2004.4.13.

微分積分続論　（物理学科, SII-19 クラス）

担当：原　隆（数理学研究院）：六本松 3-312 号室，092-726-4774 (hara@math.kyushu-u.ac.jp)

Office hours: 毎週火曜日の午後５時ごろ〜６時ごろ，僕のオフィスにて（また，講義終了後にも質問を受け付けます）.

概要： この講義は（互いに関連する）２部に分かれる．第１部では「多重積分」を，第２部では「線積分・面積分とベクトル解析の初歩」を学ぶ．これらの積分は今までに習ってきた積分の概念を拡張するものであるが，物体の体積，力による仕事，電磁気のいろいろな現象などで自然に出てくるものである．その意味であまり恐れず，基本的なところをマスターしてもらいたい.

キーになる概念：多重積分，累次積分，線積分，面積分，ベクトル解析の初歩.

内容予定： （以下は大体の目安です．皆さんの理解の程度などにより，ある程度の変更はあり得ます.）

I. 多重積分について（５〜６回程度）

1. （復習）定積分とは何だったか？
2. ２重積分の定義
3. ２重積分を累次積分で計算すること
4. ２重積分の変数変換とヤコビアン
5. ３重積分（および４重積分以上）について，上と同様のこと

挿入. I か II の後で中間試験！(ただし，中間試験を「小テスト２回」にするかも）

II. 線積分と面積分：これらの概念を理解し，計算できるようになる（３回程度）

1. 線積分の定義とその意味，計算練習
2. 面積分の定義とその意味，計算練習

III. ベクトル解析の初歩（４回程度）

1. スカラー場の gradient，ベクトル場の divergence, rotation などの定義を理解
2. ガウスの定理とグリーンの定理

中間試験は，やるかやらないかも含めて，進度と相談しながら決め，講義やプリントで連絡する．その日取りは，上の「内容予定」からずれることも十分にあり得るので，知らないうちに試験が終わっていたなどと言うことのないように，十分，注意されたい.

教科書：

- 各自が一年生の時に用いた微分積分の教科書（スウの本では重積分が良くカバーされていないので，学期の前半では一年生の時の教科書を用いるべし.）
- H.P. スウ「ベクトル解析」(森北出版)

参考書：

- 高木貞治「解析概論」（岩波）．今の学生さんには難しすぎる，とかスタイルが旧い，との意見もあるが，やはり名著だ．持っていて損はないぞ.
- 「バークレー物理学２：電磁気学」（丸善） — この講義後半のテーマの非常に良い応用例が力学・電磁気学・流体力学である．皆さんは理学・工学の学生なんだから，これを利用しない手はない．特に,「物理は良くわかってるつもりなんだけど数学はイマイチ」という人はこのバークレーの本を適宜参照すると良い．バークレーの本でなくても力学や電磁気学の教科書は参考になるはず.

評価方法：

何回かの小レポートや中間テストなどと期末試験の成績を総合して評価する．その際，期末テストでの一発逆転もある程度可能なような配慮をするが，詳細は未定（あと２，３回のうちに公にする）．

中間テストをやる場合，その具体的な実施日時は追って講義中に通知します．

合格（最低）基準：

合格のための条件（A, B がとれる条件ではない！）は，講義中に出題する例題，レポート問題と同レベルの問題が解けることである．(ただし「時間がなくてレポートは出せないけど試験には出すぞ」などの指示を講義中に与えることもあり得る.）具体的に書くと，大体，以下のようになる（進度の都合で若干の変更はあり）．

- 重積分の定義がわかり，具体例では重積分を累次積分に直して計算できること．また，積分変数の変換などもできること．
- 線積分，面積分の定義がわかり，具体例を計算できること
- ベクトル解析の初歩（gradient, divergence）が理解できていること．

レポート，宿題について：

講義中に何回か，簡単なレポート問題を出題する．またそれ以外に提出は求めないが「お奨めの宿題問題」なども出すだろう．これらの出題の意図は「この程度できれば講義についていけるし，合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること，である．成績評価に占めるレポートの比重は低いが，この講義をこなす上では重要な意味があるので，面倒でもやってみることを強く奨める．

特に一言：

この講義に出てくるいろいろな概念は，ゆっくり考えればそれほど難しいものではありません．しかし，平面，空間の中の物事を扱うので，図形的な直感がないとかなり苦しむことも考えられます．決して甘く見ずに，着実に学習することをお奨めします.（でないと，夏休みに泣くことになるかも...）

この科目に関するルール：

世相の移り変わりは激しく，僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました．そのうちのいくつかは良いことですが，悪いこともあります．オヤジだとの批判は覚悟の上で，互いの利益のために，以下のルールを定めます．

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強することであると確認する．
- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケットです．
- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける．
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕のホームページも使う —- アドレスは次ページの上）.「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切，受け付けない．
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う．
- 期末試験を行った後では，いかなる特別の救済措置も講じない.（この大学が定める「病気など正当な理由による追試験」は行うが，それ以外の「救済レポート」や「温情の追試験」などは一切やらないということ.）逆に期末試験までなら，皆さんの学習を助ける努力は惜しまないつもりである．
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.kyushu-u.ac.jp）．ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい．

1 重積分

この講義ではいままでにやってきた積分の概念をいろいろと拡張する．その一つ目として,「重積分」をまなぶ.

1.1 積分とは何だったか？

まず，一年生までの復習をも兼ねて,「積分とは何だったか」を復習しておこう．このところがはっきりしていれば，この講義で出てくるいろんな積分など簡単なはず.

$f(x)$ を適当な（例えば連続な）関数とし，簡単のために $f(x) > 0$ としておこう．$a < b$ を定めたときの定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ とは直感的には区間 $[a,b]$ 上での $y = f(x)$ のグラフと x-軸との間の図形の面積である．この数学での定義は以下のようなものだった.

- まず，区間 $[a,b]$ を n 個（n は大きな整数）の小区間に分ける：$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. できる小区間は (x_{i-1}, x_i) である（$i = 1, 2, \ldots, n$）．これを区間 $[a,b]$ の分割といい，Δ で表す．小区間の長さの最大値を $|\Delta|$ と書く：$|\Delta| = \max_i (x_i - x_{i-1})$.
- 各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ に勝手に点 ζ_i をとる（$i = 1, 2, \ldots, n$）．簡単のために $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ をまとめて $\vec{\zeta}$ と書く.
- 上のように決めた $\Delta, \vec{\zeta}$ に対して，<u>リーマン和</u>

$$S(f;\Delta,\vec{\zeta}) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,(x_i - x_{i-1}) \tag{1.1.1}$$

  を計算する.
- さて，$|\Delta| \to 0$ を満たすような任意の Δ とそれに対する任意の $\vec{\zeta}$ を考える．$|\Delta| \to 0$ の極限で $S(f;\Delta,\vec{\zeta})$ の値が（$\Delta, \vec{\zeta}$ の取り方によらず）一定の値に近づくならばその値を $\int_a^b f(x)dx$ の値と定める．模式的に数式で書けば

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{|\Delta|\to 0} S(f;\Delta,\vec{\zeta}) \tag{1.1.2}$$

  とするのである.

上の極限値はいつもあるとは限らない．例えば,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ が有理数の時}) \\ 1 & (x \text{ が無理数の時}) \end{cases} \qquad \text{に対して} \qquad \int_0^1 f(x)dx \tag{1.1.3}$$

を考えても，これは定義できない.（このような関数に対しても「積分」を定義しよう，というのが「ルベーグ積分」なのであるが，この講義ではルベーグ積分は扱わない.）定積分が定義できるかどうかなどについては

- 定積分は定義できなくても,「上積分」「下積分」はいつでも定義できること（Darboux の定理）
- 定積分が定義できる必要十分条件は<u>上積分と下積分の値が等しいこと</u>
- 定積分が定義できる十分条件の一つは「f が連続関数であること」

などを習ったと思う（アヤシイ人は家で復習してきてね）.

ともかく，定積分の基本は，グラフの下の図形を細い短冊の和で近似する，ということなのだった．これからいろいろな積分が出てくるが，これらはすべて，上のような意味での「うまく近似した和の極限」として理解すべきものである.

1.2 2重積分の定義とその意味

2重積分は単に「重積分」ということも多い．まず，重積分で何をやりたいのか，考えてみよう．

2変数 x, y の関数 $f(x,y)$ が与えられている（例：$f(x,y) = xy$）．また，xy-平面上の長方形の領域 $A = \{(x,y) \,\big|\, a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ も与えられている．そのとき，関数 f の領域 A 上での積分 $\displaystyle\iint_A f(x,y)dxdy$ を定義したい．もともと積分は「グラフの下の図形の面積」を表すものだったから，そのノリを保って，以下のように考える．(実際，この定義が自然で役に立つことはこれから見ていく.) —- ここのところはまず黒板で概念を説明するつもり．

関数 $z = f(x,y)$ のグラフは (x,y,z)-空間での曲面になる．簡単のために $f(x,y) \geq 0$ とする．この曲面と xy 平面の間にあり，底面が A である様な立体（A を底面とする柱のようなもの）を考え，この体積を表すものが重積分 $\displaystyle\iint_A f(x,y)dxdy$ であるように，定義を考えたい．1変数の時に倣って，問題の体積を小さな部分の和で近似するつもりで定義する．

- まず，A を小さな長方形に分割する．つまり，x-軸方向には $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots, x_{n-1}, x_n = b$，$y$-軸方向には $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots, y_{m-1}, y_m = d$，と分ける（$m, n$ は大きな整数；これで A は mn 個の小さな長方形に分割された）．この分割を Δ で表す．この時にできる小さな長方形を $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ と書く（$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$）．また，これらの小長方形の辺の長さのの最大値を $|\Delta|$ と書く：$|\Delta| = \max_{i,j} \max\{(x_i - x_{i-1}), (y_j - y_{j-1})\}$.
- 次に，それぞれの小長方形 I_{ij} の中に勝手に点 $\zeta_{ij} = (\xi_{ij}, \eta_{ij})$ をとる．mn 個の ζ_{ij} をまとめて $\vec{\zeta}$ と書く．
- このように決めた $\Delta, \vec{\zeta}$ に対してリーマン和を
$$S(\Delta, \vec{\zeta}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \, (x_i - x_{i-1}) \, (y_j - y_{j-1}) \tag{1.2.1}$$
として定義する．
- 最後に，$|\Delta| \to 0$ となるようないろいろな Δ と，その Δ に対するいろいろな $\vec{\zeta}$ の取り方を考える．$|\Delta| \to 0$ の極限でリーマン和が一定値に近づくならば，その値を「A の上での f の重積分」の値と定義する．つまり，
$$\iint_A f(x,y)dxdy = \lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta, \vec{\zeta}) \tag{1.2.2}$$

これが重積分の定義である（考えやすいように $f(x,y) \geq 0$ の制限を始めにつけたが，勝手な f で上の定義を用いる）．概念図は黒板で説明．もちろん，これは定義の大筋を述べただけで，以下のような問題点（取り扱わなかった点）が残されているが，それは次回以降に行う．

- 1変数の積分と同様，$|\Delta| \to 0$ の極限値が存在するか（すなわち重積分が定義できるか）どうかは全く自明ではない．実際に f の性質が悪いと極限値が存在しないことも多い．極限値が存在する（重積分が定義できる）十分条件など，この辺りの詳しいことは来週．
- 今は長方形上の重積分を考えているが，本当はもっと一般に，xy-平面上の勝手な図形 A の上での重積分を考えたい．この場合も定義のアイディアは同じである（底面 A を小長方形に分けて，小さな柱の体積の和の極限で定義）．ただし，A が性質の良くない図形であれば，またもや積分が定義できないことがおこる．このような点については２，３回の後に触れる．

(更に今後の予告）上に述べたような問題を解決すれば，重積分の定義（とその定義が意味を持つ条件）がわかったことになる．しかし，これだけでは実用上は大変に不便だ．なぜなら，与えられた関数 $f(x,y)$ と図形 A に対して，リーマン和をいちいち計算した後で $|\Delta| \to 0$ の極限を計算するなど，やってらんないから．(1変数の積分の時も，練習問題としてリーマン和から積分の値を計算したことがあると思うが，大変だったでしょう？）そこで次週（かその次）からは，この重積分をもっと簡単に計算する方法を考える．(答えを言ってしまうと，重積分を「1次元の積分を2回やる」ことで計算できるのだ.)

４月２０日：今日は予告通り,「重積分はいつ定義できるのか」についてやります．１次元の積分と基本的には同じ事ですが，復習も兼ねてやることにしました．なお，採点基準についての補足を少しだけ：

- 最終成績は一旦，１００点満点に換算してから，この大学の様式に従ってつける．
- その１００点満点（「最終点」と呼ぶ）は，以下のように計算する．
  - まず,「レポートと中間試験の点」「期末試験の点」をそれぞれ 100 点満点で出す．
  - 次にこの２つを以下の式で「平均」し，一応の総合点を出す：

$$（総合点\ A） \quad = \quad 0.50 \times（レポートと中間の点）+ 0.50 \times（期末の点）$$

    ただし，上の計算式の重みを若干変更する可能性はあることを承知されたい（例えば，総合点 A で，中間と期末の比を 4 : 6 にするなど）．
  - 最終成績は

$$（最終点）= \max\{\,（総合点\ A）,（期末の点）\,\}$$

    とする．つまり,（総合点 A）と（期末の点）を比べて，良い方をとるのだ．

この講義では（上位 10%の人だけがわかるような）進んだ話題はあまり扱わない．そのため,「できる」人が退屈することも考えられる．そのようには自主的な学習を奨める意味で,「期末で一発逆転」も可能なようにした．ただし,「期末の一発勝負」がうまくいく人はそれほど多くないだろうと思われる（期末試験は中間試験やレポートよりは難しい）から，あくまで自己責任でやってくれ．期末の一発勝負に出て成績が悪くても，苦情は一切受け付けないからね！(できる人が少ないだろうと思いつつもこの形式をとるのは，僕の美学にこだわっているからである.）

1.3 重積分はいつ定義できるのか？

先週，２重積分を「定義」したが，どのような関数に対して，この定義が意味を持つのか，を知っておくことは大切だ.（この定義が有効な例が極端に少なかったりしたら，意味がないから.）やりたいことは以下の３つの命題に要約される．

その前に設定や補助的な定義などから．

- 先週と同じく，長方形 $A = [a, b] \times [c, d]$ 上で関数 $f(x, y)$ を積分することを考えている．f はこの長方形上で有界としておく．
- A を横方向に n 個，縦方向に m 個に分割して分割 Δ を作り，その中の点 ζ_{ij} をとる（前回のプリント参照）．
- リーマン和は $S(\Delta, \vec{\zeta}) \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$
- $\lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta, \vec{\zeta})$ の極限が存在するとき，f は A 上で積分可能と言い，その極限を $\iint_A f(x, y)dxdy$ と定義する．
- 分割 Δ に対して以下のように定義する：小さな長方形 I_{ij} における $f(x, y)$ の最大値と最小値（正確には上限と下限）を M_{ij}, m_{ij} と書くとき，

$$\overline{S}(\Delta) \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}), \tag{1.3.1}$$

$$\underline{S}(\Delta) \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \tag{1.3.2}$$

また，

$$\overline{S} = \inf\{\overline{S}(\Delta) \,\big|\, \Delta\ は\ A\ の分割\,\}, \qquad \underline{S} = \sup\{\underline{S}(\Delta) \,\big|\, \Delta\ は\ A\ の分割\,\} \tag{1.3.3}$$

と書く．$\overline{S}$ を上積分，$\underline{S}$を下積分 という．

上積分，下積分の定義から，$\vec{\zeta}$ の取り方にかかわらず，

$$\underline{S}(\Delta) \le S(\Delta, \vec{\zeta}) \le \overline{S}(\Delta) \tag{1.3.4}$$

であることはわかる．次の定理は，上積分や下積分は，自分自身では良い極限を持つことを保証する．

定理 1.3.1 (Darboux の定理) 分割 Δ を限りなく細かくするとき（つまり，$|\Delta| \to 0$ で），上積分と下積分はそれぞれ一定の値に収束し，その行き先は $\overline{S}$ と $\underline{S}$ である．つまり，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \overline{S}(\Delta) = \overline{S}, \qquad \lim_{|\Delta|\to 0} \underline{S}(\Delta) = \underline{S}. \tag{1.3.5}$$

（ただし，$\overline{S} = \underline{S}$ とは限らない.）

では，上積分・下積分と積分可能性の関係はどうか？$\underline{S}$ と $\overline{S}$ の sup, inf としての定義から

$$\underline{S} \le \overline{S} \tag{1.3.6}$$

であることはわかるが，問題はこの２つがいつ，等しいかだ．これは積分可能性と同値だ，というのが下の定理．

定理 1.3.2 (積分可能性の必要十分条件) f が A 上で積分可能である必要十分条件は，上積分と下積分が一致することである．つまり

$$\overline{S} = \underline{S} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ は可積分で，} \iint_A f(x,y)dxdy = \overline{S} = \underline{S} \tag{1.3.7}$$

最後に，簡単な十分条件を挙げておく：

定理 1.3.3 (連続関数は積分可能) 関数 $f(x,y)$ が A 上で連続なら，f は A 上で積分可能である．また，有限個の点を除くと連続な場合も積分可能である．

講義ではこれらの定理の証明（説明）を行う．良くわかっている人には退屈かもしれないし，わかっていない人には難しいと思えるかもしれないが，大事なところだからちょっと辛抱して欲しい —- 次回からは少し趣が異なるはずだ．なお，この講義のレベルでは，上の定理の主張を理解していれば十分である（証明はわからなくても良い）.

上の３つの定理の証明は，１次元の積分の時と全く同じであり，何重積分かは全く関係ない．講義では１次元積分の場合を思い浮かべながら説明する予定.

理解を深めるための問題：

重積分の定義に従って（上の定理を使っても良い），積分 $\iint_A f(x,y)dxdy$ を求めてみよ．ここで

$$A = [0,1] \times [0,1], \qquad f(x,y) = xy \tag{1.3.8}$$

とする．余力のある人は他の $f(x,y)$ の場合も（例：$f(x,y) = x^2$）やってみようか.

この問題の計算は大変である．１次元の積分でも大変だったことを思い返せば当然だろう．しかし，一回はやっておいた方が，後々のためになる．また，その過程で，来週にやる予定の「累次積分」の感覚も掴めると思う．だから面倒でも自分でやってみることを奨める.

まあ，定義に従って重積分を求めるのは大変だ（上の問題をやった人は同意するだろう）．来週は重積分を一次元積分２回に直してやる方法を考える．これで重積分の計算は非常に簡単になるのだ.

４月２７日：今日は「一般の領域での重積分」「重積分を１次元積分に帰着すること」についてです．
なお，５月１１日は「本学記念日」ですが，講義を行います．

第１回レポート問題： 重積分を累次積分に帰着して行う計算問題です．レポート問題は例題のつもりで出しているから，数が足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問１： 以下の場合に，重積分 $\iint_A f(x,y)\,dxdy$ を計算せよ..

a) $A=[1,2]\times[0,1]$，$f(x,y)=xy$.

b) $A=[0,1]\times[0,1]$，$f(x,y)=\dfrac{1}{2x+y+1}$.

c) A は３直線 $x=0, y=0, 2x+y=1$ で囲まれた図形，$f(x,y)=\dfrac{1}{2x+y+1}$.

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

５月７日（金）午後５時までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の封筒（箱？）に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

————————————————-以下，レジュメの続き ——————————————

1.4 一般の領域での重積分

前節への補足として，一般の領域での重積分の定義を簡単に述べておく．この小節の内容は，まあ常識的なものだから,「油断すると変なこともある」点以外はそれほど気にしなくてよい.（ただし「縦線図形上の積分」は後で一杯出てくる.）

今までは xy-平面の長方形 $A=[a,b]\times[c,d]$ 上の積分を考えてきた．xy-平面の一般の図形 B での積分はどう定義したら良いだろうか？まず天下りに定義を与え，その後で意味を説明する．

B を xy 平面内の有界な図形とする．B の特性関数（定義関数）と呼ばれる関数 $\chi_B(x,y)$ を，

$$\chi_B(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in B \text{ のとき}\\ 0 & (x,y)\notin B \text{ のとき}\end{cases} \tag{1.4.1}$$

と定義する．また，B をその内部におさめられるような，十分大きな長方形 B^* をとる．

この準備の下で，まず図形 B の面積を定義しよう．

定義 1.4.1 (一般の図形の面積) 図形 B の面積は，重積分

$$\iint_{B^*} \chi_B(x,y)\,dxdy \tag{1.4.2}$$

によって定義する．この積分が存在しない場合は，B の面積は定義できないと考える．この積分が存在する場合，B は面積確定であるという．

上の定義の右辺は，B^* が長方形であるから，前節までの定義によって解釈できる．χ_B の定義を見ればわかるように，この右辺では積分に実質的に効いてくるのは B の中だけである．この意味で上の定義は直感的に「正しい」ものと考えて良い．

図形 B の「面積」とは何か？は決してアタリマエの事ではない．我々が日常見かけるような図形は，その境界が滑らかな曲線であるから，その面積は直感的にも定義できる．しかし，その境界が連続な曲線まで拡げると，既に上の定義では面積が確定できない図形も多々ある．物理や工学に出てくる曲線でも滑らかでないものもある（例：ブラウン運動の軌跡．もう少し講義で）．

この意味で,「図形の面積」は我々が苦労して，意識的に定義すべきものである．以下に，面積が確定するための十分条件を少し挙げる．

定理 1.4.2 (B の面積確定のための十分条件) 図形 B の面積が定義できるための十分条件のいくつかは以下の通りである：
（１）B の境界が滑らかな曲線であること．つまり，$x = x(t), y = y(t)$ という閉曲線（$0 \le t \le 1$ かつ $x(0) = x(1), y(0) = y(1)$）があって，その内部が B であり，かつ，$x(t), y(t)$ が t の関数として C^1-級（一階微分可能で，導関数が連続）であること．
（２）$x = a, x = b$ の２つの直線と $y = \varphi(x), y = \psi(x)$ （ただし $a \le x \le b$ で $\varphi(x) \le \psi(x)$，かつ $\varphi(x)$ と $\psi(x)$ は x の連続関数）なる２つの曲線で囲まれた部分が B であること．

定理の（２）に出ているような図形を縦線図形という．上では y-方向の「縦線」でできた図形の例を示したが，x-方向の「横線」でできた図形，つまり

$$y = c, \quad y = d, \qquad x = \varphi(y), \quad x = \psi(y) \quad \text{で囲まれた図形} \tag{1.4.3}$$

に対しても定理は成り立つ．また，このような図形も「縦線図形」という．

この準備の下で,

定義 1.4.3 (面積確定の図形の上の重積分) 面積が確定する図形 B が与えられたとする．B 上で定義された関数 $f(x, y)$ が与えられたとき，f の B での積分は，重積分

$$\iint_B f(x,y)dxdy \equiv \iint_{B^*} f(x,y)\chi_B(x,y)\,dxdy \tag{1.4.4}$$

によって定義する．右辺の積分が定義できる場合は f は B で可積分（積分できる)，定義できない場合は f は B で積分できないという．

最後に，積分可能の十分条件を挙げておく．図形 B が面積確定との条件をつければ，だいたい，長方形上での積分と同じ事になる．

定理 1.4.4 (積分可能の条件) 図形 B の面積が定義できる時，その上の関数 f が B で積分可能なための十分条件は，f が B 上で連続な事である．

1.5 重積分と累次積分

先週の「理解を深めるための問題」にあるように，重積分をその定義から（分割を使って）求めるのは大変だ．ところが，n 重積分は（大抵の場合）n 個の１次元積分のくり返しで求められる．これは非常な省力化であり，実用上も非常に有り難い．今日はこの重要な性質を学ぶ．

今までと同じく，$A = [a, b] \times [c, d]$ とし，この上での $f(x, y)$ の重積分を考える．図形 A が前小節の「一般の図形」の場合については後で少しだけ触れる．

定理 1.5.1 (累次積分への帰着) 関数 $f(x,y)$ が A 上で積分可能とする．このとき，すべての $x \in [a,b]$ に対して

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy \tag{1.5.1}$$

を定義できるならば,

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx \tag{1.5.2}$$

が成り立つ．x, y を入れ替えた形の定理ももちろん，なりたつ．すなわち，すべての $y \in [c,d]$ に対して

$$G(y) = \int_a^b f(x,y)dx \tag{1.5.3}$$

を定義できるならば,

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_c^d G(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \tag{1.5.4}$$

である．

講義で詳しく説明するが，$z = f(x,y)$ のグラフの下の体積を求めると思えば，この定理の主張を高校までの積分で理解できる．高校では，このような立体を x-軸に垂直な面で切り，その断面の面積を積分することで体積を求めた．(1.5.4) は，正にこれになっている［$F(x)$ が断面の面積に相当］.

記号：(1.5.4) の積分は，通常はカッコを省略して

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx \tag{1.5.5}$$

と書かれる（a,b,c,d と x,y の順番に注意）．ただ，これでは x,y どっちの変数がどこまで動くのかが混乱しがちなので，積分範囲を明確にするために

$$\int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) \tag{1.5.6}$$

と書くことも多い.（物理や工学では後者の書き方が一般的である.）後者では「積分記号の直後にある積分変数がその範囲を動く」点がわかりやすいが，その反面，この後に更に数式が続いた場合など,「どこまでが非積分関数か」わかりにくい面もある...

系 1.5.2 (Riemann 積分に対する Fubini の定理) 関数 f が A 上で積分可能のとき（両辺に意味がつく限り）

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \tag{1.5.7}$$

が成り立つ．つまり，累次積分の順序を交換できる．

問： A 上で積分可能であるが，上の $F(x)$ が（ある $x \in [a,b]$ に対しては）定義できないような $f(x,y)$ の例を作れ.

問： 以下の重積分を計算せよ．$A = [0,1] \times [0,1]$.

$$\iint_A (x^2+y^2)dxdy, \qquad \iint_A xy\,dxdy, \tag{1.5.8}$$

定理 1.5.1 の証明について：

上に書いたように，立体の体積だと思えばアタリマエのようなものだが，一応，講義では説明する． □

（少し進んだ話題）

1．定理 1.5.1 では $F(x)$ や $G(y)$ が定義できることを仮定したが，これを仮定しないバージョンは以下のようになる：f が A で可積分の時，$\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$ の上積分と下積分をそれぞれ $\overline{F}(x), \underline{F}(x)$ で表すと，

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \overline{F}(x)dx = \int_a^b \underline{F}(x)dx \tag{1.5.9}$$

である.（上積分，下積分はいつでも存在するから，f の可積分性のみを仮定すれば十分.）

2．定理 1.5.1 は「$f(x,y)$ が A で積分可能ならば，重積分は累次積分で書ける」ことを主張している．この逆は成り立つかを考えたい．つまり，

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \qquad \text{（累次積分が定義できて積分順序によらない）} \tag{1.5.10}$$

ならば，f は A で可積分だろうか？

残念ながら，そうとは限らない．次のやや人工的な f は (1.5.10) が成り立つにもかかわらず，A で積分できない例である．このような意味で，累次積分の性質からもともとの重積分が定義できるかどうかを判定することはできない.

例： 正方形 $[0,1]\times[0,1]$ を S と書く．また，k-番目に大きい素数を p_k と書く（$k=1,2,\ldots$）．更に，適当な 1 以上の整数 k と整数 m,n を用いて $\left(\frac{m}{p_k},\frac{n}{p_k}\right)$ の形に書ける S の内点の全体を T と書く：

$$T = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{m}{p_k},\frac{n}{p_k}\right) \middle|\, 0<m<p_k,\ 0<n<p_k \right\} \tag{1.5.11}$$

更に，

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \bigl((x,y)\in T\bigr) \\ 1 & \bigl((x,y)\in S\backslash T\bigr) \end{cases} \tag{1.5.12}$$

と定義する．このとき，

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)dx\right] dy = 1 \tag{1.5.13}$$

であるが，$\displaystyle\iint_S f(x,y)\,dxdy$ は<u>定義できない</u>.

3．このように，Riemann 積分では何かと話がヤヤコシイのだが，この点は Lebesgue 積分を考えると大幅に改善される．粗っぽくいうと，上の反例などは大体が非常に些細なところから出ているので，その部分を「無視」するような定義を用いれば反例が消滅するわけ．Lebesgue 積分というのはどの部分が「些細」で無視して良いかを合理的に決めたものとも考えられる.

一般の図形上での積分に対する累次積分

長方形でない図形 B 上での積分を累次積分に帰着することも，同様に考えていける．たとえば，B が

$$x=a, \quad x=b, \qquad y=\varphi(x), \quad y=\psi(x) \tag{1.5.14}$$

で囲まれた縦線図形の場合（$a\le x\le b$ で $\varphi(x)<\psi(x)$），

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right] dx \tag{1.5.15}$$

が成り立つ.

５月１１日：今日は「席分の順序交換」を少しやってから「重積分での変数変換」をやります.

第１回レポートの解答： 問題は，重積分 $\iint_A f(x,y)\,dxdy$ を計算せよ，でした.

a) $A=[1,2]\times[0,1]$, $f(x,y)=xy$. やるだけです.

$$\iint_A xy\,dxdy=\int_1^2 dx\,x\int_0^1 dy\,y=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2\times\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$$

b) $A=[0,1]\times[0,1]$, $f(x,y)=\dfrac{1}{2x+y+1}$. 同じくやるだけ：

$$\iint_A \frac{1}{2x+y+1}\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\,\frac{1}{2x+y+1}=\int_0^1 dx\left[\log(2x+y+1)\right]_{y=0}^{y=1}$$
$$=\int_0^1 dx\,\log(2x+2)-\int_0^1 dx\,\log(2x+1)=\cdots=3\log 2-\frac{3}{2}\log 3$$

上のは勿論，x を先に積分して

$$=\int_0^1 dy\int_0^1 dx\frac{1}{2x+y+1}=\int_0^1\frac{1}{2}\Big\{\log(3+y)-\log(1+y)\Big\}=\frac{1}{2}\big\{6\log 2-3\log 3\big\}$$

としても，もちろん同じ．ここまでは皆さん良くできてましたが，何人か積分の計算間違いをした人がいました.

c) A は３直線 $x=0,y=0,2x+y=1$ で囲まれた図形，$f(x,y)=\dfrac{1}{2x+y+1}$. これもやるだけだが，積分範囲を間違いなく書き直すことに注意しよう．実際，２割程度の人が，累次積分になおすところで失敗していました．このような問題は，まず，どんな領域をやっているのか，図を描くことが大事です.

y を先に積分すると，

$$\iint_A \frac{1}{2x+y+1}\,dxdy=\int_0^{1/2}dx\int_0^{1-2x}dy\,\frac{1}{2x+y+1}=\int_0^{1/2}dx\Big\{\log(2)-\log(2x+1)\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\log 2-\Big\{\log 2-\frac{1}{2}\Big\}=\frac{1-\log 2}{2}$$

x を先に積分すると，

$$\iint_A \frac{1}{2x+y+1}\,dxdy=\int_0^1 dy\int_0^{(1-y)/2}dx\,\frac{1}{2x+y+1}=\frac{1}{2}\int_0^1 dy\Big\{\log(2)-\log(y+1)\Big\}$$
$$=\frac{1}{2}\Big\{\log 2-2\log 2+1\Big\}=\frac{1-\log 2}{2}$$

もちろん，どっちを先に積分しても答えは一緒.（今日の講義で，第３のやり方を見るだろう.）

おまけ：積分の定義に従って，$\iint_{[0,1]^2}xy\,dxdy$ を計算すること.

これは２回前に「理解を深める問題」として出したもの．解答を簡単に書くと以下の通り．まず，非積分関数が連続であり，積分領域も大人しいものだから，この積分は存在する．従って，こちらが計算のしやすいような分割を用いて計算すれば十分である．そこで，$[0,1]$ を n 等分して分割を作ろう（x,y 方向ともに）．また，$\zeta_{ij}=(\frac{i}{n},\frac{j}{n})$ ととることにしよう．このとき，小さな長方形（正方形）I_{ij} の面積は $\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}$ である.

従って，この分割と $\vec{\zeta}$ の取り方についてのリーマン和は，

$$S(\Delta,\vec{\zeta})=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{1}{n^2}\frac{i}{n}\frac{j}{n}=\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^n i\sum_{j=1}^n j=\frac{1}{n^4}\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{4}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2$$

と計算できる．$n\to\infty$ ではこれは $\frac{1}{4}$ に収束するので，積分の値は $\frac{1}{4}$ だ.

—————以下，レジュメの続き —————

（前回の補足：重積分の順序交換）

前回,（非積分関数が「良い」性質を持っていれば）重積分の順序は交換できる，ことをみた．これは重積分を累次積分に帰着することから出てきたもので，考え方は非常に単純 —— 要するに，与えられた積分範囲をどんな順番でも良いから尽くすように覆えばよいわけだ．でもこれは応用上，非常に大事なものである．

例えば，前回のレポート問題 c) では $x = 0, y = 0, 2x + y = 1$ で囲まれた三角形の領域での積分を考えた．上の解答にも載せたように，x, y どちらの積分を先にやっても構わない．また，例えば x での積分を先にやる形の累次積分で与えられた積分の順序を変えて，y から積分しても良い．問題によっては，このように順序を変えることで簡単に計算できる場合があるので，これは実際問題としては大事である.（以下の具体例をみよ.）

例題： 積分領域 B を，$(x-1)^2 + y^2 \le 1$ と $y \ge 0$ で囲まれた図形として，積分 $\iint_B x^2 y\, dxdy$ を計算せよ.（この問題は x, y のどちらか一方を先にやると簡単にできる．順序を逆にすると大変だよ.）

順序交換は実用上，非常に大事だから，いくつか例題を挙げておく：以下の積分の順序交換を納得せよ（f は適当な関数，$a, b > 0$ は定数）

$$\int_0^a dx \int_{-bx}^{bx} dy\, f(x,y) = \int_0^{ab} dy \int_{y/b}^{a} dx\, f(x,y) + \int_{-ab}^{0} dy \int_{-y/b}^{a} dx\, f(x,y),$$

$$\int_0^{1/2} dx \int_{x^2}^{x} dy\, f(x,y) = \int_0^{1/4} dy \int_{y}^{\sqrt{y}} dx\, f(x,y) + \int_{1/4}^{1/2} dy \int_{y}^{1/2} dx\, f(x,y)$$

このような問題では，積分領域の図を描いて，間違わないように書き換えるのが良い．

1.6 重積分の変数変換

１変数関数の積分では変数変換（置換積分）の公式が存在した，多重積分においても同様の公式が存在し，かつ実際上，非常に有用である．

１次元の場合を思い出そう．この場合，$x = x(t)$ と変数変換すると，

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t))\, x'(t)\, dt \tag{1.6.1}$$

であった（t_1, t_2 は $x(t)$ がそれぞれ x_1, x_2 になる t の値）．x と t の間で，座標が伸び縮みした分を考慮に入れるために，$x'(t)$ が必要になったのである．

２重積分の時に，これに相当するものは何だろうか？今，(x, y) から新しい座標 (u, v) に移ることを考える．ここで新しい座標系が (u, v) だが，後々が楽になるので，(x, y) と (u, v) の関係を

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v) \tag{1.6.2}$$

と書くことにする．例としては，$x = u + v, y = u - v$ などを想定して欲しい．このとき，(x, y) でみた時の積分領域 A が，(u, v) では B になるとしよう．また，上の変数変換をして f を表したものを $g(u, v)$ と書こう：

$$g(u, v) \equiv f(x(u, v), y(u, v)). \tag{1.6.3}$$

さて，問題：重積分 $\iint_A f(x, y) dxdy$ は，u, v での重積分として，どのように書けるだろうか？

単純に考えて，積分領域 A が B になるのだから，

$$\text{（間違い！！）} \qquad \iint_A f(x, y)\, dxdy = \iint_B g(u, v)\, dudv \qquad \text{（間違い！！）} \tag{1.6.4}$$

となると思ったら，一般には間違いである．これが間違いであることは，１次元の時を思いだせば，ある程度は理解できる．１次元の場合，区間 $[x_1, x_2]$ が区間 $[t_1, t_2]$ に変わったからと言って，

$$\text{（間違い！！）} \qquad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t))\, dt \qquad \text{（間違い！！）} \tag{1.6.5}$$

ではなかった．変数変換によって区間が伸び縮みする効果を考えに入れるために，$x'(t)$ が必要だったわけね．

重積分でも事情は同じで，変数変換によって座標が伸び縮みした効果を表すものが必要である．ただし，考えている座標の変換が２次元的だから，伸び縮みだけでなく,「ひねり」の要素も加わるので，話がややこしい．

答えを言ってしまうと，以下のようになる．まず，変数変換に対応して，ヤコビアンと呼ばれる関数 $J(u,v)$ を，以下の行列式で定義する：

$$J(u,v) \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}. \tag{1.6.6}$$

また，変数変換は十分に性質の良いもの，つまり

- 領域 A と B の点が１対１に対応し，
- $x = x(u,v)$ と $y = y(u,v)$ が偏微分可能で導関数が連続,
- B 内でヤコビアン $J(u,v)$ がゼロでない

だとする．このとき，なお，上の定理では，ヤコビアンの絶対値をとったものが現れていることにも注意しよう．１次元の積分では $x'(t)$ （絶対値ではない）が出ていたこととちょっと違う．この理由は何だろう？

例題：前回のレポートの c) を，別の座標でやってみよう．新しい座標 u, v を

$$u = y, \quad v = 2x + y, \qquad \text{つまり}, \qquad x = \frac{v-u}{2}, \quad y = u \tag{1.6.7}$$

として導入しよう．積分領域は，新しい座標では

$$v - u \geq 0, \quad u \geq 0, \quad v \leq 1 \qquad \text{（これを } B \text{ とする）} \tag{1.6.8}$$

となる．また，ヤコビアンは，

$$J = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \tag{1.6.9}$$

従って，

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{1}{2x+y+1} dxdy &= \iint_B \frac{1}{v+1}\frac{1}{2}\, dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 dv \int_0^v du\, \frac{1}{v+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 dv \frac{1}{v+1} \times v = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{v}{v+1}\, dv \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{w-1}{w} dw = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big[\log w\Big]_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2 \end{aligned} \tag{1.6.10}$$

と計算できた．こっちの方がレポートの解答よりも簡単かな？ □

非常に重要な例：平面の極座標

直交座標 (x,y) から極座標 (r,θ) への変換を考えよう．座標変換の式は

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{1.6.11}$$

であるから，ヤコビアンは

$$J(r,\theta) = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \tag{1.6.12}$$

というわけで，皆さんのよく知っている（はずの） $dxdy$ を $rdrd\theta$ に変換するのが出てきた.（３次元の極座標については来週くらいにやります）.

言うまでもなく，このような変数変換は，それをやることによって初めて積分できる場合が多いから重要なのだ．例えば積分 $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ はこのままでは積分が非常に難しい．しかし，極座標に変換すると

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^1 dr\, r\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{-r^2} = 2\pi\int_0^1 e^{-r^2}\, r\, dr = 2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^1 = \pi(1-e^{-1}) \tag{1.6.13}$$

と計算できる．

ヤコビアンの意味

上の変数変換の式（ヤコビアン）が出てくる理由を述べよう．そのためには重積分の定義に戻って考えるのが良い．

何度も強調したように，$\iint_A f(x,y)dxdy$ とは，xy 座標系を細かく四角に区切って，その四角の面積と $f(x,y)$ の値をかけたものを足し併せ（たものの極限をと）る，ことだった．同様に， $\iint_B h(u,v)dudv$ は，uv 座標系での四角の面積と h の値をかけて和をとるわけ．

さて，uv-平面での小さな四角 $[u,u+du]\times[v,v+dv]$ を考えよう．これがもとの xy-平面で囲む図形は，その 4 つの頂点が

$$(x(u,v),y(u,v)),\ \ (x(u+du,v),y(u+du,v)),\ \ (x(u,v+dv),y(u,v+dv)),\ \ (x(u+du,v+dv),y(u+du,v+dv)) \tag{1.6.14}$$

で与えられる，近似的な平行四辺形になる．この平行四辺形を作る 2 つのベクトルは du, dv が非常に小さいとすると，

$$\begin{bmatrix} x(u+du,v)-x(u,v) \\ y(u+du,v)-y(u,v) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u}du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} du \quad \text{と} \quad \begin{bmatrix} x(u,v+dv)-x(u,v) \\ y(u,v+dv)-y(u,v) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ \\ \frac{\partial y}{\partial v}dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} dv \tag{1.6.15}$$

である．ところで，ベクトル (a,b) と (c,d) の作る平行四辺形の面積は，行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の行列式，つまり $ad-bc$（の絶対値）で与えられた（線形代数の講義を思い出そう；忘れていても，初等的にも導けるよ）．これを用いると，考えている近似的な平行四辺形の面積は以下（の絶対値）になるはずだ．

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial v}dv \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} dudv = J(u,v)\,du\,dv \tag{1.6.16}$$

このようにしてヤコビアンが登場するのである． □

５月１８日：今日は「重積分の変数変換」の補足と,「３重積分（とそれ以上)」です.
藤田宏：「大学での微積分 I, II」（岩波書店）は割合，読みやすいかもしれない.
（確率はそれほど高くないが）２週間後の 6/1 に小テストをするかもしれないので，来週の講義での情報（または僕の web page での情報）に注目のこと.

第２回レポート問題：重積分の順序交換と変数変換の問題です．レポート問題は例題のつもりで出しているから，数が足りないと思ったら各自，教科書や参考書などで補ってください.

問２： 以下の重積分の積分範囲を図示し，かつ累次積分の順序を交換せよ．f は与えられた関数で，積分の順序交換はできると仮定して良い．(b) の問題では，答えは一つの累次積分（２重積分１つ）の形にまとめよう.

$$a)\quad \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy\, f(x,y) + \int_1^2 dx \int_x^{x^2} dy\, f(x,y) \qquad b)\quad \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} dx\, f(x,y) + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} dx\, f(x,y)$$

問３： 領域 A は x-軸，y-軸，曲線 $x^2+y^2=1$ で囲まれた図形，$f(x,y)=xy\sqrt{x^2+y^2}$ とする時，重積分 $\iint_A f(x,y)dxdy$ を，以下の３通りの方法で計算せよ．その際，どの図形で積分しているのかをそれぞれ図示せよ.（５月２５日に加えた注：このままでは出題ミスだ．正しくは，積分領域を，$x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1$ とすべきである．より詳しくは 5/25 のプリントを参照．混乱を招いた可能性についてお詫びします.）

a) 単純に x, y での累次積分に直して.

b) 極座標への変数変換を用いて，つまり $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

c) $x = \sqrt{u+v}, y = \sqrt{u-v}$ なる変数変換を用いて.

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります.

レポート提出について：

上の問に解答し,

5 月 24 日（月）午後５時までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の封筒（箱？）に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ)．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ.

——————————以下，レジュメの続き——————————

２次元の極座標の応用例としては $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ の証明がある．不思議なのだが，これは

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \tag{1.6.17}$$

と考えて極座標に変換すると計算できるのだ.

発展問題：

重積分の順序交換の応用として，１変数関数のテイラーの定理（剰余項の表式つき）を導いてみよう．簡単のため，関数 $f(x)$ はすべての x で無限階微分可能だとする.

1. 微分積分学の基本定理から以下が成り立つことに注意しよう（ここで $f'(t)$ は $f(t)$ の，t に関する導関数）

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, \qquad \text{同様に,}\quad f'(t) = f'(a) + \int_a^t f''(s)ds \tag{1.6.18}$$

2. 右の式を左の式に代入して，$f(x)$ の表式を作れ．そこに出てくる２重積分の順序を交換して

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-s)f''(s)ds \tag{1.6.19}$$

が成り立つことを示せ.

3. これを帰納法的にくり返して，$f(x)$ の n 次のテイラー展開の式を求めよ.

この結果として得られる表式は剰余項を積分で与えてくれるものなので，かなり使いやすい．通常は「区間 $[a,x]$ 中の一点 x_1 があって，$f^{(n+1)}(x_1)(x-a)^{n+1}/(n+1)!$ が剰余項」などとするが，これでは x_1 がどこにあるのかわかりにくいので，困ることがある.

1.7　３次元以上の重積分

いままで，平面上の領域での重積分を考えてきた．空間内での積分（３重積分）は平面の場合と全く同様のアイディアで定義される．ただし，平面の場合には考える積分領域（２次元）を細かい長方形のメッシュで覆ったが，３次元の場合には積分領域（３次元）を細かい直方体で覆うところが異なる.（これ以外は全く同じだからくり返さない．でもよく考えると，１次元と２次元の差も，覆う対象が１次元の領域か２次元の領域か，それに応じて分け方を変えただけだった.）

４次元以上での積分（４重積分，５重積分）も同様に定義できるが，同じなのでくり返さない.

これらの n 重積分も，２重積分と同様の性質を持っている．すなわち，

1. n 重積分は，非積分関数と積分領域の性質が良ければ，n 個の累次積分で表せる．実際に累次積分に直すには，n-次元空間での積分領域を図示して（4 次元以上では不可能だが，少なくともできるだけ思い浮かべて），丁寧に直していけばよい.
2. n 重積分においても，性質の良い変数変換に対しては，ヤコビアンを用いた変数変換の公式が成り立つ．勿論，この場合のヤコビアンは $n \times n$ 行列の行列式である.

ヤコビアンについて補足しておく．n 次元での元々の座標が $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 新しい座標が $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ で，各 x_i は u_1 から u_n の関数として書けているとする．このとき，

$$\iint \cdots \int_A f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \iint \cdots \int_B g(u_1, u_2, \ldots, u_n) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} \right| du_1 du_2 \cdots du_n \tag{1.7.1}$$

となる．ここで B は新しい座標 $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ で見た積分領域 A のことであり，g は対応する点での f の値を表す．また，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \tag{1.7.2}$$

という $n \times n$ 行列の行列式である.

座標変換で最も重要なのは極座標への変換であろう．３次元の場合，これは

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\phi, \quad y = r\,\sin\theta\,\sin\phi, \quad z = r\cos\theta \tag{1.7.3}$$

で，(r, θ, ϕ) の動く範囲はそれぞれ $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ である．この場合のヤコビアンは（各自確かめる）

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = \det \begin{bmatrix} \sin\theta\,\cos\phi & r\cos\theta\,\cos\phi & -r\sin\theta\,\sin\phi \\ \sin\theta\,\sin\phi & r\cos\theta\,\sin\phi & r\sin\theta\,\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} = r^2\sin\theta \tag{1.7.4}$$

となる．以下に極座標関連の発展問題を２つ載せる．どちらもかなり大変だから，無理にできるようになる必要はない．今できることよりも，将来，何らかの役に立つだろうと思って載せている．

発展問題：

４次元以上の極座標と，そのヤコビアンがどうなるか，一度はやってみると良い．ただし，一般次元では計算が非常に大変であるから，相当の覚悟が必要.

発展問題その２：

n を３以上の整数とする．原点を中心とする半径 r の n-次元球とは，$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \le r^2$ を満たす点の集合である．こいつの体積 $V_n(r)$ を求めるには，いくつかの方法がある．

- 上の発展問題で求まったはずのヤコビアンを用いて，n-次元極座標へ変換した積分を行う．非積分関数には，この球の定義関数をとればよい．この方法は一番の基本だが，ヤコビアンの計算が大変で死ぬことが多い...
- この球を x_n が一定の面で切ると，その切り口は半径が $\sqrt{r^2 - x_n^2}$ の，$(n-1)$ 次元球になる．この切り口の面積（体積）を x_n で積分することで，n 次元球の体積が求められるはずだ：
$$V_n(r) = \int_{-r}^{r} dx_n\, V_{n-1}(\sqrt{r^2 - x_n^2}) \tag{1.7.5}$$
一方，相似な図形の体積を考えると，半径 r と半径 1 の球の体積の比は丁度 r^n のはずである：
$$V_n(r) = r^n V_n(1) = r^n \times a_n \tag{1.7.6}$$
この２つの式を組み合わせると，a_n と a_{n-1} の間の漸化式が得られる．２次元球（円）や３次元球では $a_2 = \pi, a_3 = 4\pi/3$ を知っているから，漸化式を解くことで a_n と $V_n(r)$ がわかる．
- n 次元のガウス積分 $\displaystyle\iint\cdots\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ を以下の別々の方法で計算して，結果を比較する．
  - 指数関数が積に分かれることから，各成分でバラバラに積分する．結果は $\pi^{n/2}$ のはず.
  - n 次元の極座標に変数変換するつもりになる．しかし，今は非積分関数が球対称だから，角度成分は積分できてしまって，結局 $\int_0^\infty dr r^{n-1} c_n\, e^{-r^2}$ の形になるはずだ．ここで c_n は n ー次元の立体角（半径 1 の n-次元球の表面積）であり，a_n とは，$c_n = n a_n$ の関係にある.

  両者を等置して，
$$\pi^{n/2} = n\, a_n \int_0^\infty dr\, r^{n-1}\, e^{-r^2} \tag{1.7.7}$$
となるはずで，これから a_n と $V_n(r)$ が求まる.（右辺の積分ができないって？ Γ-関数だよ.）

1.8 おまけ：広義多重積分

１変数関数の場合，広義積分というのは $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ や $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ のように，(1) 非積分関数がある点で無限大になってしまうもの (2) 積分区間が無限の大きさを持ってしまうもの，などを言った．これらは共に，最低限のリーマン積分の定義からはみ出しており，何らかの補足的な定義を必要とするからである.

そして実際，これらの積分は以下のような極限として定義（解釈）された：

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{1+x^2}\,dx \tag{1.8.1}$$

（これらの極限が存在する場合，その極限値を広義積分の値と定義する.）左の例では $x=0$ で非積分関数が無限大になるので，そこを ϵ だけ避けた形の積分をまず考え，$\epsilon \to 0$ の極限を考えている．右の例では積分区間が無限に広いから，$[0, R]$ という有限のところでの積分をまず考え，$R \to \infty$ とすることで無限区間での積分を再現したつもりになっている.

なお，$\lim_{\epsilon\downarrow 0}$ というのは，ϵ を正のままゼロに近づける，の意味であり，$\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0+}$，$\displaystyle\lim_{\epsilon\to +0}$ などとも書く.

重積分の場合も広義積分は極限として定義するが，極限の取り方がもっと色々あるから大変だ．例えば,「平面全体」で積分する場合，どのような形の有限領域を拡大していくかで極限が異なる可能性がある.（１次元の時でさえ, $\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)$ とは，プラスとマイナスの方向を別々に無限大にすることだった.）

一応，定義に類するものを与えておこう.

定義 1.8.1 (広義積分のちょっといい加減な定義) 平面内の図形 A で関数 f を積分し，$\iint_A f(x,y)dxdy$ を求めたいが，非積分関数が無限大になったり，積分領域が無限に広かったりして，いままでの重積分の定義が適用できないとしよう．このとき，以下のような積分領域の列を考える.

(a) 図形 A は有界だが，その内の一点 a で f が無限大になる場合：　このときは一点 a とその周囲を少し除いた形の領域の列 $\{A_n\}$ で，$n \to \infty$ では A に一致するようなものを考える.

(b) 図形 A が無限の広がりを持つ場合：　このときは，有界な領域の列 $\{A_n\}$ で，$n \to \infty$ では A に一致（近づく）ようなものを考える.

このどちらの場合でも，もし，極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{A_n} f(x,y)dxdy \tag{1.8.2}$$

が存在し，かつその $\underline{\text{極限が } \{A_n\} \text{ の取り方に依らない}}$ ならば，この極限を広義積分 $\iint_A f(x,y)dxdy$ の値と定める．極限が存在しなかったり，極限が $\{A_n\}$ の取り方によるばあいは，広義積分 $\iint_A f(x,y)dxdy$ は存在しない，という.

上の (a), (b) の両方に該当する場合や f が無限大になる点が複数ある場合などは，その都度，適当に A_n をとって考える．なお，問題によっては，特定の列 $\{A_n\}$ についてのみ極限があれば良しとする場合もあるので注意.

あまり一般的にやってもややこしくなるだけなので，以下の２つの例を中心に考える（$\alpha > 0$ は定数）.

$$(a) \quad \int_{0<x^2+y^2\le 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy, \qquad (b) \quad \int_{x^2+y^2\ge 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy \tag{1.8.3}$$

(a) の場合，非積分関数が原点で無限大になるが，ともかく半径１の円内で積分したい．そこで，A_n として，円環 $\frac{1}{n^2} \le x^2+y^2 \le 1$ をとってみる．原点でやばいことがおこっているので，そのまわりを少しだけ除いた訳だ.

極座標に移ると，A_n は $\frac{1}{n} \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$ の領域に移る．従って,

$$\iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/n}^1 dr r \frac{1}{r^{2\alpha}} = 2\pi \int_{1/n}^1 dr\, r^{1-2\alpha} \tag{1.8.4}$$

が得られた．この積分は $\alpha < 1$ ならば，$n \to \infty$ でも存在する．一方，$\alpha \ge 1$ では，$n \to \infty$ の時に発散してしまう．従って，元の重積分が定義できるためには，$\alpha < 1$ が必要であることがわかる.

なお，広義積分の定義では，上のような円環以外の $\overline{A_n}$ についての極限も考察し，それらがすべて同じであることを確かめねばならない．これはなかなか大変なのであるが，今の場合は非積分関数が正であるため，積分の値は領域 A_n について単調増加である．つまり

$$A \subset B \qquad \text{なら,} \qquad \iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy \le \iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy \tag{1.8.5}$$

が成り立つ．この性質を利用して，一般の A_n での積分の値を，上で定義した円環での積分の値で挟み込むことができ，このような議論からどのような A_n についても積分の極限値は等しいことがわかる．つまり，$\alpha < 1$ がこの広義積分の存在のための必要十分条件だ.

(b) の場合，今度は積分領域が無限に広いので，$1 \le x^2+y^2 \le n^2$ なる円環を A_n としてやろう．極座標に移って同様に計算すると,

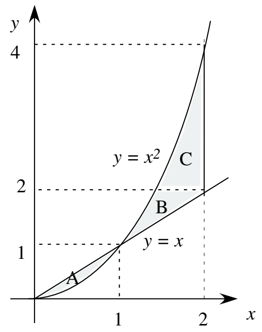
$$\iint_{A_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy = \int_1^n dr r \frac{1}{r^{2\alpha}} = \int_1^n dr\, r^{1-2\alpha} \tag{1.8.6}$$

が得られる．この積分は $n \to \infty$ の時，$\alpha > 1$ なら収束するが，$\alpha \le 1$ なら発散する．(a) の場合と同様に単調性を使って議論すると，この広義積分が定義されるためには $\alpha > 1$ が必要十分であることがわかる［(a) の場合と不等号の向きが逆なことに注意］.

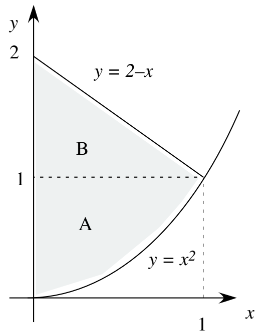
５月２５日：先週のレポート問題の問３は，厳密に言えば出題ミスです（詳しくは以下を参照）．大変，申し訳ありません．
いろいろと考えた末，来週には小テストを**行いません**．ただし，6/15, 6/22, 6/29 のどれかに「中間テスト」を行う予定ですので，注意して下さい．もちろん，テストの少なくとも一週間前には宣言して，知らせます.（これからの進度と相談して日取りを決めるので，もう少し待って下さい.）

―――――――――――先週のレポートの解答―――――――――――

問２ ともかく，図を描くと以下のようになる．



問２ a)



問２ b)

この図を見ながら，慎重に変換する．a) の方がちょっと「引っかけ」で，図に示したように，３つの部分に分けて考えるのが良い（C の部分の右端が y ではなく，2 になってるのが嫌らしい）．ともかく答えは，

$$a) \qquad \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} dx\, f(x,y) + \int_1^2 dy \int_{\sqrt{y}}^{y} dx\, f(x,y) + \int_2^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{2} dx\, f(x,y)$$

となる．b) の方は，図の A, B ２つの領域の和になっているから，それぞれで順序を交換した後で合わせるとよい．まあ，図を見て一発で書き下しても良いけどね．

$$b) \qquad \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} dy\, f(x,y)$$

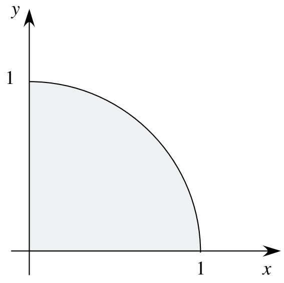
となる．

なお，この問題で，積分領域の図が書けない人がある程度いました．できなかった人は注意して練習して欲しい．

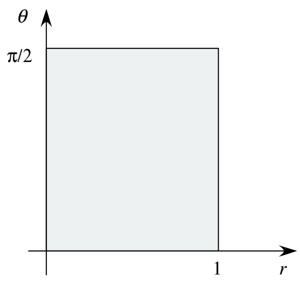
問３ **すみません！問３に出題ミスがありました．** 僕は第一象限にある $\frac{1}{4}$ 円のつもりだったのですが，問題を素直に読めば，こりゃ円の全部になってるわいな... かなりの人は $\frac{1}{4}$ 円でやってましたが，間違いをきちんと指摘した上で出題意図をくみ取ってくれた人（感謝！）や，題意通りにやって答えがゼロになってしまった人（すみません），円全体と思ったために c) の変数変換がうまく行かなくて困った人（いよいよすみません）などもいました．申し訳なし．

一応，僕の意図した答えは以下の通りです．$x \ge 0, y \ge 0$ と $x^2 + y^2 \le 1$ の共通領域は下図 (a) の $\frac{1}{4}$ 円である．また，これを変数変換すると，それぞれ下図の (b), (c) の領域になる．

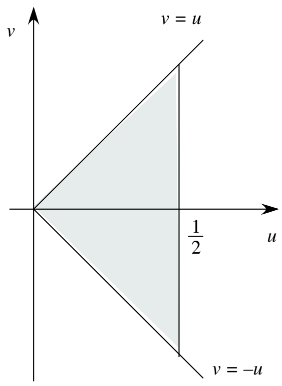
（c の領域について）c の場合の積分領域は以下のようにして求められる：まず変数変換が実数の間の変換として定義できるために，平方根の中身が正であること，つまり $u + v \ge 0, u - v \ge 0$ が必要になる．次に，考えている領域（僕の意図した題意による）は $x \ge 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 1$ であるが，前の２つは変数変換の平方根がちゃんと定義できる限り満たされている．従って，次に，$x^2 + y^2 \le 1$ に変数変換の式を代入して，$2u \le 1$ を得る．これらは必要条件であるが，逆にこれを満たす (u, v) からは題意を満たす (x, y) を作れることは簡単に確かめられるので，これで十分条件でもある．



問 3 a)



問 3 b)



問 3 c)

従って積分の計算は (a) ならば,

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\, xy\sqrt{x^2+y^2} = \int_0^1 dx\, x\left[\frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{3}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3}\int_0^1 dx\, x\left(1-x^3\right) = \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right\} = \frac{1}{10}$$

となるし，(b) ならば，ヤコビアンが r であることを忘れずに

$$\int_0^1 dr \int_0^{\pi/2} d\theta\, r\, r^2 (\cos\theta\,\sin\theta)\, r = \int_0^1 dr\, r^4 \int_0^{\pi/2} d\theta\,\cos\theta\,\sin\theta = \frac{1}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

となる．また (c) ではヤコビアンが $-\dfrac{1}{2\sqrt{u^2-v^2}}$ であり，$x^2+y^2=2u$ であるから,

$$\int_0^{1/2} du \int_{-u}^{u} dv\, \frac{1}{2\sqrt{u^2-v^2}}\,\sqrt{u+v}\sqrt{u-v}\sqrt{2u} = \int_0^{1/2} du \int_{-u}^{u} dv\,\sqrt{\frac{u}{2}} = \int_0^{1/2} du\,\sqrt{2}u^{3/2} = \frac{1}{10}$$

となるわけ.

なお，題意のママにやると，円全体での積分になりますが，このとき，x という奇関数を x-軸について対称な領域で積分しているから，答えはゼロになります．このようにちゃんとやったが為に混乱した人がいたかもしれません．まことに申し訳なし.

——————————以下，レジュメの続き——————————

2 線積分と面積分

前節では，２次元的，３次元的なところでの積分を考えた．これらは１次元での積分の自然な拡張であるが，１次元での積分の拡張はこれだけではない．その重要な例として,「線積分」と「面積分」を考える．後を見てもらうとわかるように,「線積分」は１次元積分の,「面積分」は２重積分の，それぞれ拡張になっているが，それは積分領域が「くにゃくにゃ曲がっている」方向への拡張である．まあ，これではなんのことかわからないと思うので，講義を聴いてくれ.

2.1 曲線とは

わざわざ節を立てるまでもないが,「曲線」の定義を与えておく．我々は直感的に曲線とは何か，知っているつもりだが，どのような変態なものまで許すか考え出すと，それなりに厄介だ．そこで，この講義では以下の定義を採用する.

定義 2.1.1 (曲線) n-次元空間の中の曲線とは，各成分が実数 t の連続関数であるような，n-成分の関数 $\boldsymbol{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_n(t))$ の（軌跡の）ことである．このとき，t を，曲線を表す媒介変数（パラメーター）と呼ぶ．また，この講義では t の範囲を常に区間 $[0,1]$ にとることにする.

この定義でわかるように，t を 0 から 1 まで動かすことで，曲線をなぞっていける．この意味で，曲線には向きが自然に定義される．また，$t=0$ での曲線上の点を曲線の始点，$t=1$ の点を曲線の終点という．

なお本来の意味で曲線という場合には，上の定義で t を動かしたときにできる，n-次元空間内での軌跡を指す．この意味で，軌跡が同じならパラメーターの入れ方が違うものでも同じ曲線とみなす．例：原点と $(1,1)$ を結ぶ線分は，$\boldsymbol{r}(t)=(t,t)$ と書いても良いし，$\boldsymbol{r}(t)=(t^2,t^2)$ でも良いし，$\boldsymbol{r}(t)=(\sqrt{t},\sqrt{t})$ でも良いし... でも，それをいちいち書くと面倒だから，以下では何か一つのパラメーター表示を決めたものとして通す.（興味のある人は，線積分の結果がパラメーター表示を変えても変わらないことを確かめるとよい.）

以下では主に 3 次元空間の中の曲線を考える．その際は $\boldsymbol{r}(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$ の代わりに，$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ と書くこともある．

上で定義した曲線はちょっと一般的すぎるので，以下でよく考えるものを改めて定義しておく．

定義 2.1.2 (滑らかな曲線) n-次元空間の中の曲線 $\boldsymbol{r}(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t),\ldots,x_n(t))$ のうち，滑らかな曲線とは以下の 2 条件を満たすものである：

(1) 各成分 $x_i(t)$ が t の関数として微分可能で導関数が連続，かつ

(2) $\boldsymbol{r}'(t)$ は $0\le t\le 1$ でゼロベクトルにはならない

2.2 線積分の定義

この節では線積分を定義する．記述を簡単にし，かつイメージが湧きやすいように 3 次元での話に限定するが，一般の n-次元への拡張は自明であろう．

線積分とは，以下のような問いを考える際に自然に出てくるものである．

問：空間内に曲線 $\boldsymbol{r}(t)$ が与えられており（$0\le t\le 1$）この曲線に沿って粒子が動いた場合，どのくらいの仕事がなされたかを考えたい．ただし，粒子にかかる力は場所 (x,y,z) ごとに異なり，$\boldsymbol{F}(x,y,z)$ というベクトル形で与えられているとする．簡単のため，曲線の始点は原点 $\boldsymbol{0}=(0,0,0)$，終点は $\boldsymbol{a}=(a,b,c)$ とする．

Step 1. まず簡単のため，考えている曲線は直線で，粒子に働く力は場所に依らない，場合を考える．つまり，粒子は原点から点 (a,b,c) まで直線上を動き，粒子に働く力はこの直線に沿った方向で，大きさが F（一定）だとしよう．

このとき，粒子がなされる仕事の総量は（力の大きさ）×（動いた距離）だから，$F\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ である．この表式は $F>0$（力と運動が同じ向き）の場合も，$F<0$（力と運動が逆向き）の場合も正しい．

Step 2. 粒子は上と同じく原点から点 $\boldsymbol{a}=(a,b,c)$ まで直線上を動くが，粒子に働く力は $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$ というベクトルで必ずしも直線と同じ方向でない（ただし，各成分は一定）場合．

粒子になされる仕事には，力 $\boldsymbol{F}$ の直線に沿った分力が関係する．この分力を表すために，直線の方向ベクトルが $\boldsymbol{n}=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$ で表されることに注意しよう．力 $\boldsymbol{F}$ の直線の方向の分力は，向きは $\boldsymbol{n}$ で，大きさ（符号こみ）は $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ である（$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積）．つまり，問題の分力は $(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$ である．

これで力の大きさがわかったから，Step 1 に従うと，粒子のされた力の総量は

$$(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\times\sqrt{a^2+b^2+c^2}=F_x\,a+F_y\,b+F_zc=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{a} \tag{2.2.1}$$

となる．最右辺の表式が有用である：言葉でまとめると「粒子が直線に沿って，一定の力の下で運動するとき，粒子の受ける仕事の総量は（粒子の変位ベクトル）と（力のベクトル）の内積で与えられる」となる．もちろん，Step 1 の結果は上の特殊な場合である．

（この辺りは,「力学」の講義などでやっているはずだが，一応，復習した．以下では,「粒子が曲線に沿って動く」「力が一定ではない」の 2 方向に一般化することで，線積分を導入する．ただし，この 2 方向はほとんど同じ複雑さを要求するので，両方一辺にやる.）

Step 3. 粒子が折れ線に沿って運動し，粒子に働く力は折れ線ごとに一定の場合.

折れ線は原点 $\boldsymbol{r}_0 = (0,0,0)$ から出発して，n 個の点 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{a} = (a,b,c)$ を順に結ぶものとする．点 $\boldsymbol{r}_{i-1}$ から $\boldsymbol{r}_i$ を結ぶ折れ線を ℓ_i と書き，各 ℓ_i 上では力が一定（$\boldsymbol{F}_i$ と書く）としよう．折れ線 ℓ_i 上で粒子のされた仕事は，Step 2 から $\boldsymbol{F}_i \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1})$ である．従って，原点から (a,b,c) までの仕事の総量は

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.2}$$

となっているはずだ.

Step 4. 粒子が滑らかな曲線 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ に従って運動し（$0 \le t \le 1$），粒子に働く力は粒子のいる場所の関数である場合．つまり，$\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ における力は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z))$ の形のベクトル（各成分が (x,y,z) の関数）で与えられる場合.

これがもっとも一般の場合であるが，Step 3 の自然な拡張として考えられる．滑らかな曲線（曲がっている）のは考えにくいから，今までやってきたことに倣って，まずは曲線を折れ線で近似しよう．すなわち，始点から終点までの曲線上に，順に $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{a}$ の点を取り，曲線を Step 3 のような折れ線で近似することを考える．$\boldsymbol{r}_{i-1}$ から $\boldsymbol{r}_i$ の部分を ℓ_i と書くとき，ℓ_i の長さが十分に小さく，かつ $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{r}$ に滑らかに依存する場合は，各 ℓ_i 上では $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ はほとんど一定のベクトルと思って良いだろう．ここまで近似すると，問題は Step 3 で解いたものになるので，

$$\text{（この近似での仕事量）} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.3}$$

となるはずである.

そして，本当の答え（滑らかな曲線に沿っての仕事）は，上の近似値の極限，つまり

$$\lim_{\text{分割を細かく}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.4}$$

で与えられる，と考えるのが自然である.（ここで「分割を細かく」というのは，上での n を無限大にして，すべての i について $\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}$ の長さをゼロにする極限を指す.）

以上を動機付けとして，以下のように「線積分」を定義する.

- 空間内の曲線 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, ($0 \le t \le 1$) が与えられている．この曲線を C とよぶことにしよう.
- 空間の各点で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ も与えられている.（空間全体で定義されていなくても，曲線上の各点で定義されていれば十分.）
- 曲線 C 上に，その順に沿って 始点$=\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n=$終点 の点をとる．これを曲線 C の<u>分割</u>と呼び，Δ で表す.
- $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$\boldsymbol{r}_{i-1}$ と $\boldsymbol{r}_i$ の間（両端も含む）に勝手に点 ζ_i をとる．ζ_1 から ζ_n をまとめて $\vec{\zeta}$ と書く.
- 分割 Δ とその間の点のあつまり $\vec{\zeta}$ に対して，線積分の<u>リーマン和</u>を

  $$S(\Delta, \vec{\zeta}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\zeta_i) \cdot (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-1}) \tag{2.2.5}$$

  として定義する.
- 分割を細かくした極限（つまり，$|\Delta| = \max_i |\boldsymbol{r}_{i-1} - \boldsymbol{r}_i|$ がゼロに行く極限）を考える．どのような分割の取り方，および，どのような $\vec{\zeta}$ の選び方に対しても上のリーマン和の極限が同じ値に収束するとき,「曲線 C に沿った $\boldsymbol{F}$ の線積分」が存在するといい，その極限値をこの線積分の値と定義する．記号では

  $$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \lim_{|\Delta| \to 0} S(\Delta, \vec{\zeta}) \tag{2.2.6}$$

１次元のリーマン積分，また２重積分や３重積分の定義を思い出してもらうと，上の定義はこれらの自然な拡張（または親類）になっていることが納得できるだろう.

理解を深めるための問題： 曲線 C を，原点と $(1,1,1)$ をつなぐ放物線（$y=z=x^2$），ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\begin{bmatrix} z \\ y \\ x \end{bmatrix} \tag{2.2.7}$$

とするとき，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ を，上の定義に従って求めよ．

ここで問題になるのは，どのような曲線，どのようなベクトル場なら線積分が定義できるのか，ということである．曲線に沿っての積分だから，まず曲線の長さが定義できることがほとんど必要であることは納得できるだろう．その上で，$\boldsymbol{F}$ 自身もそれなりに性質の良いことが求められよう．そのような十分条件の一つとして，以下が挙げられる．

定理 2.2.1 (線積分が定義できる十分条件) 線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ が定義できる十分条件の一つは，以下の２つが成り立つことである．

- 曲線 C が「滑らかな曲線」（定義 2.1.2 参照）であり，
- ベクトル場 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ は，その引数 x,y,z に関する連続関数である．

（余談）上の定理では曲線が滑らかなことを仮定したが，これはあくまで十分条件である．多分，曲線の各成分 $x_i(t)$ が「有界変動関数」であり，$\boldsymbol{F}$ が連続関数ならば積分可能と思うが，ちょっと確認する時間がなかった．

2.3 線積分の計算法

上での線積分の定義は，どうにも計算しにくい．しかし，２重積分などがそうであったように，もっと簡単な計算法が導かれる．

定理 2.3.1 (線積分の計算法) 定理 2.2.1 の条件の下では，線積分の値は，以下のように t の積分で計算できる：

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot \boldsymbol{r}'(t)\,dt \tag{2.3.1}$$

ここで，$'$ は t による微分を表し，$\boldsymbol{r}'(t)$ とは，$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ の各成分を t で微分して得られるベクトル $(x'(t),y'(t),z'(t))$ のことである．

すなわち，線積分は曲線の接ベクトル $\boldsymbol{r}'(t)$ と $\boldsymbol{F}(t)$ の内積を積分すれば求められるのだ．

練習問題：前節の「理解を深める問題」を，上の定理を使ってやり直してみよ．

（少し脇道）曲線の長さの表式と線積分

もしかしたら高校か大学一年で，曲線の長さについて習ったかもしれない．これは大ざっぱには，

$$\int_0^1 \|\boldsymbol{r}'(t)\|\,dt \tag{2.3.2}$$

で与えられるものである．（ここで，ベクトル $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ に対し，その長さを $\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ で定義した．）これは，今まで定義してきた線積分において

$$\boldsymbol{F}\bigl(\boldsymbol{r}(t)\bigr)=\frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|} \tag{2.3.3}$$

としたものに等しい．なぜこれでよいのか，考えてみよう．（ヒント：上のベクトルは，長さが１の，曲線の接ベクトルになっている．）

なお，本によっては「弧長（曲線の長さ）による線積分」と称して，スカラーの関数 $f(x,y,z)$ に対する積分

$$\int_0^1 f(x,y,z)\|\boldsymbol{r}'(t)\|\,dt \tag{2.3.4}$$

が挙げられていることもある．しかし，この積分は，我々の線積分の定義において

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|}\,f(\boldsymbol{r}(t)) \tag{2.3.5}$$

ととったものに等しい．つまり我々の定義の特殊な場合に過ぎないので，この講義では (2.3.4) の定義はあからさまには採用しなかった（これがなぜ「弧長に関する線積分」と呼ばれるか，考えてみよう）．なお，これに類似した幾種類かの「線積分」があるのだが，それらについては時間が許せば後で触れる．

定理の証明（説明）

完全な証明はやらないが，感じをつかむだけなら以下のように考えれば割合に簡単である．

今，線積分が定義できる場合を考えているので，線積分の定義に出てくる分割 Δ や点 $\vec{\zeta}$ を都合の良いようにとって，計算すればよい．そこで，パラメーターの区間 $[0,1]$ を n-個に区切って，$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ としてやろう．また，区間 $[t_{i-1}, t_i]$ 内に点 s_i をとる．この t_i に対応して，$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}(t_i)$ と，$\zeta_i = \boldsymbol{r}(s_i)$ を定義すると，線積分の定義に出てきたリーマン和は,

$$S(\Delta,\vec{\zeta}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s_i)) \cdot \bigl(\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1})\bigr) \tag{2.3.6}$$

の形になる[1].

さてここで，t_{i-1} と t_i の差が非常に小さいものとしよう．すると,

$$\boldsymbol{r}(t_i) - \boldsymbol{r}(t_{i-1}) \approx \boldsymbol{r}'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \tag{2.3.7}$$

が成り立つだろう[2]．これを (2.3.6) へ代入して,

$$S(\Delta,\vec{\zeta}) \approx \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s_i)) \cdot \boldsymbol{r}'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \tag{2.3.8}$$

となる．$\boldsymbol{r}'(t)$ は連続関数であること（定理の仮定），および t_{i-1} と s_i が非常に近いことを用いると，上の $\boldsymbol{r}'(t_{i-1})$ を $\boldsymbol{r}'(s_i)$ で置き換えても良いだろう．結果として,

$$S(\Delta,\vec{\zeta}) \approx \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(s_i)) \cdot \boldsymbol{r}'(s_i)(t_i - t_{i-1}) \tag{2.3.9}$$

を得る．ところが，この表式は積分 $\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\,dt$ のリーマン和による近似に他ならない．従って，線積分が存在するとの仮定の下では，分割を細かくしていった極限で，(2.3.9) は $\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\,dt$ に収束するはずなのである.（興味のある人は，上で $\approx$ と誤魔化したところを埋めてみよう.） □

[1]実のところ，曲線をパラメーター表示したから，(2.2.5) のリーマン和は，適当な t_i, s_i を用いて，必ず (2.3.6) の形に書ける．この意味で，ここまでは前節の書き直しに過ぎない．前節でそのようにパラメーター t を用いて書かなかったのは，そのようにすると $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t_i))$ などと引数が増えて式がややこしくなり，見にくくなると考えたからである

[2]興味のある人への注：ここを厳密に評価するには，平均値の定理を用いる

６月１日：今日は「線積分」の続きと,「面積分（の導入)」です.
なお，書店でいくつかの本を見てきました．重積分については，以下の本の対応するところが理解できておれば，この講義には十分でしょう．

- 「解析入門 I, II」小平邦彦（岩波）
- 「解析入門 I, II」杉浦光夫（東大出版会）
- 「微分積分教科書」斉藤正彦（東京図書）
- 「微分積分演習」岡安，高橋，吉野，武元（裳華房）
- 「詳解　微積分演習 II」福田，鈴木，安岡，黒崎（共立）
- 「解析演習」杉浦，金子，清水，岡本（東大出版会）

多分，十分すぎると思うが，個人の判断に任せます.

第３回レポート問題：線積分の問題です.（いつも通り，足りなければ自分で補って.）

問 4： 以下の線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ を計算しよう.

a) 曲線 C は原点中心，半径 2 の xy-平面内の円で，向きは反時計回り．ベクトルは $\boldsymbol{F}(x,y)=(x,y)$.

b) 曲線 C は a) と同じ．ベクトルは $\boldsymbol{F}(x,y)=(-y,x)$.

c) 曲線 C は３次元空間内の原点と $(1,1,1)$ を結ぶ線分．ベクトルは $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(y,x,z)$.

d) 曲線 C は３次元空間内の原点と $(1,1,1)$ を結ぶ，$z=y^3=x^3$ $(0\le x\le 1)$．ベクトルは c) と同じ.

e) 曲線 C は３次元空間内の原点と $(1,1,1)$ を以下のように結ぶ折れ線：まず原点から x-軸に沿って $(1,0,0)$ へ．次に y-軸に平行に $(1,1,0)$ へ．最後に z-軸に平行に，$(1,1,1)$ へ．ベクトルの方は上の c) と同じ.

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります.

レポート提出について：

上の問に解答し,

６月７日（月）午後５時までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱（またはそれに類するもの）に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ)．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ.

——————————以下，レジュメの続き ——————————

一般的な注意：この辺りで，何がベクトルで何がスカラーかをきっちり区別することが不可欠になる．ベクトルとベクトルの内積はスカラーになったりするからヤヤコシイが，混乱しないように注意すること．この講義ではベクトル量は太字，スカラー量は普通の字体，とできるだけ区別していく．例外は η_i で，これは本当はベクトルの太字で書くべきなのだが，フォントの関係で書けていない.

（先週の補足：「曲線の長さによる線積分」について）

面積分との関わりで，もう少しやっておいた方が良いように思えてきたので，補足します.

先週，主に扱った線積分は

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,dt$$

というもので,（物理的応用の「仕事量」で言ったように）曲線の向きにどれくらい $\boldsymbol{F}$ が向いているか，を表す量である．しかし，このようなベクトル量以前に，スカラー量を線積分したくなる場合もある．例えば,

曲線 C の形をした細い針金があり，その線密度は ρ で与えられている（針金の場所ごとに変わる）．針金全体の重さはいくらか？

曲線 C に沿って粒子が運動するとき，大きさが場所による摩擦力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を受ける．粒子のされた仕事はいくらか？

１番目の問題では針金の密度を針金に沿って積分していったものが答えのはず．つまり

$$\int_0^1 \rho(\boldsymbol{r}(t))\big|\,|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt$$

が答え．また２番目の問題では，粒子の運動する向きと正反対の方向に力がかかっているわけだ．従って，この場合は力の大きさ $|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})|$ を，曲線の長さで積分したもの（の符号を変えたもの）が答えになるだろう．つまり，

$$-\int_0^1 \big|\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\,\big|\,|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt$$

が答えのはずである．このように，一成分（スカラー）の関数 $f(\boldsymbol{r})$ を曲線の長さで積分したものも「線積分」と呼び，

$$\int_C f(\boldsymbol{r})\,ds \qquad \text{または} \qquad \int_C f(\boldsymbol{r})\,|d\boldsymbol{r}| \qquad \text{または} \qquad \int_0^1 f(\boldsymbol{r}(t))\,|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt$$

などと書く（最後のは記号と言うよりは計算方法だけど）．この書き方を使って先週までの線積分をむりやり書くと，

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot \boldsymbol{r}'(t)\,dt = \int_0^1 \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}\,|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt = \int_C (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})ds$$

となる．ここで曲線の接ベクトル（長さ 1）を

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$$

として導入した．このように「線積分」には２通りのものがあるから区別が必要である．教科書（スウの本）との対応をつけておくと，$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ はスウの p.112, (4.3) である．一方，$\int_C f(\boldsymbol{r})\,ds$ の方はスウには載っていない．

なお，今日になってこの２番目の線積分を強調することにしたのは，$\displaystyle\int_C (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t})ds$ などの書き方が，

$\boldsymbol{F}$ の接線方法の成分 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}$ を曲線の長さ ds で積分

との意味づけがはっきりするかもしれないと考えたからである.（これから見るように，面積分でも２通りの定義がある.）

2.4　面積分の定義

線積分と同じく，面積分の定義にも大きく分けて２つある．曲線は曲面よりも厄介だし，図を描くのも大変だから，少し大まかな話になってしまうが，ご了承されたい．

以下の２通りの問題を考える．

問１．曲面 S があり，その面密度は（場所ごとに違うが）$\rho(\boldsymbol{r})$ と与えられている．この曲面全体の質量を求めよ.（この答えは「曲面積による積分」で与えられる.）

問２．曲面 S があり，その表面を時間的には一定の速さで流体が貫いて流れている．貫いて流れる流体の速度は（場所ごとに違うが）$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ で与えられている．単位時間にこの曲面全体を貫いて流れる流体のの重さを求めよ．流体の密度はいつでもどこでも１だとする.（この答えは単に「面積分」と呼ばれるもので与えられる.）

見てのとおり，問１が前節の最後に補足した「弧長についての線積分」に相当し，問２が「力による仕事」に相当する．この２つは密接に結びついているが，今回は問１から始めるのがわかりやすいだろう．

問１に答えるのは,（少なくとも概念的には）簡単だ．全体の重さを出すには,（密度）かける（面積）をやればよいが，今の場合，密度が曲面の場所ごとに変わっているのがちと厄介．でも曲面を細かく区切ってやると，それぞれの細かい部分の重さは

（細かい部分の密度）×（細かい部分の面積）

で与えられるわけだから，これを全部足し挙げればよい．これは「曲面の密度を，その面積で積分した」と言ってもよいだろう．従って，面積分の第一の定義に導かれる：

$$\int_S f(\boldsymbol{r})\,d\sigma(\boldsymbol{r}) = \lim_{\text{分割を細かく}} \sum (\text{細かい部分の面積}) \times (\text{そこでの } f \text{ の値}) \tag{2.4.1}$$

この左辺は基本的には右辺で定義される，単なる記号である．ただし，記号にも少しは意味があって，$d\sigma(\boldsymbol{r})$ というのは「$\boldsymbol{r}$ における細かい部分の面積」を表しているつもりだ．

後のことを考えてもう少し具体的に書いておくと以下のようになる．

- ともかく，曲面を細かく分ける（２重積分の時にやったようなつもりで）．分けたもの（分け方）を Δ と書く．また，曲面が分けられた細かい破片の一つ一つを $S_1, S_2, S_3, \ldots$ と書く．
- 細かい破片 S_i の上の一点 η_i を適当にとる．
- 細かい破片 S_i そのものはまだ曲がっているかもしれず，その面積は定義しにくい．そこで，S_i の，η_i における<u>接平面</u>を考える．そして，S_i をこの接平面に射影した部分の面積を $\tau_i(\eta_i)$ と書く．
- リーマン和に相当するものとして，
$$S(\Delta, \vec{\eta}) = \sum_i f(\eta_i)\,\tau_i(\eta_i) \tag{2.4.2}$$
を考える．
- 求める「曲面積による積分」は，分割 Δ を細かくした先の
$$\int_S f(\boldsymbol{r}) d\sigma(\boldsymbol{r}) = \lim_{|\Delta|\to 0} S(\Delta; \vec{\eta}) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i f(\eta_i)\,\tau_i(\eta_i) \tag{2.4.3}$$
として定義する — もちろん，この極限が $\vec{\eta}$ の取り方によらずに存在する場合に限って定義する．極限が存在しない場合，積分は定義できないと考える．

なお，上では暗黙のうちに「曲面 S に対する接平面がどこででも作れる」ことを仮定している．これが成り立たないような曲面では曲面積すら定義できないこともあるので，これは妥当な仮定だろう．

曲面の向きに関する注意

これから第２の問題を考えるが，それには「曲面の向き」を決めてかかる必要がある．つまり，曲面に「裏」と「表」を決め，流体が曲面を「裏から表」の向きに貫いているなら流量はプラス,「表から裏」に貫いているなら流量はマイナス，とする．曲面のどっちを表，どっちを裏にするかは全く勝手であるが，ともかくどっちが表でどっちが裏かを決めたら，後はその定義を変えないことが大事である．以下では表と裏は既に決めたものとして話を進める．

- 数学の本では「表」「裏」とはあまり言わず,「裏から表の向き」のことを単に「曲面の外向き」と呼ぶことが多いので，以下でもそれに従う．
- 曲面によっては，表と裏が分離できないものもある（メビウスの帯など）．表と裏が分離できる曲面を「向き付け可能」な曲面といい，以下では向き付け可能なものだけを考える．

第２の問題の答えを先に言うと，それは以下のような「面積分」で与えられる．

$$\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \equiv \int_S \bigl(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\bigr)\, d\sigma(\boldsymbol{r}) \tag{2.4.4}$$

ここで左辺は新しく導入した記号で，右辺がその定義を与えている．ここで $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ とは，曲面上の点 $\boldsymbol{r}$ における曲面の外向き法線ベクトル（長さ 1）であり，右辺は $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{n}$ の内積（つまり，$\boldsymbol{F}$ の曲面の法線方向の成分）を曲面の面積で積分すべし，と言っているのだ．左辺の記号について言うと，$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} d\sigma$ とは $d\sigma$ の親戚でやはり微少面積を表すが，今はそれが外向き法線ベクトルの向きを向いている．($d\boldsymbol{S}$ を曲面の微分要素，または簡単に「面素ベクトル」という.)

この２つ目の定義の意味を理解するには，問２に戻って曲面の小さな部分に分けて考えていくのが良いだろう．

Step 1. 考えている曲面が平面の一部で，かつ流体の速度は場所によらず一定で，面に垂直な場合.

このときは考えている曲面を通過する液体の分量は，単に（曲面の面積）と（液体の速度）をかけたものになる．考えている曲面の面積を S，流体の速度の大きさを u とすると，答えは Su.

Step 2. 考えている曲面は平面の一部で，流体の速度 $\boldsymbol{u}$ は場所によらず一定の場合.

考えている曲面を通過するのに有効な速度は，液体の速度 $\boldsymbol{u}$ のうちの曲面に垂直な成分である．これは曲面の外向き法線ベクトル（長さ 1）を $\boldsymbol{n}$ と書くと，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}$ で与えられる．従って，Step 1 から答えは $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\,S$. (ただし，これは流体が曲面の裏から表へ抜けている場合である．向きが逆なら符号も逆になる.)

Step 3. 考えている曲面が小さな三角形の集まりで，流体の速度 $\boldsymbol{u}$ は場所によるが，小さな三角形の内部では一定の場合.

小さな三角形を S_i，その面積も S_i と書くことにしよう．S_i の外向き法線ベクトル（長さ 1）を $\boldsymbol{n}_i$ と書くと，S_i を通り抜ける流体の量は（Step 2 から）$(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{n}_i) S_i$ である（ここで $\boldsymbol{u}_i$ は S_i での流体の速度ベクトル）．よって，全体の流体の量は

$$\sum_i (\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{n}_i)\, S_i \tag{2.4.5}$$

である．数式の通りであるが，それぞれの三角形における速度ベクトルの法線方向成分（$\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{n}_i$）と，その三角形の面積 S_i をかけて和をとった形である．

Step 4. 一般の場合.

やるべき事はもう明らかだろう．くにゃくにゃ曲がっている曲面は扱いにくいので，こいつをまず，細かく分け，分け方を「分割」Δ とする．分けたそれぞれを S_i と書き，Step 3 へ持ち込みたい．しかし，細かく分けられた一つ一つは小さいとはいえ，曲がっているかもしれないので，平面で近似しなければ面積が決められない．そこで S_i 内の一点 η_i をとり，η_i での S_i への接平面を考える．そして S_i をこの接平面に射影した部分の面積を $\tau_i(\eta_i)$ とする．(分割が細かくなれば S_i とその接平面はほとんど重なり，$\tau_i(\eta_i)$ は S_i の面積に近いだろう，と期待する.)

τ_i の部分を通過する流体の量は，ここでの外向き法線ベクトル（長さ 1）$\boldsymbol{n}_i$ とここでの流体の速度ベクトル（$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{u}(\eta_i)$）を用いて $(\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{n}_i)\tau_i(\eta_i)$ と書けるはずだ．従って，曲面全体を貫く流量の近似値として，リーマン和

$$S(\Delta, \vec{\eta}) = \sum_i (\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{n}_i)\tau_i(\eta_i) = \sum_i \bigl(\boldsymbol{u}(\eta_i) \cdot \boldsymbol{n}(\eta_i)\bigr)\tau_i(\eta_i) \tag{2.4.6}$$

が得られる．後は分割を細かくした極限を考え，これが $\vec{\eta}$ の取り方にかかわらず同一の極限を持つなら，その極限を面積分の値と定義する：

$$\int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i \bigl(\boldsymbol{u}(\eta_i) \cdot \boldsymbol{n}(\eta_i)\bigr)\, \tau_i(\eta_i) \tag{2.4.7}$$

以上が面積分の定義だが，右辺のリーマン和の形をよく見ると，これは $f(\boldsymbol{r}) \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})$ としたときの「曲面積による面積分」(2.4.3) と同じである．従って，上で定義した面積分は,「曲面積による面積分」を用いて,

$$\int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{r})\, d\sigma \tag{2.4.8}$$

とも書けるはずであって，これが (2.4.4) の意味である．

2.5 面積分の計算法

面積分を一応，定義したのだが，実際の計算にはもう少しの考察が必要だ．特に,「微少な面積 $d\sigma$ をどう表すか」「曲面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ をどう書くか」が問題である．この２つを考えていこう．

まず，考えている曲面は $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ のように，パラメーター (u,v) の関数として表現されているものとする.（これは曲線が $\boldsymbol{r}(u)$ と，１パラメーターの関数で表されたのと同じ.）この表現には当然，$z = f(x,y)$ と言うものも含まれることに注意（$x = u, y = v, z = f(u,v)$ というパラメーター表示とみなせるから）．なお，曲面 S を表すためには，パラメーター (u,v) は領域 U をくまなく動くものとしておく．

我々は「曲面積に関する積分」$\displaystyle\int_S f(\boldsymbol{r})d\sigma(\boldsymbol{r})$ を，領域 U に関するなんらかの uv-積分として表したい．どうすべきだろうか？

ええ加減に考えて，

$$\int_U f(\boldsymbol{r}(u,v))\,dudv \qquad \text{（間違い！）} \tag{2.5.1}$$

のようなものが出てくるのではないかと思われる —— $\boldsymbol{r}$ は曲面 S をくまなく動くのだから，(u,v) でみればこれは U を動くし，f の引数 $\boldsymbol{r}$ は当然，$\boldsymbol{r}(u,v)$ と表すべきだ．問題は $d\sigma$ の部分なのだが，これは単純な $dudv$ にならない．

その理由は２重積分の変数変換を思い出すとわかりやすい．そこでは $\iint_A f(x,y)dxdy$ を新しい変数 (u,v) の積分で書き直すことを考えた．答えは $\iint g(u,v)dudv$ ではなくて，ヤコビアン $J(u,v)$ が入って $\iint g(u,v)|J(u,v)|dudv$ となった．ヤコビアンの出た理由は，$dxdy$ の表す面積と $dudv$ の表す面積の比を補正するためだった.（(u,v)-平面を区切って作った細かい部分 $dudv$ が，xy-平面ではどのような部分に対応しているのか，かつその面積比はどうか，などの議論をしたことを思い出そう.）

今も同じ事である．uv-平面を細かく区切って小さな長方形を作った場合，それが曲面上ではどのような図形に対応しているか（かつその面積は？）を考えよう．

uv-平面上での小さな長方形の左下を (u,v)，右上を $(u_2,v_2) = (u+\varDelta u, v+\varDelta v)$ とする（もちろん，$\varDelta u, \varDelta v$ は非常に小さい）．これが曲面上では，長方形を少し変形したもの（平行四辺形に近い）に移るはずで，その頂点の座標は，(u,v) に対応するものが $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$，(u_2,v_2) に対応するものが $(x(u_2,v_2), y(u_2,v_2), z(u_2,v_2))$ である．これを近似的に平行四辺形とみなすと，その２辺を張るベクトルは

$$(x(u_2,v), y(u_2,v), z(u_2,v)) - (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \approx \Bigl(\frac{\partial x}{\partial u}\varDelta u, \frac{\partial y}{\partial u}\varDelta u, \frac{\partial z}{\partial u}\varDelta u\Bigr) = \Bigl(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\Bigr)\varDelta u \tag{2.5.2}$$

と

$$(x(u,v_2), y(u,v_2), z(u,v_2)) - (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \approx \Bigl(\frac{\partial x}{\partial v}\varDelta v, \frac{\partial y}{\partial v}\varDelta v, \frac{\partial z}{\partial v}\varDelta v\Bigr) = \Bigl(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\Bigr)\varDelta v \tag{2.5.3}$$

よって，この小さな近似的平行四辺形の面積は，これら２つのベクトルの外積で与えられる．記号が大変なので，$\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ に対して，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \equiv \Bigl(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\Bigr), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \equiv \Bigl(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\Bigr) \tag{2.5.4}$$

を定義すると，問題の近似的平行四辺形を張るベクトルは

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\varDelta u \qquad \text{と} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\varDelta v \tag{2.5.5}$$

であり，その面積は

$$\Bigl|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\varDelta u\varDelta v\Bigr| = \Bigl|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Bigr|\varDelta u\varDelta v \tag{2.5.6}$$

で与えられる．これが $d\sigma$ に相当するものだから，$dudv$ と $d\sigma$ との比は $\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|$ であることがわかった．

従って，このファクターを補正してやると,「曲面積による積分」は

$$\int_S f(\boldsymbol{r})d\sigma(\boldsymbol{r}) = \int_U f\bigl(\boldsymbol{r}(u,v)\bigr)\Bigl|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Bigr|dudv \tag{2.5.7}$$

である，ことがわかる．ともかく，この公式を使えば積分は計算できそうだね．

次に，通常の面積分 (2.4.4) を考えよう．これは右辺から見ていくのが良い．$d\sigma$ については既に解明したから，$\boldsymbol{n}$ は何か，を考える．この法線ベクトルは平行四辺形の 2 つのベクトル (2.5.5) に垂直なものであるから，その成分は

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \tag{2.5.8}$$

に比例しているはずである．長さを 1 にするにはこいつの長さで割ればよい，よって，

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{r}) = \pm \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|} \tag{2.5.9}$$

となるはず．ここで ± となっているのは，求めた外積が我々の決めた「外向き」になっているかどうかを調整するためのものである．(パラメーター (u, v) の入れ方によって，この外積の向きはどうにでもなるから，ここは注意すべし.）

結局，求める面積分は

$$\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \pm \int_U \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|} \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv = \pm \int_U \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) dudv \tag{2.5.10}$$

と書けることがわかった.（$\boldsymbol{n}$ を規格化した分母がちょうどキャンセルしたことに注意.）ここでも ± は，$\boldsymbol{n}$ が正しく外向きになるように調節するためのものであり，最右辺の非積分関数は $\boldsymbol{F}$ と $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ の内積である..

ベクトルの外積についての補足（詳しくはスウの本の pp.15–18 を参照）

もう知っていることとは思うが，簡単に述べておく，3 次元空間内のベクトル $\boldsymbol{a} \equiv (a_1 a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b} \equiv (b_1, b_2, b_3)$ に対して，その外積と呼ばれるベクトル（$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と書く）を

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \tag{2.5.11}$$

として定義する．このベクトルの長さは $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin\theta$ であり（θ は 2 つのベクトルのなす角度），向きは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方に垂直な向きである．

また，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が与えられると，この 2 つのベクトルを 2 辺とするような平行四辺形が定まる．その面積は $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ になる．

練習問題を載せる余裕がないので，教科書を使おう．

線積分の練習問題としては，スウの本の pp.115–118, 問題 4.5, 4.6, 4.7, などが例題になる．

面積分の問題としては，スウの本の pp. 123–129, 問題 4.13, 4.14, 4.16, 4.19 などが例題である.（問題 4.13 や 4.19 は少し高度な解き方をしているが，かまわずに地道にやればできる.）

６月８日：今日は「面積分」です．
なお，６月２２日のこの講義時間，この場所で「中間テスト（または小テスト）」を行います．範囲は「重積分，線積分，面積分」（の定義と計算法）です．今までの宣言通り，大半はレポート問題と類似の，単なる計算問題になるでしょう．試験時間を 90 分にするか，もっと短くするかはまだ決定していません．問題量によっては早めに切り上げて，講義の続きをやる可能性もあります．
なお，６月１５日の講義は「ベクトル解析の初歩（gradient, divergence など）」の講義に入りますが，この部分は「中間テスト」の範囲には入りません．(なぜ６月１５日にテストをしないのかというと,「面積分」のレポートを返却するのが６月１５日で，その結果をもとに皆さんが試験勉強できるように，との配慮.)

第４回レポート問題：面積分の問題です.（いつも通り，足りなければ自分で補って.）

問５： 以下の面積分 $\int_{S_i} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$ を計算しよう．曲面の定義をまとめて書いておく．曲面の裏表に関しては，xy-平面を下から上に抜ける向きが「裏から表」だとする.（法線ベクトルはこの「向き」にとる.）

- 曲面 S_1 とは，$x^2+y^2 \le 9$ かつ $z=0$ を満たすところである．
- 曲面 S_2 とは，$x^2+y^2+z^2=9$ かつ $z \ge 0$ を満たすところである．
- 曲面 S_3 とは，以下の２つの部分を合わせたものである．一つは「$x^2+y^2 \le 9$ かつ $z=2$」，もう一つは「$x^2+y^2=9$ かつ $0 \le z \le 2$」．

a) ベクトル $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(0,0,z)$ と曲面 S_1, S_2, S_3 に対して，面積分 $\int_{S_i} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$ を計算せよ．

b) ベクトル $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ と曲面 S_2, S_3 に対して，面積分 $\int_{S_i} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$ を計算せよ．

たくさんあって大変と思うかもしれないが，このうちのいくつかは，面積分の定義をよく考えると，あまり計算せずとも答えが出るようになっている.（ただし，計算練習としては地道にやった方がよいかも.）

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

上の問に解答し，

> 6 月 14 日（月）午後 5 時 59 分までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱（またはそれに類するもの）に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

———————————先週のレポートの解答———————————

問４．どんどん，やっていこう．a), b) に関しては，まず，問題の円をパラメーターを使って表すところから始める．向きを考えに入れると，$\boldsymbol{r}=(2\cos t, 2\sin t)$ で，t が 0 から 2π まで変わるものである．よって，$\boldsymbol{r}'(t)=(-2\sin t, 2\cos t)$ である．

a) $\boldsymbol{F}=(x,y)=(2\cos t, 2\sin t)$ であるから，$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}'=0$．従って，線積分の値も 0.（これは考えるとアタリマエの結果であって，力が円の動径方向，円の接線は動径に垂直なんだから，力から仕事を受けることはない.）

b) $\boldsymbol{F}=(-y,x)=(-2\sin t, 2\cos t)$ なので，$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}'=4\sin^2 t+4\cos^2 t=4$．従って線積分は

$$\int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}'\,dt = \int_0^{2\pi} 4dt = 8\pi.$$

以上は $0 \le t \le 2\pi$ となるようにパラメーターをとったが，$0 \le t \le 1$ となるようにとっても良い．その場合は $x=2\cos(2\pi t), y=2\sin(2\pi t)$ となるだろう．なお，半径の 2 がなぜか $\sqrt{2}$ になっている人や，円を逆方向に回ってしまった人などもいた．注意して欲しい．

c) 問題の線分は (t,t,t) （$0 \le t \le 1$）と書ける．従って，$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}' = (t,t,t)\cdot(1,1,1) = 3t$．よって，

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 3t\,dt = \frac{3}{2}$$

d) 問題の曲線は (t,t,t^3) である（ここのところ，(t^3,t^3,t) と間違った人が多かったので，注意！）．従って，$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}' = (t,t,t^3)\cdot(1,1,3t^2) = 2t+3t^5$．よって，

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (2t+3t^5)\,dt = \frac{3}{2}$$

e) 問題の曲線は３つの線分の和である．それぞれを $0 \le t \le 1$ で表すと，初めの部分は $(t,0,0)$，次は $(1,t,0)$，最後は $(1,1,t)$ である．それぞれに対して $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}'$ を計算して進むと，線積分は

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 (0,t,0)\cdot(1,0,0)\,dt + \int_0^1 (t,1,0)\cdot(0,1,0)\,dt + \int_0^1 (1,1,t)\cdot(0,0,1)\,dt = 0+1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

となる．もちろん，これは３つの折れ線をまとめて $0 \le t \le \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \le t \le 1$ で表してもよい．

> 上ではたまたま，c), d), e) の線積分の答えが同じになったが，これはベクトル $\boldsymbol{F}$ が特殊な形をしていたからである（後でやるけど，$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$）．一般には線積分の値は曲線 C に依存するので，誤解のないように．

————————————以下，レジュメの続き————————————

折角，面積分の定義をやったので，非常に重要な応用例について，考えておく．すなわち，半径 r の球面を考え，その動径方向を「裏から表の向き」とした場合，面積分が極座標でどのように表されるか，考えてみよう．２通りの方法でやっておく．

（方法１）前回のプリントのように，律儀に計算する方法.

球面を極座標で表すと，$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$ である．曲面を表すパラメーターは θ,ϕ だから，前回のプリントにあるように計算していくと，

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta} = r(\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta), \qquad \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi} = r(-\sin\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\phi, 0) \tag{2.5.12}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi} = r^2\,\sin\theta\,(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \tag{2.5.13}$$

となる．実は上をよく見ると，

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\phi} = r^2\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} \tag{2.5.14}$$

となっていることもわかる．ここで $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/\|\boldsymbol{r}\|$ は $\boldsymbol{r}$ の向きを向いた単位ベクトルで，曲面の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ に相当する．したがって,「曲面積による積分」は

$$\int_U f(\boldsymbol{r})\,r^2\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi \tag{2.5.15}$$

と書けることがわかった．面積要素の大きさは $r^2\,\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$ である．

また，通常の面積分は,

$$\int_U \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\,r^2\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi \tag{2.5.16}$$

と書けることもわかる．

（方法２）

実質的には上と同じだが，もうちょっと直感的に誤魔化す方法．要するに，$\varDelta\theta\times\varDelta\phi$ に相当する球面上の面積が何か，を求めるのである．これは球面の図を書いて考えると良い（講義で説明）．球面の法線ベクトルが動径の方向であるのは明らかだから，この面積の変換さえ考えれば良いわけだ.

６月１５日：今日は「面積分」の復習をしてから，ベクトル解析に入ります．
なお，６月２２日のこの講義時間，この場所で「中間テスト（または小テスト）」を行います．範囲は「重積分，線積分，面積分」（の定義と計算法）で,「ベクトル解析」は範囲外です．今までの宣言通り，大半はレポート問題と類似の，単なる計算問題になるでしょう．試験時間を 90 分にするか，もっと短くするかはまだ決定していません（まだ問題を作ってないから）．問題量によっては早めに切り上げて，講義の続きをやる可能性もあります．
プリントのミス訂正：先週のプリント，p.32 の (2.5.15), (2.5.16) 式では dr の積分は必要ありません．単純なミスプリでしたが，申し訳なし．

（どうでも良い独り言）先週の講義で「今回はたまたま線積分の値が経路によらなかったが，一般には，よる」と強調した際,「こちらの出題も悪かった」と言ったけれども，これは言い過ぎだったかもしれない．うるさいことを言えば，２つや３つの例で経路に寄らなかったからと言って，これが一般に成り立つと思うのは安易すぎる（一般にはどうか，を考えようとする態度は良いけども）わけで，べつに僕が謝る必要はなかったかも．どうも最近の大学は「学生のため」を強調するあまり，変に「わかりやすい」教材を供給することに熱心で，その副作用として学生さんが「自分でやって失敗して学ぶ」機会を奪っているように感じる．これは将来，ボディブローのように効いてくるだろう．でも自分でもそのような思考形態に陥っていたようだ，とちょっと反省．

―――――――――――――――先週のレポートの解答―――――――――――――――

問５． 何がベクトルでどこが内積か，混乱している人が何人かいたようなので，以下ではベクトルを縦ベクトルの形に書いてみた．横ベクトルで書いたのと，もちろん同じ事です．内積は今まで通り，$\cdot$ で書く．

まず，問題の曲面を式で表すところからはじめよう．

S_1 は xy-平面上の半径 3 の円である．だから，例えば，$x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, z = 0$ $(0 \le r \le 3,\ 0 \le \phi \le 2\pi)$ と表すことができる．従って，この場合,

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

たまたま，このベクトルは上向き（z-軸向き）なので，正しい法線ベクトルの向きを向いている．従って，積分結果にマイナスをつける必要はない．もし，意地悪い問題が「法線ベクトルは $-z$ の向きにとる」と書いていたら，法線ベクトルの向きは上とは逆（従って，積分の最終結果にマイナスをつける）と覚えておかなければならない．

ここら辺で,「向き」についての補足

S_2 の方は，半径 3 の半球面である．極座標で表すと，前回のプリントの (2.5.13), (2.5.14) のように,

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3\sin\theta\cos\phi \\ 3\sin\theta\sin\phi \\ 3\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = 3^2\,\sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = 9\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}}$$

である（$\hat{\boldsymbol{r}}$ は $\boldsymbol{r}$ の向きの単位ベクトル）．このベクトルも正しい法線ベクトルの向きを向いている．

S_3 は２つの部分，円柱のフタと側面に分けて考えよう．円柱のフタは S_1 と並行なので，$z = 2$ であること以外は S_1 と同じように考えればよい．つまり,

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

である（$0 \le r \le 3, 0 \le \phi \le 2\pi$）．一方，側面は

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3\cos\phi \\ 3\sin\phi \\ z \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 3\cos\phi \\ 3\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

である（$0 \le \phi \le 2\pi,\ 0 \le z \le 2$）．これらのベクトルも正しい法線ベクトルの向きを向いている．(ここで，側面は「下から上」じゃないだろう，と思った人がいるかもしれないが，講義中にも注意したように，法線ベクトルは面全体で「自然に」つながった向きにとる．今の場合は円柱のフタの部分で上向きにとっているから，側面もそれに合わせて「外向き」にとるわけだ.）

注意：なお，以上のような計算を大体やったにもかかわらず，変数 θ, ϕ などの範囲を間違った人がかなり見受けられた．特に，θ と ϕ を逆にしたものや，θ の範囲を 0 から π にしたものなどが目立った．単純なミスだろうとは思うが，注意のこと．

以上に基づいて，積分をやっていこう．まず，a) から．S_1 では

$$a) \qquad \int_{S_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = 0$$

となる．実のところ，S_1 は xy-平面内にあるので法線ベクトルは z-軸の方を向くのはアタリマエだし，$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ なのもまあ，アタリマエ．その意味でこの問題はあんまり面白くないのだが，一応，やってもらった．

次に，S_2 では

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = 9\,\sin\theta\,\cos\theta\,3\cos\theta = 27\sin\theta\,\cos^2\theta$$

であって，積分は

$$\int_{S_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, 27\sin\theta\,\cos^2\theta = 54\pi \int_0^{\pi/2} d\theta\,\sin\theta\,\cos^2\theta = 18\pi \qquad \cdots a) \text{ の答え}$$

S_3 ではフタと側面の部分に分けて考える．まずフタの部分は

$$\int_{S_3\text{のフタ}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi\, 2r = 18\pi.$$

一方，側面は

$$\int_{S_3\text{の側面}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\cos\phi \\ 3\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\phi\, 0 = 0$$

従って両者をくわえて，S_3 全体では,

$$\int_{S_3} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = 18\pi \qquad \cdots a) \text{ の答え}$$

である．

以上は大げさに公式に従って計算したが，以下のように考えれば公式を使うまでもない．フタに関しては，法線ベクトルはフタに垂直（z-方向）で，$\boldsymbol{F}$ の向きと同じ，かつ力の大きさは 2 で一定．従って，面積分の値は力の大きさ 2 にフタの面積をかければ求められて，答えは $2 \cdot 9\pi = 18\pi$ になる．一方，円柱の側面の法線ベクトルは z-軸に垂直なので，$\boldsymbol{F}$ との内積はゼロだ．つまり，この側面からの積分への寄与はゼロ．

b) も同様に計算できる．S_2 では，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$ なので,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = 9\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r} = 27\sin\theta$$

であって，積分は

$$\int_{S_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, 27\sin\theta\, = 54\pi \int_0^{\pi/2} d\theta\,\sin\theta\, = 54\pi \qquad \cdots b) \text{ の答え}$$

となる．

これも，公式を用いなくても簡単に計算できる．法線ベクトルは球面に垂直で $\boldsymbol{F}$ と平行，かつ力の大きさは 3 で一定．従って面積分の値は力の大きさ 3 に半球の面積をかけたものになって，$3 \times 2\pi\, 3^2 = 54\pi$.

S_3 では，フタからの寄与は

$$\int_{S_3\text{のフタ}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} = \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi\, 2r = 18\pi.$$

一方，側面は

$$\int_{S_3\text{の側面}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\phi \begin{pmatrix} 3\cos\phi \\ 3\sin\phi \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3\cos\phi \\ 3\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\phi\, 9 = 36\pi$$

である．両者を足して，

$$\int_{S_3} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = 18\pi + 36\pi = 54\pi \qquad \cdots b)\text{ の答え}$$

である．

これもここまで大げさにしなくてももっと簡単に計算できる（特に，フタからの寄与）．各自で考えてみよう．

どうも僕のレポート問題は呪われているようだ．今回は面積分の値が曲面に依存するように（あとでやる言葉で言うと $\mathbf{div}\,\boldsymbol{F} \neq 0$）出題したつもりだった．実際，$S_1$ と S_2 以下の面積分は異なった．しかし，これは本当に偶然なのだが，S_2 と S_3 の面積分が一緒になってしまった.（後でやるように，この理由も $\mathbf{div}\,\boldsymbol{F}$ と「ガウスの定理」を使うと理解できる.）一般には面積分の値は曲面 S に依存するので，誤解のないように.

——————————以下，レジュメの続き——————————

3 ベクトル解析の基礎

今まで，重積分，線積分、面積分をやってきた．これらはそれ自身でも閉じた話題であるが,（皆さんが既に電磁気の講義などで知っているように）ベクトル自身の性質と関連づけると，面白いものが見えてくる．

特に，強調したいのは以下の 3 点である．

- 与えられたベクトル場がどのようなものか，それを的確に表す 3 つの概念（gradient, divergence, rotation）を理解する．
- 「ガウスの定理」「ストークスの定理」などによって，特定の面積分や線積分を別の形の積分（重積分や面積分など）で書き直せることを理解する．
- （少しおまけ）このことから，物理法則などを「積分形」と「微分形」のどちらでも書けることを理解する．

この節では空間全体で定義されたスカラー値の関数をスカラー場，ベクトル値の関数をベクトル場と呼ぶ．ベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分は $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ のように，添え字 x, y, z で表す．

（のっけからおまけ；興味のある人のみ，読んでくれればよい）スカラー，ベクトルという用語について

今までは「スカラー」「ベクトル」という言葉を，故意に定義せずに使ってきた．強いて言えば,「一成分からなる量」がスカラーで,「多成分からなる量」がベクトル，と言ってきた．正直のところ，これは全く不完全な定義である．本当のスカラー，ベクトルの定義は，これらの量の座標変換に際しての変換性に基づくべきである．ただし，ここでいう座標変換とは今までの「デカルト座標から曲線座標へ」といったものではなく，いろいろな運動をしている観測者同士の関係を表すものである（力学で出てきた「実験室系」と「回転座標系」などの話．ただし，回転座標系については以下の話はそのままでは適用できない.）

以下では d-次元の空間での話をし，新旧の座標は，原点を共有するデカルト座標だとする[3]．この場合，座標変換は $x_i' = \sum_{j=1}^{d} R_{ij} x_j$ と書かれる（R_{ij} は $d \times d$ の行列 R の ij 成分）．

ある量 $\phi(\boldsymbol{r})$ があって，別の座標系から見てもその値が不変のとき，ϕ はスカラーだという．もちろん，別の座標系に移る場合，空間内の同じ点（その座標の値は新旧の座標系で異なるだろうが）での ϕ の値を比べる必要がある．

一方，d-次元空間内で d-成分の量 $(A_1, A_2, \ldots, A_d)$ があり，それが座標変換に際していわゆるベクトルの変換則に従う場合，それをベクトルという．ここで「ベクトル型」の変換則とは，新しい座標での成分が $A_i' = \sum_{j=1}^{d} R_{ij} A_j$ と，座標の場合と同じ行列（R）をかけることで得られることを言う．このように R がかかる理由は，ベクトルが「向き」を持っていて,（本当はベクトルの向きは不変なのだが）座標系が変わった為に，新しい座標ではその向きが変わったように見えるからである．以上の説明が，我々が「力はベクトルである」「電場はベクトルである」という直感と同じであることは各自納得して欲しい．

このような変換則を拡張して，B_{ij}（$1 \le i, j \le d$）という d^2 個の成分を持った量で，その変換則が $B_{ij}' = \sum_{k,l=1}^{d} R_{ik} R_{jl} B_{kl}$ に従うものを考えることもできる．これは２階のテンソルと呼ばれる．同様に，添え字が３ついたもの，４ついたもの，を考えて行くこともできる（３階，４階のテンソル）と呼ばれる．（ベクトル，テンソルについては微分幾何的な「正しい」説明をすべきだろうが，それはもちろん，この講義の範囲を超えている．）

（更に補足；以下，この小節の最後までは読み飛ばして良い．）

なお，このような「座標変換に際しての変換則」は物理学上は非常に重要な概念である．というのは，ガリレイ（またはアインシュタイン）の相対性原理を認めると，物理法則は座標変換（ガリレイ変換，またはローレンツ変換）に関して不変な形に書けるはずであり，物理の基礎法則（基礎方程式）はガリレイ変換やローレンツ変換に関して不変（正確には共変）な形である必要が出てくるからである．この事は基礎法則に現れる物理量に非常に厳しい制限を加える．結果だけを述べると，基礎方程式に現れることができるのは，上のスカラー，ベクトル，テンソル,（と上では説明しなかったスピノル）しかないことがわかる．この辺りの事情は「特殊相対性理論，一般相対性理論，ローレンツ群の表現論」などを勉強すると良くわかるだろう．

3.1 gradient, divergence, rotation （定義のみ）

まず，ベクトル場やスカラー場を的確に特徴づける，３つの概念を導入しよう．

以下，空間の座標は $\boldsymbol{r}$ で表す．

定義 3.1.1 (gradient, divergence, rotation のええ加減な定義) ここでの (x, y, z) は通常のデカルト座標とする．スカラー場 $\phi(x, y, z)$ が与えられたとき，これから定義されるベクトル

$$\mathbf{grad}\ \phi(x,y,z) \equiv \Bigl(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\Bigr) \tag{3.1.1}$$

を ϕ の gradient （勾配）という．また，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が与えられたとき，これから定義されるスカラー

$$\mathbf{div}\ \boldsymbol{A}(x,y,z) \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{3.1.2}$$

を，$\boldsymbol{A}$ の divergence （発散）という．また，$\boldsymbol{A}$ から定義されるベクトル

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}(x,y,z) = \Bigl(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Bigr) \tag{3.1.3}$$

を $\boldsymbol{A}$ の rotation または curl（回転）という．

この定義がなぜ,「ええ加減」かというと，上の定義は一般の曲線座標では正しくないからである．gradient, divergence などの概念は，本来，座標系に依らないものなので，特定の座標でだけ正しいような定義は困るのだ．「本当」の定義は，これらの定義の意味を考える次節以下で行う．

なお，初めから「正しい」定義を与えない理由は,「正しい」定義をきちんとやるのはちょっと面倒で，かつ「正しい」定義をみたすものが実際にあるのかどうか，すぐにはわからない面があるからだ．（上のデカルト座標の定義なら，微分ができる限りは存在するでしょ？）

[3] このような制限はニュートン力学を考えていることにほぼ等しい．特殊相対性理論，一般相対性理論ではもっと広範囲の座標変換を考えることになる

記号についての補足

上で定義した諸量は,「ベクトルの形をした微分演算子」

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{3.1.4}$$

を定義すると，形式的には

$$\mathbf{grad}\,\phi = \nabla\,\phi, \qquad \mathbf{div}\,\boldsymbol{A} = \nabla\cdot\boldsymbol{A}, \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3.1.5}$$

と書ける．これらは ∇ が 3 成分のベクトルだと思って，普通にベクトルの演算 — 内積をとったり，外積をとったり — をする，という意味．これはなかなか便利ではあるし，何がベクトルで何がスカラーかを明示してくれるので，使うこともあるだろう．ただし，この記法はデカルト座標系では正しいが，曲線座標系に移ると種々の誤解の種になることは注意しておいて欲しい．

3.2 gradient, potential と線積分

Gradient の意味と「正しい」定義

Gradient の持つ意味は，以下の性質から理解できる．今，スカラー場 ϕ の方向微分を考えよう．3 次元空間内の単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ を一つ固定したとき，極限

$$D_{\boldsymbol{t}}\phi \equiv \lim_{h\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{r}+h\boldsymbol{t})-\phi(\boldsymbol{r})}{h} \tag{3.2.1}$$

が存在するなら，これを ϕ の $\boldsymbol{t}$ 方向の方向微分係数という．この量は，その名前の通り，$\boldsymbol{t}$ の方向での変化率を表している．この方向微分の一般的な記号は存在しないが，ここでは $\boldsymbol{t}$ の方向であることを強調するため，$D_{\boldsymbol{t}}\phi$ と書くことにした．

方向微分と gradient の関係は以下の命題で与えられる．

命題 3.2.1 (方向微分と gradient)

$$D_{\boldsymbol{t}}\phi = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{r}+h\boldsymbol{t})-\phi(\boldsymbol{r})}{h} = \boldsymbol{t}\cdot\mathbf{grad}\;\phi \tag{3.2.2}$$

が成り立つ．つまり，$\boldsymbol{t}$ 方向の方向微分係数は，$\nabla\phi = \mathbf{grad}\,\phi$ と $\boldsymbol{t}$ との内積をとることで得られる．

証明：

方向微分をとるベクトル $\boldsymbol{t}$ の各成分を t_x, t_y, t_z と書くと，方向微分の定義に現れたニュートン商の分子は,

$$\phi(\boldsymbol{r}+h\boldsymbol{t})-\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(x+ht_x, y+ht_y, z+ht_z)-\phi(x,y,z) \approx \frac{\partial\phi}{\partial x}ht_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}ht_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}ht_z \tag{3.2.3}$$

となっているが，これは $\mathbf{grad}\;\phi$ と $h\boldsymbol{t}$ との内積に他ならない．従って，h で割ると

$$D_{\boldsymbol{t}}\phi = \lim_{h\to 0}\frac{\phi(\boldsymbol{r}+h\boldsymbol{t})-\phi(\boldsymbol{r})}{h} = \boldsymbol{t}\cdot\mathbf{grad}\;\phi \tag{3.2.4}$$

が得られる．つまり，(3.2.2) が証明された． □

また，$\boldsymbol{t}$ をいろいろな方向に向けた場合，方向微分係数の値が一番大きくなるのは $\boldsymbol{t}$ が $\mathbf{grad}\;\phi$ の向きを向いた場合であることが，この表式 (3.2.2) からわかる．これを逆手にとって，$\mathbf{grad}\;\phi$ の定義とすることができる．すなわち，

定義 3.2.2 (Gradient の「正しい」定義) $\mathbf{grad}\,\phi$ とは，以下の 2 つの性質を持ったベクトルと定義することもできる．

- その向きは，方向微分 $D_{\boldsymbol{t}}\phi$ の値が一番大きくなる $\boldsymbol{t}$ の向きで,
- その大きさは，方向微分 $D_{\boldsymbol{t}}\phi$ の最大値である．

この定義なら，座標系の取り方には依らないから,「正しい」定義といえる.

証明：
このような性質をもつベクトルがたった一つ，存在することを示せばよい．しかしこれは (3.2.2) からすぐに出る —— (3.2.2) に現れている **grad** ϕ とは，(3.1.1) の定義によるものである． □

保存力と線積分

力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が，あるスカラー関数 $\phi(\boldsymbol{r})$ から

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\ \phi(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) \tag{3.2.5}$$

と書けるとき，$\boldsymbol{F}$ は保存力であるという．また，ϕ を力 $\boldsymbol{F}$ のポテンシャルという.（保存「力」と言ってはいるが，実際に「力」である必要はない.）保存力の線積分について考えてみよう.

定理 3.2.3 (保存力の線積分) ポテンシャル ϕ から導かれる力 $\boldsymbol{F}$ に対しては，任意の曲線 C に関する線積分が

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \phi(\text{始点}) - \phi(\text{終点}) \tag{3.2.6}$$

をみたす．ここで ϕ(始点) と ϕ(終点) は，それぞれ，曲線 C の始点と終点における ϕ の値を表す.

証明：
計算してみれば，出る．曲線 C のパラメーター表示を $\boldsymbol{r}(t)$ としよう（$0 \le t \le 1$）．$\boldsymbol{F} = -\mathbf{grad}\,\phi$ であることを考えに入れると，線積分は

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_0^1 \mathbf{grad}\,\phi\bigl(\boldsymbol{r}(t)\bigr)\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,dt \tag{3.2.7}$$

と表される．ところが，連鎖率を使って計算すると（いつもどおり $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と書いた）

$$\frac{d}{dt}\phi(\boldsymbol{r}(t)) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r}' \tag{3.2.8}$$

なのである．つまり，上の積分の右辺は

$$-\int_0^1 \mathbf{grad}\,\phi\bigl(\boldsymbol{r}(t)\bigr)\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,dt = -\int_0^1 \frac{d}{dt}\phi(\boldsymbol{r}(t))\,dt = -\Bigl[\phi(\boldsymbol{r}(t))\Bigr]_0^1 = -\phi(\text{終点}) + \phi(\text{始点}) \tag{3.2.9}$$

となる． □

註： 当然，どのような力の場は保存力か？との疑問が湧くが，その答えは rotation をよく調べてから与えられる.

６月２９日：テストについては別紙を見てください（S-II-19 クラス）．物理学科の解答集は，現在，作成中．
今日は gradient のまとめと，divergence, rotation です．

3.3 Divergence と Gauss の定理

Divergence の持つ意味について，まずは考える．今，３次元空間内に非常に微小な立方体をとろう．立方体の一つの頂点は (x_0, y_0, z_0)，対角にある頂点を $(x_0 + \varDelta, y_0 + \varDelta, z_0 + \varDelta)$ とし（一辺の長さは $\varDelta$），立方体の表面を S で表す．空間全体でベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が定義されているものとして，面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$ を考える．（法線ベクトルの向きは，この立方体から外に向く向きにとる.）

この面積分は，一般の立方体 S については簡単には計算できない．しかし，立方体が非常に小さく，ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{r}$ にゆっくりとしか依存していない場合は，以下のように近似計算することができる．

立方体には６つの面があるので，まずは x-軸に垂直な，２つの面から考える．$x = x_0$ の面の法線ベクトルは $(-1, 0, 0)$，$x = x_0 + \varDelta x$ の面の法線ベクトルは $(1, 0, 0)$ であるから，これらの面からの面積分への寄与は近似的に

$$\Bigl(F_x(x_0 + \varDelta, y_0, z_0) - F_x(x_0, y_0, z_0)\Bigr)\,\varDelta^2 \approx \frac{\partial F_x}{\partial x}\,\varDelta \times \varDelta^2 = \frac{\partial F_x}{\partial x}\,\varDelta^3 \tag{3.3.1}$$

である[4]．同様に，y-軸に垂直な面からの面積分への寄与は

$$\Bigl(F_y(x_0, y_0 + \varDelta, z_0) - F_x(x_0, y_0, z_0)\Bigr)\,\varDelta^2 \approx \frac{\partial F_y}{\partial y}\,\varDelta^3, \tag{3.3.2}$$

z-軸に垂直な面からの寄与は

$$\Bigl(F_z(x_0, y_0, z_0 + \varDelta) - F_x(x_0, y_0, z_0)\Bigr)\,\varDelta^2 \approx \frac{\partial F_z}{\partial z}\,\varDelta^3 \tag{3.3.3}$$

となる．結果として，

$$\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \approx \Bigl(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\Bigr)\,\varDelta^3 + \text{ (higher orders)} \tag{3.3.4}$$

が得られる．ところが，右辺のカッコの中身は (3.1.2) の $\mathbf{div}\,\boldsymbol{F}$ に他ならない．そこで，

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\varDelta\to 0}\frac{1}{\varDelta^3}\int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.5}$$

がなりたつことがわかる.（ただし，右辺の S は $\boldsymbol{r}$ を頂点に持つ，一辺 $\varDelta$ の立方体）．

これが　divergence の意味である．面積分の定義から，右辺の面積分はこの小さな立方体から逃げていく $\boldsymbol{F}$ の分量を表している．この量は立方体の体積に比例する形でゼロになるので，全体を $\varDelta^{-3}$ 倍して $\varDelta \to 0$ の極限をとると，単位体積当たりの $\boldsymbol{F}$ の逃げていく量，が計算でき，これが $\mathbf{div}\,\boldsymbol{F}$ なのである．

さて，このような divergence の意味を理解すると，下のガウスの（発散）定理がアタリマエ[5]に見えてくるだろう．

定理 3.3.1 (ガウスの発散定理) 単連結な有界領域 V と，その表面 $S = \partial V$，V 上で定義されたベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ がある．このとき，

$$\int_V \mathbf{div}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})dxdydz = \int_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.6}$$

が成り立つ．

[4] ここのところ，最終結果で $\varDelta^3$ より高次の項は無視した，例えば，F_x の値は面上でも少しずつ違うはずなので，F_x の引数を $(x_0+\varDelta, y_0, z_0)$ や (x_0, y_0, z_0) と簡単化したのは，本当はウソである．しかし，F_x が x, y, z について２階くらい連続的微分可能ならば，以上の簡単化による誤差は $\varDelta^4$ か，それ以上に小さいことがわかる．

[5] アタリマエというのは，けなしているわけではなく，褒め言葉である．実際,「アタリマエ」な事というのは，気がついてみれば非常に有用なことが多い．誰もが気づかなかった「アタリマエ」を定式化して本当に「アタリマエ」にしたところに，ガウスの偉大さ（の一端）がある．

この定理は，右辺の表面積分を左辺の体積積分に直す式とも，その逆とも解釈できる．この定理は電磁気学で微分形と積分形の法則を行き来するのに使ったはずで，皆さんおなじみのものでしょう．

証明：
ええと，まあ，黒板でやりますわ．皆さん，多分，どっかで見たことあると思うしね... □

この定理を逆手にとって，divergence を以下のように定義することもできる．この定義なら，座標系によらずに使えるという意味で,「正しい」．以下の定義では，感じをつかんでもらうために，少しええ加減な書き方をしている（V がどのような形まで許すかとかは書いてない）が，この傾向はこの章の最後まで続くだろう．

定義 3.3.2 (divergence の「正しい」定義) 3 次元空間内にベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ がある．このとき，空間内の一点 $\boldsymbol{r}$ における $\boldsymbol{A}$ の divergence を，以下のように定義することもできる：

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \equiv \lim_{|V|\to 0} \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \tag{3.3.7}$$

ここで V とは $\boldsymbol{r}$ を中心にした微小な体積（立方体や直方体），$|V|$ はその V の体積，∂V は V の表面（法線ベクトルは外向きにとる）である．

註： 上ではガウスの定理から divergence の「正しい」定義を導くかのような書き方をしたが，これは誤解を招きやすいかもしれない．というのは，ガウスの定理の証明する際，divergence の「正しい」定義を証明して使っているようなところがあるからだ．

この節を終わるに当たって，ガウスの定理の応用として，グリーンの定理を証明しておく．

定理 3.3.3 (Green) V を 3 次元空間の有限領域，その表面を ∂V と書く．V にて連続的に 2 階微分可能なスカラー関数 ϕ, ψ があると，以下がなりたつ．数式内では積分の場所を表す引数 $(\boldsymbol{r})$ を省略した．

$$\iiint_V \Bigl(\phi\nabla^2\psi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi\Bigr)\, dxdydz = \int_{\partial V} \phi\nabla\psi \,\cdot\, d\boldsymbol{S} \tag{3.3.8}$$

$$\iiint_V \Bigl(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi\Bigr)\, dxdydz = \int_{\partial V} \Bigl(\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi\Bigr) \,\cdot\, d\boldsymbol{S} \tag{3.3.9}$$

一つ目を Green の第一定理，二つ目を Green の第二定理という．

証明：

恒等式

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi) = \phi\nabla\cdot\nabla\psi + (\nabla\phi)\cdot(\nabla\psi) \tag{3.3.10}$$

の両辺を V で積分し，左辺の積分をガウスの定理で表面積分に書き直すと (3.3.8) が出る．また，(3.3.8) と，その ϕ, ψ を入れ替えたものを引き算すると (3.3.9) が出る．詳細は教科書（スウの本）の pp.152–153 を参照． □

3.4 Rotation と保存力，Stokes の定理

次に，rotation の持つ意味を考えよう．正直，これが一番捉えにくいものだろう．今までと同じように，3 次元空間内にベクトル場 $\boldsymbol{A}$ があるとして，一点 $\boldsymbol{r}$ の近傍を考える．

$\boldsymbol{r}$ を一つの頂点とする小立方体を考える．話を明確にするため，立方体の 2 つの頂点が (x_0, y_0, z_0) と $(x_0+\varDelta, y_0+\varDelta, z_0+\varDelta)$ だとしておこう．

点 (x_0, y_0, z_0) を中心とする半径が ϵ の円を考える．円周をまわる向きを固定し，右ネジの法則で決まる円の法線ベクトルを $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ と書くことにしよう．このように向きまで決めた円周を C と書く．

ここで，線積分 $\int_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ を考えてみる．これと rotation の関係は以下の定理で与えられる．

命題 3.4.1 (線積分と rotation) 単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を右ネジの方向にみるような，半径 ϵ の小円を C とすると，

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi\epsilon^2}\int_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} \tag{3.4.1}$$

が成り立つ．つまり，$\boldsymbol{n}$ を法線ベクトルにもつ小円での線積分から上の極限を作ると，その値は $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{n}$ との内積をとることで得られる．

証明：

詳細をプリントにする根性がないので，要点だけを記しておくから，興味のある人はやってみるとよい．

まず，C をうまく表す必要がある．そのために，$\boldsymbol{n}$ そのものの定義からやりなおす．まず，z-軸方向を向いた単位ベクトル $(0,0,z)$ を考え，これを y-軸のまわりに α, そのあとで z-軸のまわりに β だけ回転してできるベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．$\boldsymbol{n}$ の成分は，回転の行列をかけて

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha\,\cos\beta \\ \sin\alpha\,\sin\beta \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{3.4.2}$$

となる．

次に曲線 C だが，これも xy-平面上の円 $x=\epsilon\cos t, y=\epsilon\sin t$ （$0\le t\le 2\pi$）を同じように回転し，かつそれを $\boldsymbol{r}_0$ だけ平行移動すれば得られるはずだ（$\boldsymbol{r}_0$ が円の中心）．計算すると

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon\cos t \\ \epsilon\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{r}_0 + \epsilon \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos t - \sin\beta\sin t \\ \cos\alpha\sin\beta\cos t + \cos\beta\sin t \\ -\sin\alpha\,\cos t \end{pmatrix} \tag{3.4.3}$$

となる．これから $\boldsymbol{r}'(t)$ を計算すると

$$\boldsymbol{r}'(t) = \epsilon \begin{pmatrix} -\cos\alpha\cos\beta\sin t - \sin\beta\cos t \\ -\cos\alpha\sin\beta\sin t + \cos\beta\cos t \\ \sin\alpha\,\sin t \end{pmatrix} \tag{3.4.4}$$

がわかる．これと $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の内積をとるのだが，今は円 C が十分に小さいと思って，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を円の中心を基準にしてテイラー展開し，その一次だけをみる．つまり，

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{r}) &= f(\boldsymbol{r}_0) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) + O(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^2) \\ &= f(\boldsymbol{r}_0) + \epsilon\Big\{\frac{\partial f}{\partial x}\big(\cos\alpha\cos\beta\cos t - \sin\beta\sin t\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\cos\alpha\sin\beta\cos t + \cos\beta\sin t\big) + \frac{\partial f}{\partial z}\big(-\sin\alpha\cos t\big)\Big\} \\ &\quad + O(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

を，$f=A_x, A_y, A_z$ として用いる．$O(\epsilon^2)$ を無視して $\boldsymbol{r}'(t)$ との内積をとり，t を 0 から 2π まで積分する．ここはあまりにたくさんの項が出てくるので，積分の結果を一足跳びに書くと，

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} &= \pi\epsilon^2\Big(-\frac{\partial A_x}{\partial y}\cos\alpha + \frac{\partial A_x}{\partial z}\sin\alpha\sin\beta + \frac{\partial A_y}{\partial x}\cos\alpha - \frac{\partial A_y}{\partial z}\sin\alpha\cos\beta \\ &\qquad - \frac{\partial A_z}{\partial x}\sin\alpha\sin\beta + \frac{\partial A_z}{\partial y}\sin\alpha\cos\beta\Big) \\ &= \pi\epsilon^2\Big(-\frac{\partial A_x}{\partial y}n_z + \frac{\partial A_x}{\partial z}n_y + \frac{\partial A_y}{\partial x}n_z - \frac{\partial A_y}{\partial z}n_x - \frac{\partial A_z}{\partial x}n_y + \frac{\partial A_z}{\partial y}n_x\Big) \\ &= \pi\epsilon^2\,\boldsymbol{n}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} + O(\epsilon^3) \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

となることがわかる．もちろん，rotation は円の中心，$\boldsymbol{r}_0$ にての値である．これを書き直すと (3.4.1) になる．□

この定理を解釈しよう．(3.4.1) にて $\boldsymbol{n}$ をいろいろにとった小円での極限を比べてみると，これは $\boldsymbol{n}$ が $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ と同じ向きの時に最大で，その長さは $|\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}|$ であることがわかる．これは $\mathbf{grad}\,\phi$ と似た状況であるので，これをまとめて以下を得る．

定義 3.4.2 (Rotation の「正しい」定義) $\mathrm{rot}\,\phi$ とは，以下の 2 つの性質を持ったベクトルと定義することもできる．

- その向きは，(3.4.1) の値が一番大きくなる $\boldsymbol{n}$ の向きで，
- その大きさは，(3.4.1) の値の最大値である．

さて，rotation については，以下の Stokes の定理がなりたつ．上の命題 3.4.1 はこの定理の特別な場合になっている．

定理 3.4.3 (Stokes) 3 次元空間内に適当な曲面 S を考え，その境界の曲線を C とする．S の法線ベクトルと C の向きは,「右ネジの法則」で決める．このとき，任意のベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ に対し，

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \tag{3.4.7}$$

が成立する．

証明：

まあ，この証明も黒板で簡単に説明しますわ． □

この定理の系として，以下が成り立つ．

系 3.4.4 ベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が rotation-free，つまり至る所で $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ ならば，点 A と点 B を結ぶ曲線に沿っての線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ は始点 A と終点 B のみによって決まり，途中の C の取り方にはよらない．

証明：

A と B を結ぶ曲線を 2 とおりとって，C_1, C_2 と書くことにする．C_2 の向きを変えて B から A に行くようにしたものを $-C_2$ と書くと，C_1 の次に $-C_2$ をつなげることで，$A \to B \to A$ の閉曲線ができる．この閉曲線全体に関する線積分は

$$\int_{C_1 - C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{-C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} - \int_{C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \tag{3.4.8}$$

である．ところが，$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ なので，ストークスの定理から

$$\int_{C_1 - C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \mathbf{rot}\,\boldsymbol{F} d\boldsymbol{S} = 0 \tag{3.4.9}$$

である．ここで S は，$C_1 - C_2$ を境界に持つような任意の曲面．従って，この 2 つから，

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \tag{3.4.10}$$

が得られた．つまり，任意の 2 つの曲線に関しての線積分の値は等しい． □

3.5 積分の変換

今までにやってきた定理をまとめておこう．この辺りは必要に応じて思い出せば良いので，簡単にすませる．

(1) まず，V を 3 次元空間の有限領域，その表面の閉曲面を ∂V とし，両者の間の積分の関係を導こう．基本として，ガウスの定理は

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \bigl(\nabla\cdot\boldsymbol{F}\bigr)\, dxdydz \tag{3.5.1}$$

を主張するが，これは左辺の表面積分を右辺の体積積分に直す式とも，その逆とも捉えられる．この応用を二つ述べておこう．

(2) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}\phi(\boldsymbol{r})$ ［$\boldsymbol{a}$ は任意の定ベクトル］とおいてガウスの定理を使うと，

$$\int_{\partial V} \phi(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \int_V \big(\nabla\phi\big)\, dxdydz \tag{3.5.2}$$

も得られる．

(3) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ ［$\boldsymbol{a}$ は任意の定ベクトル］とおいてガウスの定理を使うと，

$$\int_{\partial V} d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int_V \big(\nabla \times \boldsymbol{A}\big)\, dxdydz \tag{3.5.3}$$

も成り立つことがわかる（以上，詳しくは教科書（スウの本）の pp.155–156 を参照）．

次に，閉曲面 C で囲まれた有限な曲面を S と書き，両者の上での積分の関係を導こう．気分の問題で $C = \partial S$ と書く．また曲面 S の表裏と曲線 C の向きは,「右ネジの関係」をみたすように決める．

(4) まず，Stokes の定理は

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \big(\nabla \times \boldsymbol{A}\big) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.5.4}$$

である．この応用として，いかの２つがあげられる．

(5) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}\phi(\boldsymbol{r})$ ［$\boldsymbol{a}$ は任意の定ベクトル］とおいてストークスの定理を使うと，

$$\int_{\partial S} \phi(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = \int_S d\boldsymbol{S} \times \nabla\phi \tag{3.5.5}$$

が得られる．

(6) また，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ ［$\boldsymbol{a}$ は任意の定ベクトル］とおいてストークスの定理を使うと，

$$\int_{\partial S} d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int_S \big(d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \times \nabla\big) \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{3.5.6}$$

が得られる（詳細はスウの本の pp. 167–169）．

3.6 ２種類のポテンシャルとベクトルの分解

いままでの結果を基に，ベクトル場と「ポテンシャル」の関係をまとめておこう.（多分，大半は聞いたことのあるはなしでしょうね.）

結果を述べてしまおう．以下ではベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ などが与えられているとする．

一つ目の定理は，$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ に関するものである．

定理 3.6.1 (rotation-free とスカラーポテンシャル) 以下の同値関係がなりたつ．

すべての場所で　$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$

$\Longleftrightarrow$

適当なスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ が存在して, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r})$ と書ける (3.6.1)

なお，$\boldsymbol{E}$ を与えるスカラーポテンシャルは，付加定数の自由度を除いて（つまり，勝手な定数を足したりひいたりする自由度はあるが）一意的に定まる．

証明：

下から上は，単なる計算だ．つまり，$\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\,\phi$ ならば $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ であることを計算で示せばよい．

問題は上から下を出す方で，こっちは全然当たり前には見えない（少なくとも初めのうちは）．でも，ストークスの定理（または系 3.4.4）を思い出すと，簡単である．

いま，点 A と点 B を結ぶ，任意の曲線 C を考えよう．線積分 $\int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ の値は，C の取り方にはよらない．そこで，例えば原点でのポテンシャルの値を一つ勝手に決めて（ϕ_0），他の点でのポテンシャルを

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_0 - \int_C \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \qquad (C\text{ は原点から }\boldsymbol{r}\text{ へ行く勝手な曲線}) \tag{3.6.2}$$

としてやろう．この表式を実際に微分してみると，$-\mathbf{grad}\,\phi = \boldsymbol{E}$ であることはすぐにわかる．つまり，このように定義した $\phi(\boldsymbol{r})$ が定理の主張するところのスカラーポテンシャルになっていることが確かめられた．

最後に，ポテンシャルの一意性について考えよう．上でポテンシャルの存在は言ったので，このベクトルは「保存力」である．だから，定理 3.2.3 が使えるが，これは任意の２点間のポテンシャルの差を一意に決めてしまう．任意の２点間のポテンシャルの差が決まっているので，残されたのは空間全体でポテンシャルを同じ量だけ上げ下げする自由度のみである．これは要するに，上の ϕ_0 の自由度だ． □

２つ目の定理は，$\mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0$ ならどうか，と言うもの：

定理 3.6.2 (divergence-free とベクトルポテンシャル) 以下の同値関係がなりたつ．

すべての場所で　$\mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0$

$\Longleftrightarrow$

適当なベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が存在して，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ と書ける (3.6.3)

また，$\boldsymbol{B}$ を与えるベクトルポテンシャルは一意には定まらないが，そのようなベクトルポテンシャルの２つを $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}'$ とすると，その差は適当なスカラー場 ϕ を用いて $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}' = \mathbf{grad}\,\phi$ と書ける．つまり，$\mathbf{grad}\,\phi$ の自由度を除いて一意に決まると言って良い．

証明：

これも，下から上は単なる計算で確かめられる．問題はこの逆だね．

まず，定理を満たすようなベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の存在は，実際にそのような $\boldsymbol{A}$ を構成することで証明できる．ともかく一つでもそのような $\boldsymbol{A}$ を作れば良いのだから，天下りに答えを与えると，

$$\boldsymbol{A}(x_1, y_1, z_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^{x_1} B_z(x, y_1, z_1)dx \\ \int_0^{y_1} B_x(0, y, z_1)dy - \int_0^{x_1} B_y(x, y_1, z_1)dx \end{pmatrix} \tag{3.6.4}$$

が良いことがわかる．(この $\boldsymbol{A}$ を微分して実際に $\boldsymbol{B}$ がでることを確かめるのは良い練習問題だからやってみると良い.）実のところ，上のような $\boldsymbol{A}$ を自力で作るのはちょっと面倒だったので，教科書（スウの本）の pp.178–180 をカンニングした．

一意性については以下のようになる．まず，$\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ ならば，

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}' = \mathbf{rot}\,(\boldsymbol{A} - \mathbf{grad}\,\phi) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} - \mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,\phi = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \tag{3.6.5}$$

なので，$\boldsymbol{A}'$ も正しいベクトルポテンシャルであることがわかる．次に，$\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}'$ ならば，

$$\mathbf{rot}\,(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}') = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} = \mathbf{0} \tag{3.6.6}$$

であるが，これはベクトル場 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}'$ が rotation-free であると主張している．すると，定理 3.6.1 から，$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}'$ が gradient の形に書けることが結論できる． □

７月６日：テストについては別紙を見てください（物理学科）．工学部の解答は先週配りました．
期末テストについては特に大きく宣言することはありませんが，詳細は来週，示します.（範囲は今学期のところ全部ですが，中間テストの範囲がメインになるでしょう.）
今日は divergence, rotation の残りとポテンシャルについて，です．
なお，物理学科の方が進み方が少し早いので，物理の人には今日で大体のまとめをやり，来週はテストとは無関係の「特別講義」を行います.

——————————————以下，レジュメの続き ——————————————

先週のプリントで，divergence-free または rotation-free なベクトル場が，それぞれスカラーポテンシャル，ベクトルポテンシャルで書けることがわかった．でも一般のベクトル場はこのどちらでもない．そのようなベクトル場に対しては，どのようにポテンシャルを導入すべきなのだろうか？そもそも，ポテンシャルで書けるのだろうか？答えは以下の定理で与えられる．

定理 3.6.3 (一般のベクトルの分解) 任意のベクトル $\boldsymbol{F}$ は，divergence-free な場 $\boldsymbol{B}$ と，rotation-free な場 $\boldsymbol{E}$ の和に分解することができる：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}), \qquad \text{すべての点で} \quad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}, \quad \mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{3.6.7}$$

この分解は一意とは限らないが，２つの可能な分解を $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{B}_1$ と $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{B}_2$ とすると，用いて

$$\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1 = \mathbf{grad}\,\psi, \qquad \text{すべての点で} \quad \Delta\psi = 0 \tag{3.6.8}$$

が成り立つようなスカラー関数 ψ が存在する．逆に，$\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{B}_1$ が (3.6.7) を満たしている場合，(3.6.8) で関係づけられた $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{B}_2$ も (3.6.7) を満たす.

この定理から直ちに以下を得る．

系 3.6.4 (一般のベクトル場の「ポテンシャル」) 任意のベクトル $\boldsymbol{F}$ は，適当なスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}) + \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.9}$$

と表すことができる．

定理 3.6.3 を仮定した系 3.6.4 の証明

定理 3.6.3 でみつかった $\boldsymbol{E}$ をスカラーポテンシャルで $\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\,\phi$ と，また $\boldsymbol{B}$ をベクトルポテンシャルで $\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ と表せばすぐに出る． □

定理 3.6.3 の証明はそう簡単ではない．少し発見法的にやってみよう．定理の主張のように分解できるとすると，

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{div}\,\boldsymbol{F}, \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0} \tag{3.6.10}$$

および

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}, \qquad \mathbf{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{3.6.11}$$

が成り立つはずである．ここで $\mathbf{div}\,\boldsymbol{F}$ と $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ から決まっている量だから，右辺が与えられたとして，左辺の $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ を決めればよいわけだ．つまり問題は，以下の質問の答えを見つけることに帰着する．この質問とその答えはそれなりにヤヤコシイので，以下の小節で行うことにした． □

3.6.1 ベクトルの逆問題

上で必要になったのは，以下のような問題である．

Q 1：与えられたスカラー場 $\psi(\boldsymbol{r})$ に対して,

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \psi(\boldsymbol{r}), \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{0} \tag{3.6.12}$$

を満たすようなベクトル場 $\boldsymbol{E}$ を決定せよ.

Q 2：与えられたベクトル場 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})$ に対して,

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.13}$$

を満たすようなベクトル場 $\boldsymbol{B}$ を決定せよ.

以下，この問の答えを発見法的に求め，最後に定理の形でまとめよう.

Q 1 から行く．$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$ だから，何かのポテンシャル ϕ でもって，$\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\,\phi$ と書けているはず．従って，この ϕ をまず求め，それから $\boldsymbol{E}$ を求めることにしよう.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.14}$$

の両辺の $\mathbf{div}$ をとると,

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \mathbf{div}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.15}$$

となる．ここで出てきた $\mathbf{div}\,\mathbf{grad}$ と言うのはラプラシアンと呼ばれるもので，デカルト座標では

$$\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\phi(x,y,z) = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\,\phi(x,y,z) \equiv \Delta\,\phi(x,y,z) \tag{3.6.16}$$

となっている．ということで，スカラーポテンシャル ϕ は,（もし存在するなら）

$$\Delta\phi(x,y,z) = -\psi(x,y,z) \tag{3.6.17}$$

を満たすべし，と言うことがわかる．逆に，これさえ満たしている ϕ から作った $\boldsymbol{E}$ は題意を満たしていることはすぐにわかるので，問題は (3.6.17) を満たす ϕ を求めることに帰着された.

さてさて，(3.6.17) は Poisson の方程式と言われるもので,（普通に性質の良い）$\psi(\boldsymbol{r})$ に対しては，その解が存在することが知られている．実際,

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\psi(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}|}dv(\boldsymbol{q}) \tag{3.6.18}$$

と定義された $\psi(\boldsymbol{r})$ が (3.6.17) を満たすことは少し頑張れば確かめられる[6]．（ここで，$dv(\boldsymbol{q})$ は，$\boldsymbol{q}$ の 3 つの成分による，単なる 3 重積分を表す）．従って，このような ϕ を持ってきて $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r})$ を作ると，問題の答えが得られるわけだ.

Q 2 も同様に考える．今度は $\boldsymbol{B}$ を与えるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ があるはずである：

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.19}$$

この両辺の $\mathbf{rot}$ をとると,

$$\mathbf{rot}\,\big(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\big) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.20}$$

が得られる．つまり，$\boldsymbol{A}$ は上の方程式の解である必要があるし，逆にこれで十分であることはすぐにわかるだろう.

さて，問題は (3.6.20) はあるのか，あるとしたら何なのかということだが，これについては $\mathbf{rot}$ についての恒等式

$$\mathbf{rot}\,\big(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\big) = \Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) - \mathbf{grad}\,\big(\mathbf{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\big) \tag{3.6.21}$$

---

[6]興味のある人への注：電磁気の講義などで聴いたかもしれないが，ここでは $\Delta_{\boldsymbol{q}}\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}|} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q})$ の関係に注目するとよい．ここで $\Delta_{\boldsymbol{q}}$ は，$\boldsymbol{q}$ に関するラプラシアンを表す．また，ここでは無限の広さの 3 次元空間で考えているが，有限の領域であっても本質的には同じ事である.

を用いることにする．このままではこいつは扱いにくいが，今は条件を満たすベクトルポテンシャルを少なくとも一つ求めればよいのだから，

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad (\text{すべての } \boldsymbol{r} \text{ で}) \tag{3.6.22}$$

を要求してしまうことにする．すると，$\boldsymbol{A}$ の満たすべき条件は

$$\Delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.23}$$

となる．これは両辺にベクトルが出ているが，その成分ごとに見ると (3.6.17) と同じ形をしていることがわかるだろう．従って，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}|}dv(\boldsymbol{q}) \tag{3.6.24}$$

ととれば良いことがわかる．

これで一応，Q 1，Q 2 への答えを得たのだが，これらの答えが一意的かどうかにはあまり触れなかった．ポテンシャルから調べていっても良いが，以下のようにベクトルを直接扱うのが簡単である．Q 1 の答えになる $\boldsymbol{E}$ が 2 通りあったとして，それらを $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ と書こう．これらは

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{E}_i = \psi, \qquad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}_i = \mathbf{0} \qquad (i=1,2) \tag{3.6.25}$$

を満たしているから，$i=1,2$ の対応する式を引き算すると，

$$\mathbf{div}\,\tilde{\boldsymbol{E}} = 0, \qquad \mathbf{rot}\,\tilde{\boldsymbol{E}} = \mathbf{0} \tag{3.6.26}$$

が得られる（$\tilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2$）．ここで第 2 の式は，$\tilde{\boldsymbol{E}}$ が rotation-free であると主張しているから，適当なスカラーポテンシャル $\tilde{\phi}$ を用いて

$$\tilde{E} = \mathbf{grad}\,\tilde{\phi} \tag{3.6.27}$$

と書けるはずだ．これを第一の式に入れると

$$\Delta\tilde{\phi} = \mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\tilde{\phi} = 0 \tag{3.6.28}$$

が得られる．これが $\tilde{\phi}$ の満たすべき必要条件である．逆に，$\boldsymbol{E}$ が (3.6.12) を満たし，かつ $\tilde{\phi}$ が (3.6.28) を満たすときに， $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \mathbf{grad}\,\tilde{\phi}$ も (3.6.12) を満たすことがわかる．つまり，このような $\tilde{\phi}$ は十分でもあるのだ．

つまり，結論として，$\boldsymbol{E}$ は，いたるところで $\Delta\tilde{\phi} = 0$ なるスカラー関数 $\tilde{\phi}$ を用いて $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \mathbf{grad}\,\tilde{\phi}$ とおきかえても構わない自由度を持っていることがわかる．

Q 2 の方も同様に，もし $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ が共に条件を満たしていれば，$\tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2$ は

$$\mathbf{div}\,\tilde{\boldsymbol{B}} = 0, \qquad \mathbf{rot}\,\tilde{\boldsymbol{B}} = \mathbf{0} \tag{3.6.29}$$

を満たすことがわかるが，これは (3.6.26) と同じ形であるから，同じ結論になる．

以上をまとめると以下の命題になる．

命題 3.6.5 Q 1 に対する答えは，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{grad}\,\phi(\boldsymbol{r}) + \mathbf{grad}\,\tilde{\phi}, \qquad \phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\psi(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}|}dv(\boldsymbol{q}) \tag{3.6.30}$$

で与えられる．また，Q 2 の答えは，

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \mathbf{grad}\,\tilde{\tilde{\phi}}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{q}|}dv(\boldsymbol{q}) \tag{3.6.31}$$

で与えられる．ここで $\tilde{\phi}, \tilde{\tilde{\phi}}$ は

$$\Delta\tilde{\phi} = 0, \qquad \Delta\tilde{\tilde{\phi}} = 0 \qquad (\text{すべての点で}) \tag{3.6.32}$$

を満たす任意の関数である．

3.6.2 おまけ：Poisson 方程式の解の一意性

上の問題と関連して，またガウスの定理（グリーンの定理）の応用例として，Poisson 方程式

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r}) \tag{3.6.33}$$

の解の一意性について触れておこう．

今，上の Poisson 方程式を有限の領域 V で考え，その表面を ∂V と書く．∂V での ϕ の値を与えられた関数 f に固定したとき，ϕ の値は一意に決まるだろうか？(似たような問題として，無限の 3 次元領域 $\mathbb{R}^3$ を考えて，その境界付近では ϕ がゼロになるとして一意性を問うこともできる.)

この問題を考えるため，条件を満たす解が 2 通りあったとし，それらを ϕ_1, ϕ_2 とする．差を $\psi(\boldsymbol{r}) = \phi_1(\boldsymbol{r}) - \phi_2(\boldsymbol{r})$ と書くと，

$$\Delta\psi(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \text{（すべての } \boldsymbol{r} \in V \text{ で）} \tag{3.6.34}$$

かつ

$$\psi(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \text{（すべての } \boldsymbol{r} \in \partial V \text{ で）} \tag{3.6.35}$$

が満たされている．従って，このような ψ が恒等的にゼロであることを言えばよい．

ここでガウスの定理（または Green の第一定理）が登場する．Green の第一定理は

$$\int_V \Bigl(\psi\Delta\psi + (\nabla\psi)^2\Bigr)\, dxdydz = \int_{\partial V} \psi\nabla\psi \cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.6.36}$$

である．しかし，この右辺は境界で $\psi = 0$ 故にゼロ．また左辺の第一項もゼロ．従って，

$$\int_V (\nabla\psi)^2\, dxdydz = 0 \tag{3.6.37}$$

なのだ．でも，この非積分関数は非負だ．それを積分してゼロならば，非積分関数そのものがゼロと言うことになる．つまり，

$$\nabla\psi = 0 \qquad \text{（}V\text{ の中全部で）} \tag{3.6.38}$$

従って，ψ は V の中全部で一定の値をとるが，表面でゼロなんだから，内部でもゼロしかない． □

７月１３日：今日のプリントは期末テストについての注意などです．講義に間に合わなかったので，部屋の前に置いておきます．

- 期末テストは教務課の指示通りの時間に行う．僕の理解によれば，日は７月２７日（火曜日）．時間はS-II-19クラスが３限，物理学科は４限（要するに２週間後のいつもの講義時間）のはずだが，必ず確認されたし．
- 試験の場所は僕は知らされていない．いつもと異なる場所の可能性も高いらしいので，注意して下され．
- 試験範囲は「重積分，線積分，面積分」と「ベクトル解析の初歩」です．ただし，中間試験の範囲でもあった「重積分，線積分，面積分」がメインになります．単位が危ない人は,「重積分」を完璧に,「線積分」をその次に... とやっていくのが良いでしょう．
- 中間試験での皆さんの苦戦ぶりを考え．図形的な部分（与えられた曲線をどう表すか）だけで討ち死にしないような問題も入れます．
- 「七大戦」（？）で期末試験を受けられない人は事前に申し出た上で試験が受けられるようにします．日時は８月３日（期末から一週間後）の３限（S-II-19）と４限（物理学科）の予定（日時については相談に応じます）．場所は未定ですが，上の時間に僕のオフィス近辺に来てくれればわかるでしょう．
- 答案の返却や確認について：講義中から何度も言っているように，答案を確認するのは学生さんの権利ですから，返却できるような時間を設定します．現在,

  S-II-19 クラスは，７月３０日（金）の正午〜午後１時

  に返却することを考えていますが，採点に手間取ったら返せないかもしれません.（物理学科もこの時間に返せるように努力はしますが，進学条件の厳しさなどから，S-II-19 を優先すべきだと思います.）これ以外の返却可な日時については，web page でも情報を公開します.
- なお，上の時間に答案を取りに来れない人や，上のような返却方法を好まない人などには
  - 「学生番号の下４桁と点数のみ」を掲示する
  - e-mail address を教えてくれれば，そのアドレスに僕からメイルを送る

  などの方法で対応する予定です．期末テストの答案用紙に希望をとる欄を設けるつもりですから，よろしく．