中間テスト（6/22）の解答編（S-II-19 クラス, 2004.6.29）

得点分布は以下の通り：

0〜9	10〜19	20〜29	30〜39	40〜49	50〜59	60〜69	70〜79	80〜89
0	2	1	3	9	13	17	11	4

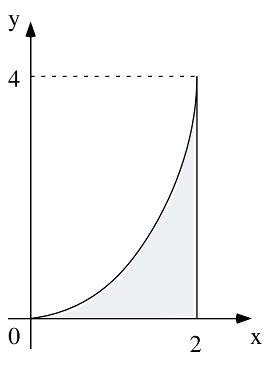
全体的な講評：まあ，大体思った通りの出来であった（決して良いわけではないが，メチャメチャ悪いわけでもない）．ただ，以下のような点，僕の予想よりもかなり弱点であることが判明した．

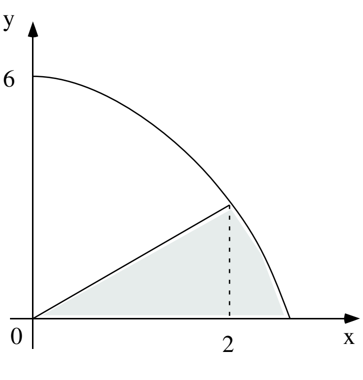
- 予想よりも時間が足りなかったのかな？以下の弱点は時間不足だから見えたということもあったかもしれない．ただ，この時間不足は（高校までの）基本的な計算練習が足りないためのようにも思える．この意味で,「この講義ではそれほどのスピードは要求しない」ものの，もう少し速く計算できるようになった方が良いと思う．
- （余談）昨今,「計算ミスよりも考え方が大事」「計算スピードも必要ない」というような風潮があるようだ．これらは一理はあることだが，過信すると危険である．人間に無限の時間と無限の気力が備わっているなら，それでもよいだろう．しかし現実には時間も気力も有限であり，その限られた中で成果を挙げることが求められる．そうした場合，計算ミスのせいでみすみす成果を逃したり，計算スピードがあまりに遅いために完成する前に気力が萎えてしまったり，ということが起こりうるわけだよ．
- 計算間違いが非常に多い． $(2-y^2)^2$ を $4-2y^2+y^4$ としてしまう．１次元積分の上下が逆になっても積分値の符号が反転しない．2^4-1 を 3 にしてしまう．ひとによっては $\sin, \cos$ の積分がほとんどできない，など．単なる計算ミスではあるが，あとあとの実生活では命取りになるかもしれないから，最新の注意を払って欲しい.（こういう事は，いざというときだけ注意を払おうとしてもダメで，日頃からの「どのようにしたら注意を有効に払えるのか」の訓練が大切.）
- 上とも関連するが，すぐにできるはずのチェックを怠っている人が多い．例えば，正の関数を普通に積分すれば答えも正のはずだが，負の値を書いてどうどうとしている，など．計算はやりっ放しでなく，いろいろなところでチェックするように気をつけよう．
- 図形に関する弱点も目立つ．今回の問題ではいろいろなところで,「どんな曲線・曲面か」「どんな積分領域か」が出来ていない人が見受けられた．
- また，曲線や曲面を表す一応の数式が作れても，パラメーターの範囲が間違っていたり，向きがおかしかったりする人が散見された．

期末テストでは以上のような弱点をにある程度配慮した出題をする予定である．詳細は次回以降に連絡する．なお，以下の解答集は，体力的に限界の中で作ったので，ショウモナイタイプミスなどがあるかもしれない．おかしいと思ったら鵜呑みにせず，質問などすることをお願いしたい．

問１：

答えだけね．積分範囲は下の図のようになる．





従って，積分の順序を入れ替えると，a) は

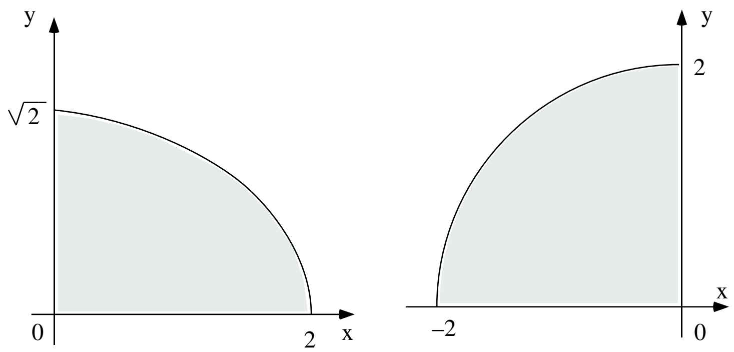
$$\int_0^2 dx \int_0^{x^2} dy\, f(x,y) = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 dx\, f(x,y)$$

b) は

$$\int_0^2 dy \int_y^{\sqrt{6-y}} dx\, f(x,y) = \int_0^2 dx \int_0^x dy\, f(x,y) + \int_2^{\sqrt{6}} dx \int_0^{6-x^2} dy\, f(x,y)$$

問２：

答えだけね．積分範囲は下の図のようになる．



従って，積分は，a) なら，

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} (y^2+2x) = \int_0^2 dx \left[\frac{y^3}{3} + 2xy\right]_0^{\sqrt{2-x}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

または

$$\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^{2-y^2} (y^2+2x) = \int_0^{\sqrt{2}} dy \left[y^2 x + x^2\right]_0^{2-y^2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

b) なら

$$\int_{-2}^0 dx \int_0^{4-x^2} dy\, xy = \int_{-2}^0 dx \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} = -2$$

などとなる．これらの問題は極座標 $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$ を使っても良い，ただし，その場合，

- ヤコビアン r を忘れない，
- 積分範囲は，$0 \le r \le 2$ かつ，$\frac{\pi}{2} \le \phi \le \pi$ である，

ことに注意する．

問３：

まずは u, v の範囲を考える．このためには，u, v を x, y で表すのがよいだろう．

$$u = x, \qquad v = \frac{y}{x^2}$$

であるから，第一式からすぐに $1 \le u \le 2$ がでる．また，第二式は y と x の関係から，$0 \le v \le \pi$ となる．よって，uv 平面での積分領域は長方形 $[1,2] \times [0,\pi]$ だ（しんどくなってきたので，図は略）．

積分を行うには，まずヤコビアンを求める：

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2uv & u^2 \end{bmatrix} = u^2$$

従って，u, v での積分は

$$\int_1^2 du \int_0^\pi dv\, u^2\, u\, \sin(v) = \int_1^2 du\, u^3 \int_0^\pi dv\, \sin(v) = \frac{15}{2}.$$

気づいたこと：

- ヤコビアンをちゃんと計算したのに，最後の積分の表式からはヤコビアンが抜け落ちた人が十人近くいたようだ．何のためにヤコビアンを計算したのよ??
- 最後の $\int_1^2 du\, u^3$ で，$2^4 - 1$ を 3 とした人も十人くらいいたぞ...
- 偏微分がアヤシイ人，行列式の計算がアヤシイ人もいたぞ...

問4：

やるだけなのだが，かなりの人が曲線をうまく表せずに苦労していた．また，向きを間違った人も多かった．

a) 曲線は $x = 2\cos\phi, y = 2\sin\phi$ で，ϕ は 0 から $-\pi/2$ へ動く．また，

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2\cos\phi \\ 2\sin\phi \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} -2\sin\phi \\ 2\cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} 2\sin\phi \\ 4\cos\phi \end{pmatrix}$$

である．従って，線積分は

$$\int_0^{-\pi/2} (-4\sin^2\phi + 8\cos^2\phi)d\phi = \int_{-\pi/2}^0 (4\sin^2\phi - 8\cos^2\phi)d\phi = -\pi.$$

b) 曲線などは

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x & -2 + \frac{x^2}{2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} 1 & x \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} -2 + \frac{x^2}{2} & 2x \end{pmatrix}$$

となる（x は 2 から 0 へ動く）．従って積分は

$$\int_2^0 \Big(\frac{5}{2}x^2 - 2\Big)dx = -\int_0^2 \Big(\frac{5}{2}x^2 - 2\Big)dx = -\frac{8}{3}$$

である．

気づいたこと：

- 曲線を表すパラメーターの範囲と向きを間違った人が多かった．
- かなりの人が曲線の図を描いていたが，曲線と x, y-軸の間を塗りつぶしている人が散見された．今は重積分じゃないんだから... 自分が何をやってるか自覚してるのか，心配になってきたなあ...

問5： 何通りかの方法を示す．でもその前に，この曲面は $z = 9 - x^2$ を z-軸のまわりに回転したものだと言うことは押さえておこう．曲面のイメージが描けなかった人が多かったようだね．

方法１：x, y をパラメーターとする．$z = 9 - x^2 - y^2$ なので，

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 9 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2x \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

と計算できる．最後のベクトルは正しい向きを向いている．従って，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \Big(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\Big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \qquad \cdots \quad a)$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \Big(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\Big) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 9 - x^2 - y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} = 9 + x^2 + y^2 \qquad \cdots \quad b)$$

となる．後はこれらを $x^2 + y^2 \le 9$ の円内で積分すればよい．答えは

$$a) \quad \iint_{x^2+y^2\le 9} 2\, dxdy = 18\pi, \qquad b) \quad \iint_{x^2+y^2\le 9} (9 + x^2 + y^2)\, dxdy = \frac{243}{2}\pi$$

である．

方法２：積分領域，非積分関数ともに z 軸を中心に回転対称だから，x, y を極座標にするのも良い．

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 9 - r^2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ -2r \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 2r^2\cos\phi \\ 2r^2\sin\phi \\ r \end{pmatrix}$$

と計算できるので，問題ごとに $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right)$ を計算して，$0 \le r \le 3, 0 \le \phi \le 2\pi$ で積分すればよい．答えは

$$a) \quad \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi\, 2r = 18\pi, \qquad b) \quad \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi\, (9r + r^3) = \frac{243}{2}\pi.$$

方法３：方法２とほとんど同じだが，r の代わりに z を用いても良い．つまり，

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \sqrt{9-z}\cos\phi \\ \sqrt{9-z}\sin\phi \\ z \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = -\begin{pmatrix} \sqrt{9-z}\cos\phi \\ \sqrt{9-z}\sin\phi \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

と計算できる．この場合，$0 \le z \le 9, 0 \le \phi \le 2\pi$ である．また上のベクトルの向きは逆である事にも注意．答えは

$$a) \quad \int_0^9 dz \int_0^{2\pi} d\phi\, 1 = 18\pi, \qquad b) \quad \int_0^9 dz \int_0^{2\pi} d\phi\, (9 - z/2) = \frac{243}{2}\pi.$$

方法４： もし z が z^2 ならば３次元の極座標が使える．これをヒントに，

$$z = \cos^2\theta, \qquad x = \sin\theta\cos\phi, \qquad y = \sin\theta\sin\phi$$

とおいても良い．この場合，$0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \phi \le 2\pi$ となる．

方法５：最後に，上のような計算をほとんどやらない方法を紹介しよう．a) の方は実は簡単だ．$\boldsymbol{F}$ の大きさも向きも一定で，かつ z-軸を向いている．ということは，この回転放物面を通る流体の量は，その xy-平面上の底面を通る流体の量と同じ．でもこれは半径 3 の円上を単位面積当たり 2 だけ通っているから，

$$(\text{単位面積当たり}) \times (\text{円の面積}) = 2 \times 9\pi = 18\pi$$

だ．簡単でしょ．

b) の方はそれほど簡単ではないが，面積要素を地道に作っていけば不可能ではない（プリント作成の時間切れ）．

（注意）法線ベクトルの計算は間違いやすい．しかし，このような問題では少しはチェックすべき事がある．この問題の場合，曲面 S は z-軸に関して軸対称だから，法線ベクトルの x, y-成分は xy-平面内での動径方向を向いているはずだ（つまり，(x, y) に比例しているはず）．ここに気づけば,「x-成分と y-成分で符号が違う」などの計算ミスは防げたはずである．また，同様に，曲面のイメージが描けておれば，x, y-成分と z-成分の符号がどうあるべきかもわかっただろう．

（おまけ）今日くらいにやるガウスの定理を使うと，b) は以下のようにも計算できる．問題の曲面と xy-平面で囲まれた３次元領域を V とする．$\boldsymbol{G}$ は xy-平面上でゼロだから，問題の面積分は V の表面全体で $\boldsymbol{G}$ を面積分したものと同じである．これはガウスの定理により

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \mathbf{div}\,\boldsymbol{G} dxdydz = \int_{x^2+y^2+z \le 9} 3dxdydz$$

となおせる．後はこの３重積分を計算すればよい．

問６：

まあ，これは完答できないだろうとは思ってました．

a) 積分領域が球対称だから極座標を用いると（ヤコビアン忘れない！）

$$\iiint_{A_L}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}dxdydz=\int_1^L dr\,r^2\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi}d\phi\,\frac{1}{r^{2\alpha}}=4\pi\int_1^L r^{-2\alpha+2}dr$$

と変形できる．後はこの一次元積分のふるまいを調べればよい．まず，$3-2\alpha\neq 0$ の場合，この積分は

$$\int_1^L r^{-2\alpha+2}dr=\frac{1}{3-2\alpha}\bigl(L^{3-2\alpha}-1\bigr)$$

となるので，$L\to\infty$ でもこれが有限になるのは $\alpha>3/2$ の場合である．また，$3-2\alpha=0$ の場合は

$$\int_1^L r^{-1}dr=\log L$$

であって，やはり $L\to\infty$ で発散する．よって，この積分が発散しない α の範囲は $\alpha>3/2$.

b) 発散するような α だから，$\alpha\leq 3/2$ が問題である．$\alpha=3/2$ の時は上で既に求めたように $\log L$ だ．また，$\alpha<3/2$ の時も上から

$$\int_1^L r^{-2\alpha+2}dr=\frac{1}{3-2\alpha}\bigl(L^{3-2\alpha}-1\bigr)\approx(\text{定数})\times L^{3-2\alpha}$$

とわかる．

c) B_L は立方体（からいくつかの部分を抜いた形）だが，大体，A_L と同じようなものである．まず

$$B_L\leq A_{\sqrt{3}L}\qquad\text{よって}\qquad\iiint_{B_L}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}dxdydz\leq\iiint_{\sqrt{3}A_L}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}dxdydz$$

が成り立つから，A_L での積分が $L\to\infty$ で収束するなら B_L での積分も収束することがわかる．

問題はその逆だ．B_L はいろいろと抜いてあるから，ちょっと大変．ここは以下のように議論すればよい．（しんどくなってきたので，粗筋だけ書きます．）以下の議論のため，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ に対し，$\|\boldsymbol{r}\|=\max\{|x|,|y|,|z|\}$ を定義しておく．

- $A_L\backslash B_L$ に入っている部分に注目し，ここがあってもなくても積分の収束発散は変わらないことを言おう．
- まず，A_L のなかで $|\boldsymbol{r}|\leq 100$ を満たす部分は積分の収束，発散には効かないことに注意する．
- だから，積分の発散に効きそうなのは，原点から遠く離れた部分なので，以下では $\|\boldsymbol{r}\|>100$ のみを考える．
- $A_L\backslash B_L$ に入っていて， $\|\boldsymbol{r}\|>100$ となっている $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ をひとつとる．x,y,z のどれが一番大きいかはわからないが，まず $x\geq y\geq z\geq 0$ である場合を考える．（そうでない場合は対称性を用いて，後で議論する）．
- $\|\boldsymbol{r}\|>100$ だから，$x>100$ のはずである．また，$|x|,|y|,|z|$ のうちのどれかは 1 より小さいはずなので，今は $z<1$ のはず．y についてはこの両者の中間としか言えない．
- さて，(x,y,z) に対応して，新しい点 $(x,',y',z')$ を，

  $$x'=x,\qquad z'=z+1,\qquad y'=\begin{cases}y & (\ y>1\text{ の時})\\ y+1 & (\ y\leq 1\text{ の時})\end{cases}$$

  として決める．(x,y,z) から (x',y',z') への対応は最大でも 2 対 1 で，このとき定義から $|x|,|y|,|z|$ のうちのどれかは 1 より小さいはずなのである．また，$\|\boldsymbol{r}\|>100$ だから，$x>100$ のはずである．従って今の場合，

  $$x^2+y^2+z^2\leq(x')^2+(y')^2+(z')^2\leq 3(x^2+y^2+z^2)\Longrightarrow\qquad(x^2+y^2+z^2)^{-\alpha}\leq 3^\alpha\{(x')^2+(y')^2+(z')^2\}^{-\alpha}$$

  がなりたつ．
- これから，今考えている部分の (x,y,z) での積分は，（$2\times 3^\alpha$ 倍してやれば）B_L での積分で上から押さえられることがわかる．

- $x \geq y \geq z \geq 0$ の場合も，同じように押さえられることがわかる（実際，積分は x, y, z の取り替えや符号の取り替えについて不変だから，全く同じ議論が出来る.）結局，$2 \times 3^\alpha \times 3! \times 2^3$ くらいの定数を C と書いて，
$$\iiint_{A_L} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} dxdydz \leq C \iiint_{B_L} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} dxdydz$$
が成り立つことがわかった.
- このようにして，A_L での積分と B_L での積分はほとんど同じである（高々，定数倍しか違わない）ことがわかる．従って，B_L での積分も A_L と全く同じようにふるまう.

結果として，B_L の積分も $\alpha > 3/2$ で収束する．また，$\alpha \leq 3/2$ の場合の発散は，$\alpha = 3/2$ なら log，$\alpha < 3/2$ なら $L^{3-2\alpha}$ である.

（以上，c) は大変であるが，テストでは「A_L と B_L は似たふるまいをする」ことが何となく書いてあったら良しとするつもりだった．でも，そのようなことを書いた人は 0.5 人...）