**中間テスト（6/22）の解答編（物理学科, 2004.7.3）**

得点分布は以下の通り：

| 0〜9 | 10〜19 | 20〜29 | 30〜39 | 40〜49 | 50〜59 | 60〜69 | 70〜79 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 11 | 19 | 6 |

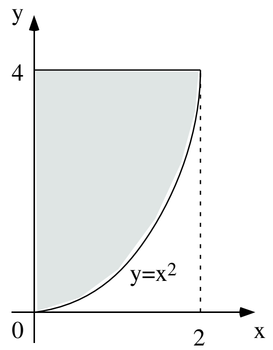
全体的な講評：正直、思ったよりも悪かった．ただ，これはこの講義科目の題材での弱点もあるが，以下に述べるような，僕の予想外の弱点のせいでもある．

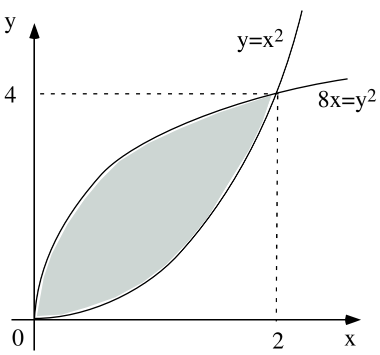
- 予想よりも時間が足りなかったようだ．以下の弱点は時間不足だから見えたということもあったかもしれない．ただ，この時間不足は（高校までの）基本的な計算練習が足りないためのようにも思える．この意味で,「この講義ではそれほどのスピードは要求しない」ものの，もう少し速く計算できるようになった方が良いと思う．
- （余談）昨今,「計算ミスよりも考え方が大事」「計算スピードも必要ない」というような風潮があるようだ．これらは一理はあるが，過信すると危険である．人間に無限の時間と無限の気力が備わっているなら，それでもよいだろう．しかし現実には時間も気力も有限であり，その限られた中で成果を挙げることが求められる．そうした場合，計算ミスのせいでみすみす成果を逃したり，計算スピードがあまりに遅いために完成する前に気力が萎えてしまったり，ということが起こりうるわけだよ．
- 計算間違いが非常に多い． $(2-y^2)^2$ を $4-2y^2+y^4$ としてしまう．１次元積分の上下が逆になっても積分値の符号が反転しない．$2^4-1$ を 3 にしてしまう．ひとによっては $\sin, \cos$ の積分がほとんどできない，など．単なる計算ミスや基礎的技能の問題ではあるが，あとあとの実生活では命取りになるかもしれないから，細心の注意を払って欲しい.（こういう事は，いざというときだけ注意を払おうとしてもダメで，日頃からの「どのようにしたら注意を有効に払えるのか」の訓練が大切.）
- 上とも関連するが，すぐにできるはずのチェックを怠っている人が多い．例えば，正の関数を普通に積分すれば答えも正のはずだが，負の値を書いてどうどうとしている，など．計算はやりっ放しでなく，いろいろなところでチェックするように気をつけよう．
- 図形に関する弱点も目立つ．今回の問題ではいろいろなところで,「どんな曲線・曲面か」「どんな積分領域か」が出来ていない人が見受けられた．
- また，曲線や曲面を表す一応の数式が作れても，パラメーターの範囲が間違っていたり，向きがおかしかったりする人が散見された．

期末テストでは以上のような弱点にある程度配慮した出題をする予定であるが，保証の限りではない．なお，以下の解答集は，体力的に限界の中で作ったので，ショウモナイタイプミスなどがあるかもしれない．おかしいと思ったら鵜呑みにせず，質問などすることをお願いしたい．

## 問１：

答えだけね．積分範囲は下の図のようになる．




従って，積分の順序を入れ替えると，a) は

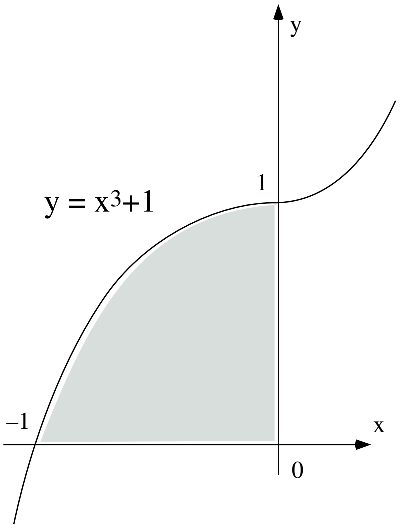
$$\int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} dx\, f(x,y) = \int_0^2 dx \int_{x^2}^4 dy\, f(x,y)$$

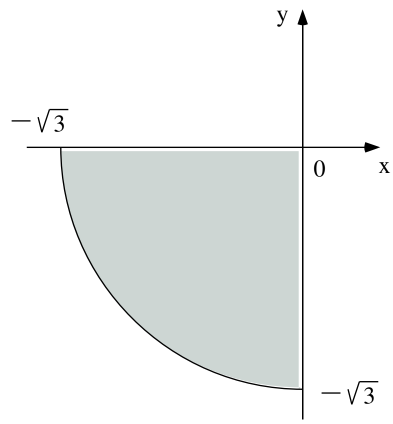
b) は

$$\int_0^2 dx \int_{x^2}^{\sqrt{8x}} dy\, f(x,y) = \int_0^4 dy \int_{y^2/8}^{\sqrt{y}} dx\, f(x,y)$$

## 問２：

答えだけね．積分範囲は下の図のようになる．




従って，積分は，a) なら，

$$\int_{-1}^{0} dx \int_0^{x^3+1} (2y+x) = \int_{-1}^{0} dx \Big[y^2 + xy\Big]_0^{x^3+1} = \frac{12}{35}$$

b) なら

$$\int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{0} dy\, xy = \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \Big[\frac{xy^2}{2}\Big]_{-\sqrt{3-x^2}}^{0} = \frac{-1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{0} dx\, x\,(3-x^2) = \frac{9}{8}$$

などとなる． b) には極座標 $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$ を使っても良い，ただし，その場合，

- ヤコビアン $r$ を忘れない，
- 積分範囲は，$0 \le r \le \sqrt{3}$ かつ，$\pi \le \phi \le \frac{3\pi}{2}$ である，

ことに注意する．

## 問３：

まずは $u, v$ の範囲を考える．まず実数の $x$ が定義できるために，$u \ge v$ が必要十分である．次に，$x = \sqrt{u-v}, y = u+v$ を問題の条件 $x^2 \le y \le \pi - x^2$ へ代入すると $u - v \le u + v \le \pi + v - u$ となる．これを整理すると $v \ge 0$ と $2u \le \pi$ が得られる．つまり，$u, v$ の必要十分条件は

$$0 \le v \le u \le \frac{\pi}{2}$$

である．$uv$ 平面での積分領域は上の三角形だ（しんどくなってきたので，図は略）．

積分を行うには，まずヤコビアンを求める：

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(u-v)^{-1/2} & -\frac{1}{2}(u-v)^{-1/2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (u-v)^{-1/2}.$$

従って，$u, v$ での積分は（ヤコビアンの部分は非積分関数の一部とキャンセルする）

$$\int_0^{\pi/2} du \int_0^{v} dv\, 2u\, \sin(2u)\, \cos(2v) = \int_0^{\pi/2} du\, u \sin^2(2u) = \frac{\pi^2}{16}.$$

**気づいたこと：**

- ヤコビアンをちゃんと計算したのに，最後の積分の表式からはヤコビアンが抜け落ちた（そのため，計算できなくなった）人が十人近くいたようだ．何のためにヤコビアンを計算したのよ??
- 偏微分がアヤシイ人，行列式の計算がアヤシイ人もいたぞ...

**問 4：**

やるだけなのだが，かなりの人が曲線をうまく表せずに苦労していた．また，向きを間違った人も多かった．

a) 曲線は $x = 2\cos\phi, y = 2\sin\phi$ で，$\phi$ は $\frac{3}{2}\pi$ から $\pi$ へ動く．また，

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2\cos\phi \\ 2\sin\phi \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} -2\sin\phi \\ 2\cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} 4\sin\phi \\ 2\cos\phi \end{pmatrix}$$

である．従って，線積分は

$$\int_{3\pi/2}^{\pi} (-8\sin^2\phi + 4\cos^2\phi)d\phi = \int_{3\pi/2}^{\pi} (-2 + 6\cos 2\phi)d\phi = \pi.$$

b) テスト中に訂正したとおり，もとの問題にはミスプリがありました．正しい曲線の式は $2x - y^2 + 4 = 0$ です（最初の + がマイナスであるべし）．曲線などは

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -2 + \frac{y^2}{2} \\ y \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} 2y \\ -2 + \frac{y^2}{2} \end{pmatrix}$$

となる（$y$ は $-2$ から 0 へ動く）．従って積分は

$$\int_{-2}^{0} (\frac{5}{2}y^2 - 2)dy = \frac{8}{3}$$

である．

**気づいたこと：**

- 曲線を表すパラメーターの範囲と向きを間違った人が多かった．
- かなりの人が曲線の図を描いていたが，曲線と $x, y$-軸の間を塗りつぶしている人が散見された．今は重積分じゃないんだから... 自分が何をやってるか自覚してるのか，心配になってきたなあ...

**問 5：** 何通りかの方法を示す．でもその前に，この曲面は $z = -9 + x^2$ を $z$-軸のまわりに回転したものだと言うことは押さえておこう．曲面のイメージが描けなかった人が多かったようだね．

方法１：$x, y$ をパラメーターとする．$z = x^2 + y^2 - 9$ なので，

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 + y^2 - 9 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

と計算できる．最後のベクトルは正しい向き（$z$-軸の正の向き）を向いている．従って，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} = -3 \qquad \cdots \quad a)$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} = -2x^2 - 2y^2 + 2z = -18 \qquad \cdots \quad b)$$

となる．後はこれらを $x^2+y^2 \le 9$ の円内で積分すればよい．答えは

$$a) \quad \iint_{x^2+y^2\le 9} (-3)\, dxdy = -27\pi, \qquad b) \quad \iint_{x^2+y^2\le 9} (-18)\, dxdy = -162\pi$$

である．

方法２：積分領域，被積分関数ともに $z$ 軸を中心に回転対称だから，$x, y$ を極座標にするのも良い．

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ r^2-9 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 2r \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -2r^2\cos\phi \\ -2r^2\sin\phi \\ r \end{pmatrix}$$

と計算できるので，問題ごとに $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right)$ を計算して，$0 \le r \le 3, 0 \le \phi \le 2\pi$ で積分すればよい．答えは

$$a) \quad \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi\, (-3r) = -27\pi, \qquad b) \quad \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} d\phi \left\{2r(r^2-9) - 2r^3\right\} = -162\pi.$$

方法３：方法２とほとんど同じだが，$r$ の代わりに $z$ を用いても良い．つまり，

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \sqrt{9+z}\cos\phi \\ \sqrt{9+z}\sin\phi \\ z \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{9+z}\cos\phi \\ -\sqrt{9+z}\sin\phi \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

と計算できる．この場合，$-9 \le z \le 0,\ 0 \le \phi \le 2\pi$ である．答えは

$$a) \quad \int_{-9}^0 dz \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{-3}{2} = -27\pi, \qquad b) \quad \int_{-9}^0 dz \int_0^{2\pi} d\phi \left\{-(9+z) + z\right\} = -162\pi.$$

方法４： もし $-z$ が $z^2$ ならば３次元の極座標が使える．これをヒントに，

$$z = -9\cos^2\theta, \qquad x = 3\sin\theta\cos\phi, \qquad y = 3\sin\theta\sin\phi$$

とおいても良い．この場合，$0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \phi \le 2\pi$ となる．

方法５：最後に，上のような計算をほとんどやらない方法を紹介しよう．a) の方は実は簡単だ．$\boldsymbol{F}$ の大きさも向きも一定で，かつ $-z$-軸を向いている．ということは，この回転放物面を通る流体の量は，その $xy$-平面上の底面を通る流体の量と同じ．でもこれは半径３の円上を単位面積当たり $-3$ だけ通っているから，

$$（単位面積当たり）\times（円の面積）= (-3) \times 9\pi = -27\pi$$

だ．簡単でしょ．

b) の方はそれほど簡単ではないが，面積要素を地道に作っていけば可能である（プリント作成の根性切れ）．

（注意）法線ベクトルの計算は間違いやすい．しかし，このような問題では少しはチェックすべき事がある．この問題の場合，曲面 $S$ は $z$-軸に関して軸対称だから，法線ベクトルの $x, y$-成分は $xy$-平面内での動径方向を向いているはずだ（つまり，$(x, y)$ に比例しているはず）．ここに気づけば,「$x$-成分と $y$-成分で符号が違う」などの計算ミスは防げたはずである．また，同様に，曲面のイメージが描けておれば，$x, y$-成分と $z$-成分の符号が逆であるべきこともわかっただろう．

（おまけ）先週にやったガウスの定理を使うと，b) は以下のようにも計算できる．問題の曲面と $xy$-平面で囲まれた３次元領域を $V$ とする．$\boldsymbol{G}$ は $xy$-平面上でゼロだから，問題の面積分は $V$ の表面全体で $\boldsymbol{G}$ を面積分したものと同じである．これはガウスの定理により

$$-\int_{\partial V} \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{S} = -\int_V \mathbf{div}\, \boldsymbol{G} dxdydz = -\int_{x^2+y^2-9 \le z \le 0} 4dxdydz$$

となおせる（全体にマイナスがついているのは，面積分の法線ベクトルが $V$ の内側を向いているから）．後はこの３重積分を計算すればよい．

## 問６：

まあ，これは完答できないだろうとは思ってました．

a, b) 積分領域が球対称だから極座標を用いると（ヤコビアン忘れない！）

$$\iiint_A \frac{1}{(\epsilon+x^2+y^2+z^2)^\alpha}dxdydz = \int_0^1 dr\, r^2 \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{1}{(\epsilon+r^2)^\alpha} = 4\pi\int_0^1 \frac{r^2}{(\epsilon+r^2)^\alpha}\, dr$$

と変形できる．後はこの一次元積分のふるまいを調べればよい．

まず，当たりをつけるためにええ加減に考えると，$\epsilon=0$ では積分は

$$\int_0^1 r^{2-2\alpha}dr = \left[\frac{r^{3-2\alpha}}{3-2\alpha}\right]_0^1$$

となるから，$3-2\alpha\le 0$ なら $r=0$ の付近がヤバそうだと思われる．逆に，$3-2\alpha>0$ なら，問題なく積分が収束するだろう．(なぜ,「だろう」などと書いているかというと，被積分関数が $r=0$ で無限大になったりするので，ここは「広義積分」の意味で解釈すべきだから．ただし，この問題は広義積分の考えを陽に使わなくても解ける.)

上の考えを正当化するには，以下のように議論するのが一つの方法である．これはちょっと見るとややこしく映るかもしれないが，被積分関数の大きさに注目した，素朴な方法である．以下では $0<\epsilon\ll 1$ としておく．

この積分が正確に計算できれば問題はないが，それはちょっと難しい．その主な原因は分母に $r^2$ と $\epsilon$ という 2 つの項があるからだ．そこでこのどちらの項が大きいかによって積分区間を $r^2=\epsilon$ で分けて考える．

まず，$r^2<\epsilon$ の範囲では，$r^2$ よりも $\epsilon$ の方が大きいから，$r^2$ を $\epsilon$ で代用しても，それほどの誤差は生じないだろう．より厳密には不等式を用いて以下のように議論する：分母は

$$\epsilon \le \epsilon + r^2 \le 2\epsilon$$

を満たしているので，ここでの積分は（$\alpha>0$ に注意して）

$$\begin{aligned}\int_{r^2<\epsilon}\frac{r^2}{(\epsilon+r^2)^\alpha}\,dr &\le \int_{r^2<\epsilon}\frac{r^2}{\epsilon^\alpha}\,dr = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{\epsilon}^3}{\epsilon^\alpha} = \frac{1}{3}\epsilon^{3/2-\alpha}\\ &\ge \int_{r^2<\epsilon}\frac{r^2}{(2\epsilon)^\alpha}\,dr = \frac{1}{2^\alpha 3}\frac{\sqrt{\epsilon}^3}{\epsilon^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha 3}\epsilon^{3/2-\alpha}\end{aligned}$$

と，上下から押さえられる．

次に，$r^2>\epsilon$ では $r^2$ で $\epsilon$ を置き換えてもそれほど損はないだろう．不等式を用いた厳密な議論は：

$$r^2 \le \epsilon + r^2 \le 2r^2$$

なので，

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon<r^2<1}\frac{r^2}{(\epsilon+r^2)^\alpha}\,dr &\le \int_{\epsilon<r^2<1}\frac{r^2}{(r^2)^\alpha}\,dr = \int_{\epsilon<r^2<1} r^{2-2\alpha}\,dr\\ &\ge \int_{\epsilon<r^2<1}\frac{r^2}{(2r^2)^\alpha}\,dr = 2^{-\alpha}\int_{\epsilon<r^2<1} r^{2-2\alpha}\,dr\end{aligned}$$

となる．最後の積分は

$$\int_{\epsilon<r^2<1} r^{2-2\alpha}\,dr = \begin{cases}\frac{1}{3-2\alpha}\left(1-\epsilon^{3/2-\alpha}\right) & (\alpha\ne 3/2)\\ -\log\epsilon & (\alpha=3/2)\end{cases}$$

となっている．

従って，この 2 つ部分での積分を合わせると，積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{r^2}{(\epsilon+r^2)^\alpha}\,dr$ は

$$\epsilon<\frac{3}{2}\text{ で収束,}\quad \epsilon\ge\frac{3}{2}\text{ で発散}$$

とわかる．したがって，a) の答えは $\alpha<\frac{3}{2}$ である．

また，上で求めた発散の主要部分は

$$\begin{cases} \epsilon^{3/2-\alpha} & (\alpha > 3/2) \\ \left|\log\epsilon\right| & (\alpha = 3/2) \end{cases}$$

となる．これが b) のこたえ．

c) 今度は極座標にすらなおせないけども，以下のことに気づけば c) は簡単なのだ．$A, B$ の定義とその形から，集合の包含関係として

$$A \subset B$$

が成り立っている．被積分関数は正だから，積分の値について

$$\iiint_A \frac{1}{(\epsilon+x^2+y^2+z^2)^\alpha}\,dxdydz \le \iiint_B \frac{1}{(\epsilon+x^2+y^2+z^2)^\alpha}\,dxdydz$$

が成り立つ．つまり，$A$ での積分が発散するような $\alpha$ では $B$ での積分も発散するわけだ．

本来， c) に答えるには逆向きの不等式も必要だ．でもそこまで頑張る必要はない．というのは，この問題では積分の収束・発散だけを気にしているわけで，$B, A$ での積分の差はいつも有限だからだ．実際，

$$\iiint_B \frac{dxdydz}{(\epsilon+x^2+y^2+z^2)^\alpha} - \iiint_A \frac{dxdydz}{(\epsilon+x^2+y^2+z^2)^\alpha} = \iiint_{B\setminus A} \frac{dxdydz}{(\epsilon+x^2+y^2+z^2)^\alpha}$$

であるけども，$B\setminus A$ においては $1 \le x^2+y^2+z^2$ であるために被積分関数は

$$\frac{1}{(\epsilon+x^2+y^2+z^2)^\alpha} \le \frac{1}{(\epsilon+1)^\alpha} \le 1$$

を満たす．従って，積分の値自身は

$$\iiint_{B\setminus A} \frac{dxdydz}{(\epsilon+x^2+y^2+z^2)^\alpha} \le \iiint_{B\setminus A} 1\,dxdydz \le (B\setminus A \text{ の体積}) \le 2^3 = 8$$

である.（最後のところでは $B\setminus A$ の体積を $B$ の体積で押さえた.）

つまり，

$$(\,A \text{ での積分}) \le (\,B \text{ での積分}) \le (\,A \text{ での積分}) + 8$$

というわけだ．このように，$A, B$ での積分の差は高々 8 だから，積分の収束・発散は $A$ でも $B$ でも全く変わりはない．従って，c) の答えは「$A$ での積分と全く同じである」ということになる．

（以上，c) は大変であるが，テストでは「$A$ と $B$ は似たふるまいをする」ことが何となく書いてあったら良しとするつもりだった．でも，そのようなことを書いた人はほとんどいなかった...）

なお，このような問題では $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ での被積分関数の発散が問題になっているので，変数変換をやってみるのも一法である．つまり，

$$\boldsymbol{r} = \sqrt{\epsilon}\,\boldsymbol{r}'$$

となっている $\boldsymbol{r}'$ を用いる．