわからない」という意見が聞かれたため。) ここは敢えてプリントにせず, 黒板で例示することにする。

2.2.2 関数の連続性の定義

ついでに連続性の定義も述べておく。ただし, ここでは定義を書くだけにし, 連続関数の重要な性質のほとんど (中間値の定理など) は 6 月までおあずけにする。実数の連続性を理解しない限り, 連続関数というものを厳密に扱えないからだ。

定義 2.2.2 点 a を含む区間で定義された $f(x)$ が「 a で連続」とは, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ なることである。つまり, 以下の (ウ) が成り立つことである:

(ウ) 任意の (どんなに小さい) 正の数 ϵ に対しても, 適当な (小さな) 実数 $\delta(\epsilon)$ を見つけて,

$$0 < |x - a| < \delta(\epsilon) \text{ なるすべての } x \text{ で, } |f(x) - f(a)| < \epsilon \text{ とできる.} \quad (2.2.9)$$

(ウ) は数式では

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \quad 0 < |x - a| < \delta(\epsilon) \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon \quad (2.2.10)$$

となる。

なお, 片側連続 を問題にすることもある。

定義 2.2.3 関数 $f(x)$ が a で右連続とは, $f(x)$ が a を左端とするある区間で定義されていて, かつ $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ なることである。同様に, a で左連続とは, $f(x)$ が a を右端とするある区間で定義されていて, かつ $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$ なることである。

(注) 「右連続」を「右へ連続」, 「左連続」を「左へ連続」ということもある。英語ではそれぞれ right continuous, left continuous (または continuous to the right, continuous to the left)。

(注) 普通の連続にしても, 片側連続にしても, 比べるべきは $f(a)$ そのものと (右や左からの) 極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ だ。単に右側からと左側からの極限值が同じでも連続ではないから注意。(例を考えよ。)

問: 関数 $f(x) = \sqrt{|x|}$ が, 任意の x で連続であることを, 定義に戻って示せ。

2.3 無限大・無限小の比較 (オーダー) とテイラーの定理

(ここは教科書 1.4 節の後半, pp. 19-23)

前節まででいろいろな数列や関数の極限を求めてもらった。ここで大事だったのは, 「どのような項がどのくらい大きい (または小さい) か」という, 収束や発散の速さ (強さ) の問題である。例えば, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^{100}}$ を求めたければ, 分母と分子のどちらが速く無限大になるか, を知る必要がある。そこで, 無限大や無限小の大きさ (より正確には, 無限大やゼロへ近づく速さ) を比べるため, 以下の定義を導入する。

定義 2.3.1 (無限小の比較) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ の場合を考える.

- A. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ の時, $f(x)$ は $g(x)$ より高位の無限小である, と言い, $f(x) = o(g(x))$ と書く.
- B. 上よりもう少し弱く, $\frac{f(x)}{g(x)}$ が $x \rightarrow a$ で発散しないとき, $f(x)$ は $g(x)$ のオーダーである といい, $f(x) = O(g(x))$ と書く (ここは大文字, 上は小文字).

(注)

- A と B は大文字と小文字だけの区別なので, 時々自分でも大文字か小文字かわからなくなるから, 特に手書きの際には注意が必要だ.
- また, これらのオーダー比較はどのような極限を考えているのか (x がどこに近づいた時のものか) に当然, 依存する. 通常は文脈でわかるけども, どんな極限を考えているかはいつも意識すること.
- 上の B は当然 A の場合を含み, 実際には $f(x)$ が $g(x)$ よりずっと速くゼロに行く場合でも, $f(x)$ は $g(x)$ のオーダーである, という. この点, 極限を計算する場合に注意を要する.
- では $f(x)$ は少なくとも $g(x)$ と同じくらい大きい, という場合に使う記号はないのだろうか? ない訳ではないのだが, それほどポピュラーではない. 分野によっては $f(x) \approx g(x)$ と書いたり, $f(x) = \Omega(g(x))$ と書いたりすることはある.

定義 2.3.2 (無限大の比較) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ の場合を考える.

- A. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ の時, $f(x)$ は $g(x)$ より高位の無限大である, と言う. この場合, 記号では $g(x) = o(f(x))$ と書くことに注意 (要するに, $o(\cdot)$ の中身の方が大きい訳だ).
- B. 上よりもう少し弱く, $\frac{f(x)}{g(x)}$ が $x \rightarrow a$ で発散しないとき, $f(x)$ は $g(x)$ のオーダーである といい, $f(x) = O(g(x))$ と書く (ここは大文字, 上は小文字).

(注) 無限小の場合と同じく, $f(x) = o(g(x))$ ならば $f(x) = O(g(x))$ でもある.

このようなオーダーを導入した理由は, 以下の例を見ればわかるだろう.

(例) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n + 1}{3n^2 + 5}$ を求めよ.

(答え) n^2 にくらべて, $4n$ や $+1$ などが低次の無限大であることは明らかである. 従って, 極限を考える際にはこれらを無視して⁶

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n + 1}{3n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \quad (2.3.1)$$

要するに, オーダーを認識することで, 極限を求める際にどの項が一番大事か, がよくわかる訳だ.

問: 教科書の定理 1.4.9 には典型的なオーダーが載っている. その証明も見ながら, 良く理解すること.

実用上重要な「オーダー」の性質を挙げておこう.

命題 2.3.3 (オーダーの基本的性質) m, n は非負の整数とし, $x \rightarrow 0$ でのオーダーを考える.

$$f(x) = o(x^m), g(x) = o(x^n) \text{ のとき, } f(x) + g(x) = o(x^{m \wedge n}), f(x)g(x) = o(x^{m+n}) \quad (2.3.2)$$

である. ここで $m \wedge n := \min\{m, n\}$ (m, n の小さい方). 上の式は o (小文字) を O (大文字) に変えても成り立つ.

(証明) 定義通りやるだけだから, プリントでは略. 講義では少しやるかも. □

この命題を用いると, いろいろな関数の多項式近似が簡単に計算できる. その前にまず, 用語の定義.

⁶さりげなく書いているが, 本当に無視して良いかは確かめる必要がある. 各自, 補うこと (ヒント: 命題 2.3.3).

定義 2.3.4 (n 次より高く近似) $x = 0$ の近くで定義された関数 $f(x), g(x)$ があり,

$$x \rightarrow 0 \text{ のときに } f(x) - g(x) = o(x^n) \quad (o \text{ は小文字, } n \text{ は正の整数}) \quad (2.3.3)$$

となるとき, 0 の近くで $g(x)$ は $f(x)$ を n 次より高く (n 次よりも良く) 近似する という.

この用語法に従うと, テイラーの定理は以下のように書き直せる.

命題 2.3.5 (テイラーの定理の言い換え, 教科書の定理 1.4.11) 関数 $f(x)$ の $x = 0$ での n 階のテイラーの公式

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad S_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad R_n(x) := \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \quad (0 < \theta < 1) \quad (2.3.4)$$

において, $S_n(x)$ が $f(x)$ を $(n-1)$ 次より高く近似する, つまり

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n-1}) \quad (2.3.5)$$

となるためには, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_n(x)}{x^{n-1}} = 0$ が必要充分である.

前の命題の十分条件として, 以下がある.

命題 2.3.6 (多項式近似の十分条件, 教科書の定理 1.4.12)

1) 0 を内部に含むある区間で $f^{(n)}$ が有界, つまり $\delta > 0$ と $M > 0$ があって,

$$|x| < \delta \text{ ならば } |f^{(n)}(x)| < M \quad (2.3.6)$$

となっているとする. このとき,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + O(x^n) \quad (2.3.7)$$

である. (大文字の O を用いて, 教科書より少しだけ精度を上げた.)

2) 0 を内部に含むある区間で $f^{(n)}$ が連続, つまりこの区間で $f(x)$ が C^n -級なら, 1) のためには十分である.

これらはわざわざ命題とするほどのことではないかもしれないが (ただし上記 2 を証明するには, まだ証明できない連続関数の性質が必要), 実用上大事だから載せてある. 特に, 一年生で出てくる関数は C^∞ -級 (何回でも微分できる) のものが多く, これらに対しては上の十分条件が自動的に満たされており, 命題 2.3.5 の結論も成り立つのである.

ということで, この辺りで計算練習と具体例に慣れるのが良い. まず, 「オーダー」の威力を理解する為に:

例: $x \rightarrow 0$ を考える. $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, $g(x) = 3 + x + o(x)$ の時, その積 $f(x)g(x)$ と商 $f(x)/g(x)$ を出来るだけ高次まで多項式で近似せよ. (今は $x = 0$ の近傍のみ考えるから, 商を考える際にも $g(x) \neq 0$ と思ってよい.)

このような例をいくつか出す. その後, 教科書の $\tan x$ の展開に触れる.

補足問題: 以下の関数の $x = 0$ におけるテイラー展開 (マクローリン展開) の最初の 4 項を求めよ (a は定数).

$$a) \log(1+3x) \quad b) e^{ax} \quad c) \log(1+x^2) \quad d) \tan x \quad e) \cosh x$$

このうち, a), b), e) は定義通りにやればできる. c), d) については, 少し工夫した方が簡単だが, 定義通りに地道にやっても可能だ.