線形代数学 II：中間テスト解答例と講評（原，2004.1.7）

全体の講評：

平均すれば大体，予想通りの出来でした．

問１はかなり良くできてました（特に，f はほぼ全員）．しかしその一方で,「像空間」の定義がわかっていない人や，不定形の連立方程式がきちんと解けない人がいたのも事実です．

問２は f^4 を求めるのに表現行列のかけ算をやるのは効率が悪かったのですが，かなりの人が強引に計算して途中で死んでましたね．まあ，どこで死んだかによってかなりの部分点をあげました．

問３はいつもと「逆」向きの訊き方だったのでかなりの人がとまどうだろう事は織り込み済み．完全解答は難しいだろうとは思っていましたが，数人の人はほとんど完答しており，大変良かったと思います．ただし，多くの人が表現行列の「例」だけを与えていたのは残念 —- 中には一般形が難しいので例を与えた人もいたとは思いますが.

個々の問題について：

問１：線形写像の基本的な定義がわかっているかを訊く，何の捻りもない問題です．以前のレポート問題とほとんど同じなので，簡単に行きます.

$\boxed{f \text{ の方}}$

ともかく，ガンガン解く．核空間の方は f の定義に出ている右辺＝0，の方程式を解けば求まる．右辺の係数行列は階段型になっているから簡単に解けて（下の行から順に解いていけばよい），

$$z = w, \qquad y = -3w, \qquad x = 0 \tag{1}$$

となる（z は任意）．つまり，核空間の任意の元は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad t \text{ は任意} \tag{2}$$

となる．従って，核空間の次元は1，基底の一つは $\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ で，核空間そのものは $\left\{ t \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$ である． $\boxed{\text{核空間と核空間の基底を区別すること．今回は非常に甘く採点したが，期末ではわからんぞ！}}$

像空間の次元は，核空間の次元が１ゆえ，３であると予想される．つまり，像空間は右辺に出ている４つのベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

で張られるが，このうちの３つが線形独立のはずだ．0の入り方を見ると，４つのうちのどの３つをとっても一次独立だとわかる．また，第４成分がゼロだから，核空間の次元は３以下であることもわかる．よって，確かに像空間の次元は３である．基底の例として，以下に３つ挙げておく．

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \tag{4}$$

$\boxed{g\text{ の方}}$

やることは f と同じであるが，計算がちと厄介．まあ，頑張って解いてください．結果を書くと，核空間の次元は 2，その基底は

$$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-5\\-3\\2\\0\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-3\\-1\\0\\2\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-2\\0\\-1\\3\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\2\\-3\\5\\1\end{bmatrix}\ \text{のうちの任意の 2 つ，例えば}\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\-3\\2\\0\\1\end{bmatrix}\right\rangle \tag{5}$$

など．像空間の次元は 3，その基底は

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}2\\1\\1\\2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\1\\-2\\-2\end{bmatrix},\ \text{のうちの任意の 3 つ，例えば}\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\1\\2\end{bmatrix}\right\rangle \tag{6}$$

などです.（g を張るはずの 5 つのベクトルはそのうちの任意の 3 つが独立になっているので，像空間の基底としてはどの 3 つをとっても宜しい.）もちろん，これらの線形結合で独立な 3 つのベクトルを作っても良い．

問 2：表現行列を求めること，および線形写像を何回もやったり，その逆を求めたり，の基本的問題です．講義でも強調したように,「線形性」は非常に大事な概念なので，線形性をうまく使うと簡単に解けるように (2), (3) を設問しました．

(1) 標準基底に関する表現行列は，$f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3), f(\boldsymbol{e}_4)$ を横に並べれば良い（ここでなぜか縦横逆に覚えていた人がいたぞ！）．

$f(\boldsymbol{e}_1)$ などは f の線形性を用いて計算する．そのためには $\boldsymbol{e}_i$ を $\boldsymbol{a}_j$ の線形結合で書く必要がある．良く睨むと，$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_3$，くらいが見えてくる．その後は $\boldsymbol{e}_4 = 2\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4$ とわかる．これを用いて

$$f(\boldsymbol{e}_1) = f(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1) = f(\boldsymbol{a}_2) - f(\boldsymbol{a}_1) = 2\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{7}$$

などと計算する．他も同様に

$$f(\boldsymbol{e}_2) = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix}1\\2\\-2\\0\end{bmatrix},\quad f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix},\quad f(\boldsymbol{e}_4) = -\boldsymbol{a}_2 - 4\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix}-1\\-4\\2\\1\end{bmatrix} \tag{8}$$

となるので，表現行列は

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & -1\\0 & 2 & 2 & -4\\0 & -2 & 0 & 2\\1 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \qquad \Big(\equiv A\Big) \tag{9}$$

となる．

(2) 簡単のため，$f(f(f(f(\boldsymbol{x}))))$ を $f^4(\boldsymbol{x})$ と書く．

（解法１）f を４回行うことは，その表現行列 A を４回かけることと同じであるから，遮二無二計算して

$$f^4(\boldsymbol{x}) = A^4\,\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{10}$$

と求められる（A^4 を計算する場合，まず A^2 を計算し，その結果から $A^2 \times A^2$ とするのが少しは楽だろう）．実は A^4 の形から，どんなベクトルでもその各成分が４倍されることがわかる．これは以下の解法２からも明らか.

（解法２）$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ は $\mathbb{R}^4$ の基底をなしているから，$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_4$ の線形結合で表して，そこに f を４回作用させれば良い．$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4$ であると，f^4 の線形性から

$$f^4(\boldsymbol{x}) = f^4(x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4) = x_1 f^4(\boldsymbol{a}_1) + x_2 f^4(\boldsymbol{a}_2) + x_3 f^4(\boldsymbol{a}_3) + x_4 f^4(\boldsymbol{a}_4) \tag{11}$$

となるので，$f^4(\boldsymbol{a}_i)$ を求めれば良いのだ．ところが，f の定義から，

$$f^4(\boldsymbol{a}_1) = f^3(\boldsymbol{a}_2) = f^2(2\boldsymbol{a}_3) = 2f^2(\boldsymbol{a}_3) = 2f(-2\boldsymbol{a}_4) = -4f(\boldsymbol{a}_4) = 4\boldsymbol{a}_1 \tag{12}$$

となる．他の $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ についても結果は同じで，$f^4(\boldsymbol{a}_i) = 4\boldsymbol{a}_i$ （$i = 1, 2, 3, 4$）が成り立つ．これは f の定義をよく見ると明らかだ：f を一回やる毎に $\boldsymbol{a}_i$ の添え字が一つずれて，かつ何かの係数がかかっていくのだが，４回やると丁度一周するので，右辺の係数（$1, 2, -2, -1$）の積（4）がかかることになるのだ．従って，(11) から

$$f^4(\boldsymbol{x}) = 4\left(x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4\right) = 4\boldsymbol{x} \tag{13}$$

がすべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ について成り立つ，とわかる．

なお，上のように解くと必要ではないが，問題の $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_i$ の線形結合で書くと，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$ になっている．

(3) （解法１）f^{-1} の表現行列は A の逆行列であるから，

$$\boldsymbol{y} = f^{-1}(\boldsymbol{x}) = A^{-1}\,\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

となる．

（解法２）$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{a}_1 + y_2\boldsymbol{a}_2 + y_3\boldsymbol{a}_3 + y_4\boldsymbol{a}_4$ であるとして，係数 y_i を決めてやろう．

$$f(\boldsymbol{y}) = y_1 f(\boldsymbol{a}_1) + y_2 f(\boldsymbol{a}_2) + y_3 f(\boldsymbol{a}_3) + y_4 f(\boldsymbol{a}_4) = y_1\boldsymbol{a}_2 + 2y_2\boldsymbol{a}_3 - 2y_3\boldsymbol{a}_4 - y_4\boldsymbol{a}_1 \tag{15}$$

であるので，これが $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$ に等しくあるべし．$\boldsymbol{a}_i$ の係数を比較して

$$y_2 = y_4 = 0, y_1 = 1, y_3 = -\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a}_1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_3 \tag{16}$$

これを計算すると，もちろん，(14) に一致する．

問３： (1) の方が簡単である（理由は以下）

(1) 記号を簡単にするため，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \tag{17}$$

と書く．表現行列は $f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)$ を並べてできる．一方，像空間は上の 3 つのベクトルで張られる．ところが，像空間の基底は $\boldsymbol{b}_1$ であるから，$f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)$ のどれもが，$\boldsymbol{b}_1$ の定数倍である必要がある．つまり，表現行列は（x, y, z を未知数として）

$$[x\boldsymbol{b}_1, y\boldsymbol{b}_1, z\boldsymbol{b}_1] \tag{18}$$

の形になっているはずだ．係数 x, y, z は核空間が与えられたものになる条件から決まる．ともかく，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ のどちらを f で送ってもゼロになる必要があるから，上の行列とこれらのベクトルがゼロになる条件を書き下すと

$$x + z = 0,\ -2x + y = 0 \qquad \Longrightarrow \quad z = -x, y = 2x \tag{19}$$

となり，表現行列の形が

$$[x\boldsymbol{b}_1, 2x\boldsymbol{b}_1, -x\boldsymbol{b}_1] = x \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\1 & 2 & -1\\1 & 2 & -1\end{bmatrix} \tag{20}$$

と決まる（ここまでは必要条件で攻めてきた）．x についての条件を考えるために，実際に像空間，核空間が題意の通りになるかを考えると，$x \neq 0$ なら十分とわかる．従って，最終的な答えは「(20) の形で，x はゼロでない任意の定数」となる．

(2) こっちも同様に解けばよいが，今度は像空間が 2 次元なので厄介だ．(1) とは関係なく，

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \tag{21}$$

と書くことにする．すると，$f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), f(\boldsymbol{e}_3)$ のそれぞれが $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ の線形結合であるので，表現行列は

$$[x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2, y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2, z_1\boldsymbol{b}_1 + z_2\boldsymbol{b}_2] \tag{22}$$

の形だとわかる（必要条件）．更に，$\boldsymbol{a}_1$ に作用させたらゼロベクトルになる条件を課すと

$$x_2 - y_2 = 0,\ (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 0 \qquad \Longrightarrow \quad y_1 = x_1,\ y_2 = x_2,\ (z_1, z_2 \text{ は任意}) \tag{23}$$

となる．従って，必要条件として

$$\begin{bmatrix}x_2 & x_2 & z_2\\ x_1 + x_2 & x_1 + x_2 & z_1 + z_2\\ x_1 + x_2 & x_1 + x_2 & z_1 + z_2\end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix}a & a & c\\ b & b & d\\ b & b & d\end{bmatrix} \tag{24}$$

の形が得られる（a, b, c, d は大体任意の定数）．後は実際に題意を満たすかどうかを判断する必要があり，その過程で a, b, c, d についての「ゼロでない」条件がついてくる．その条件は主に核空間の方から来て，

$$\left(a^2 + b^2 \neq 0,\ \ c^2 + d^2 \neq 0\right), \quad ad - bc \neq 0 \tag{25}$$

となるはず．最終的な表現行列は「(24) の形で，係数は (25) の条件を満たす限り任意」となる．