線形代数学 II：期末テスト解答例と講評（原，2004.2.12）

全体の講評：

平均すれば大体，予想通りの出来でした．

問１は点を稼いでもらうための問題のつもりでしたが，流石にほとんどの人ができていました．ただ，中に像空間と核空間の定義を逆にしている人などがいました．

問２もそれなりに良くできていました．ただ，小問 (1) の計算を間違ったためにその後が狂ってきた人がある程度いましたね．また，小問 (4,5) では「逆写像が存在しないのでそのような $\boldsymbol{y}$ は存在しない」とした人が非常に多かった．下で説明するようにこれは完全な誤りです．また，正しく解こうとしたなかでも,「すべての」$\boldsymbol{y}$ を求め切れていなかった例も多く見られました．これは「核空間」の役割が良くわかっていないとも言えるので，もう一度復習してください．

問３は固有ベクトルや対角化まではかなりの人が出来ていましたが，4×4 の行列式が計算できない人が２割以上いたのは気になります.（行列式の計算方法を見直すように，とはかなり言ったはず.）小問 (3) は逆行列を求める方法と，$\boldsymbol{x}$ を固有ベクトルの線形結合として書く方法があります．もちろん，どちらでやっても良いのですが，後者の方が簡単かつ間違いが少ないでしょう．大半の人が前者（逆行列）で計算して，時間をとられてしまったようです．

問４と問５は少し型破りなことを訊くことで，皆さんの理解度を確かめてみようと思い，出題しました．勿論，このような問題では「運」がつきまといますが，すべてが計算問題というより良いだろうと思ったのです．実際，苦労した解答を見ると，その人の理解の程度がかなり明らかになっているように思います．

問４では十人程度の人がある程度の正解まで到達していました（数人は完璧，またはほぼ完璧）．こちらが考えた模範解答以外のものもあり，なかなか面白かったです．問５は流石にほとんどの人が討ち死に状態でしたが，ごく少数，なかなか良い線で攻めていた人がいました．予想配点通りに採点しましたが，結果的には，問４または問５が良くできていた人は（ほとんど全員が余裕で） A の成績になっています．

大まかな採点基準：

問題用紙の予想配点（約○○点）どおりに採点しました（ただし，問５は (1) のみでも１０点）．その結果，A, B, C, D の分かれ目を

80,　60,　40

に大まかに設定しました．この分かれ目に対応させて，中間テストの持ち点を５点ずつ減らしました.（中間テストは期末より簡単だったので，うえの分かれ目では簡単すぎるとの判断.）なお，上の採点は辛めにおこなったので，上記４０点の人でも通常の採点基準では５０〜６０点になり，名大の合格基準はクリアーしていると考えます．

最終成績は学期始めの宣言通りに計算し，上の分かれ目に照らして判断しました．ただし，境界線上にいる人たちについては，期末テストの答案などを参照して，若干名を上げ下げしました．

本来の評価の分かれ目は

85,　65,　45

くらいにしたかったのですが（85 は試験中にも言及），いろいろな計算ミスや運で損をする人を出来るだけ減らす為，少し低めに境界を設定したものです．

個々の問題について：

以下の解答例のかなりの部分は TA の桐生君がうちこんでくれた $\LaTeX$file を元にしています．もちろん，最終的な責任は原にあります.

問１：

（核空間）$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{bmatrix}$ とおく.

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解くと（例えば x, y について解いてみる），

$$x = z - 2u - 3v, \quad y = -z + u - 2v$$

（z, u, v は任意）となる．したがって核空間の任意の元は

$$z \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad z, u, v \in \mathbb{C}$$

と書くことができるので，核空間の次元は 3 であり，基底の一つは $\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である.

（像空間）次元定理により，像空間の次元は 2 である．A の列ベクトルはどの 2 つをとってきてもそれらは 1 次独立であるから，例えば $\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ が像空間の基底の一つである.

問２：

(1) 順番に標準基底に関する f の表現行列を求める.

$$f(\boldsymbol{e}_1) = f(\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_1) = f(\boldsymbol{a}_3) - f(\boldsymbol{a}_1) = 2\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{0} = 2\boldsymbol{a}_3$$

$$f(\boldsymbol{e}_2) = f(\boldsymbol{a}_4 - \boldsymbol{a}_1) = f(\boldsymbol{a}_4) - f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_4 - \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}_4$$

$$f(\boldsymbol{e}_3) = f(\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_3) = f(\boldsymbol{a}_4) + 2f(\boldsymbol{a}_1) - f(\boldsymbol{a}_3) = (\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_4) + 2\boldsymbol{0} - 2\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_4 - 2\boldsymbol{a}_3$$

$$f(\boldsymbol{e}_4) = f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{0}$$

従って $(2\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_4 - 2\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{0}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ が f の表現行列である.

以下のために，$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$， $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ とおく．

(2) （核空間）$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解くと，$x = y = z = 0$ 　（w は任意）となる．従って核空間は

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{C} \right\}$$

（像空間）A の列ベクトルは一次独立なので，像空間は

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ s \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \;\middle|\; s, t, u \in \mathbb{C} \right\}$$

(3) ２通りのやり方がある．一つは表現行列を４回かけるやり方．もう一つは $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_i$ の線形結合で書いてから $f^4(\boldsymbol{a}_i)$ を計算するやり方．

（解法１）表現行列を一回ずつかけていく．

$$f(\boldsymbol{x}_1) = A\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(f(\boldsymbol{x}_1)) = f(A\boldsymbol{x}_1) = f(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$f(f(f(\boldsymbol{x}_1))) = f(\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$f(f(f(f(\boldsymbol{x}_1)))) = f(\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}) = A \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

（解法２）$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$ であることにまず注意．f が線形なので，f^4 も線形であるから，

$$f^4(\boldsymbol{x}_1) = f^4(\boldsymbol{a}_1) + f^4(\boldsymbol{a}_2) + f^4(\boldsymbol{a}_4)$$

が成り立つ．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4$ は定義をみると f の固有ベクトルであるから，

$$f^4(\boldsymbol{a}_1) = f^3(f(\boldsymbol{a}_1)) = f^3(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}, \qquad f^4(\boldsymbol{a}_4) = f^3(f(\boldsymbol{a}_4)) = f^3(\boldsymbol{a}_4) = f^2(f(\boldsymbol{a}_4)) = f^2(\boldsymbol{a}_4) = \cdots = \boldsymbol{a}_4$$

である．問題は $f^4(\boldsymbol{a}_2)$ であるが，

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{a}_2) &= \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_4, \\
f^2(\boldsymbol{a}_2) &= f(f(\boldsymbol{a}_2) = f(\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_4) = f(\boldsymbol{a}_2) + 2f(\boldsymbol{a}_4) = \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_4 + 2\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{a}_4, \\
f^3(\boldsymbol{a}_2) &= f(f^2(\boldsymbol{a}_2)) = f(\boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{a}_4) = f(\boldsymbol{a}_2) + 4f(\boldsymbol{a}_4) = \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_4 + 4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_2 + 6\boldsymbol{a}_4, \\
f^4(\boldsymbol{a}_2) &= f(f^3(\boldsymbol{a}_2)) = f(\boldsymbol{a}_2 + 6\boldsymbol{a}_4) = f(\boldsymbol{a}_2) + 6f(\boldsymbol{a}_4) = \boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_4 + 6\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_2 + 8\boldsymbol{a}_4
\end{aligned}
$$

と順次計算できるので，結局，

$$
f^4(\boldsymbol{x}_1) = f^4(\boldsymbol{a}_1) + f^4(\boldsymbol{a}_2) + f^4(\boldsymbol{a}_4) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a}_2 + 8\boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{z}_4 = \boldsymbol{a}_2 + 9\boldsymbol{a}_4
$$

を得る．これは勿論，解法１の答えに一致する．

(4) そのような $\boldsymbol{y}_1$ は存在しない．
（理由１）そのような $\boldsymbol{y}_1$ が存在するためには，$\boldsymbol{x}_1 \in \mathrm{Im}(f)$ であることが必要十分である（これはモロに像空間の定義だよ！）．こうなっているかどうかを調べるためには像空間の基底で $\boldsymbol{x}_1$ が張れるか，つまり

$$
s\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

をみたす s, t, u が存在するかを確かめればよい．しかし，そのような s, t, u は存在しない．

（理由２）上と同じであるが，以下のようにも議論できる．f の像空間は $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ で張られている．一方で (3) の解法２でも見たように $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4$ であるが，$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ が $\mathbb{C}^4$ の基底をなすことから，$\boldsymbol{a}_1$ を $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の線形結合で表すことはできない．つまり，$\boldsymbol{a}_1$ をその成分として持っている $\boldsymbol{x}_1$ は f の像空間の元ではないのだ．なお，この結論には，以下の小問 (5) の（理由２）のように議論しても到達できる．

(5)

$$
\boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, \qquad a \in \mathbb{C} \text{ は任意}
$$

が答えである．

（理由１）ともかく解いてみる方法．$\boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}$ とおいて $A\boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を解くと，

$$
\alpha_1 = \frac{3}{2},\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = 1,\ \alpha_4 \text{ は任意}
$$

が得られる．

（理由２）上と実質的にはおなじだが，少しかっこよく解く方法．$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ が $\mathbb{C}^4$ の基底をなしているので（各自チェック！），$\boldsymbol{y}_2$ が存在するなら

$$
\boldsymbol{y}_2 = \alpha\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{a}_2 + \gamma\boldsymbol{a}_3 + \delta\boldsymbol{a}_4
$$

と書けるはずであり，この係数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ を求めよう．f の線形性から

$$
f(\boldsymbol{y}_2) = f(\alpha\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{a}_2 + \gamma\boldsymbol{a}_3 + \delta\boldsymbol{a}_4) = \alpha f(\boldsymbol{a}_1) + \beta f(\boldsymbol{a}_2) + \gamma f(\boldsymbol{a}_3) + \delta f(\boldsymbol{a}_4) = \beta\boldsymbol{a}_2 + 2\gamma\boldsymbol{a}_3 + (2\beta + \delta)\boldsymbol{a}_4
$$

となるが，これが

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4$$

に等しいことが必要十分で，

$$\beta = 1,\ 2\gamma = 1,\ 2\beta + \delta = 1, \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = 1,\ \gamma = \frac{1}{2},\ \delta = -1$$

と係数が決まる（α は任意）．なお，ここの α の自由度はモロに核空間の自由度に対応していることに注意.

問３：

(1) 固有方程式 $\det(A - \alpha I_4) = 0$ を解くと，$(\alpha-2)(\alpha-3)^3 = 0$ となり，固有値は $\alpha = 2, 3$ となる（3 は 3 重根）.

$\alpha = 2$ のとき $(A - 2I_4)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を解くと，$x = 0, \quad y = z = w$ となるので，固有空間は $W_2 = \left\{ s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| s \in \mathbb{C} \right\}$. 従って $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が $\alpha = 2$ に対する固有ベクトルの一つである.

$\alpha = 3$ のとき $(A - 3I_4)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を解くと，$x = y - z + w$ となるので，固有空間は

$W_3 = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| s, t, u \in \mathbb{C} \right\}$. 従って，$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ が $\alpha = 3$ に対する 3 つの独立な固有ベクトルの例である．小問 (3) の解のために，この 3 つの固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ と書くことにする.

(2) 4×4 行列 A の 4 本の一次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が求まったので，A は $P = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を用いて対角化可能である．そして，対角化した結果は $B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ である.

(3) いろいろな方法がある.

（解法０）$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\boldsymbol{x}$ なので，これを用いて計算すると

$$A^n x \quad = \quad A^{n-1}(A\boldsymbol{x}) \quad = \quad A^{n-1}(3\boldsymbol{x}) \quad = \quad 3A^{n-1}\boldsymbol{x} \quad = \quad \ldots \quad = \quad 3^n \boldsymbol{x}$$

（お詫び）実は，こんなに簡単にするつもりはなかった（以下の解法２の言葉では固有値２に対する固有ベクトルの成分も持たせるつもりだった）のだが，問題をいじくっているうちにこうなってしまった．この意味で，この単純計算は意図したものではない．幸いな事に（？），これに気づいた人はあまり（ほとんど？）いなかったので，意図しないところで点を稼がれることはそんなになかったと思う.

（解法１）これが僕の意図していた解法です．$\boldsymbol{x}$ を (1) の最後で定義した固有ベクトルの線形結合で書いてみると，

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$$

である．従って，

$$A^n\boldsymbol{x} = A^n(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) = A^n\boldsymbol{v}_1 + A^n\boldsymbol{v}_2 + A^n\boldsymbol{v}_3$$

であるが，$\boldsymbol{v}_i$ はすべて固有値 3 の固有ベクトルだから，$A^n\boldsymbol{v}_i = 3^n\boldsymbol{v}_i$．従って，

$$A^n\boldsymbol{x} == A^n\boldsymbol{v}_1 + A^n\boldsymbol{v}_2 + A^n\boldsymbol{v}_3 = 3^n(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) = 3^n\boldsymbol{x}$$

（解法２）A^n を計算するのに対角化を用いて

$$B = P^{-1}AP \qquad \Longleftarrow \qquad A = PBP^{-1} \qquad \Longleftarrow \qquad A^n = PB^nP^{-1}$$

としてみる．ここで B は対角行列だから n 乗は簡単に計算できる．問題は P^{-1} だが，根性と時間をかければできる.（テスト時間内にやれと言っているのではない．だからこそ，時間のかからない「解法１」を想定していたのだ.）A^n を求めてから $\boldsymbol{x}$ をかければできあがりだ.

問４：A は対角化不可能である.

（証明１）対角化可能であったと仮定すると，固有値はすべて等しいので A を対角化した結果が $B = P^{-1}AP = \alpha I_4$ となる（固有値を α とした）．これを A について解くと $A = P(\alpha I_4)P^{-1} = (\alpha I_4)PP^{-1} = \alpha I_4$ となり，A が対角行列でないという問題の仮定に反する（途中では I_4 は単位行列なので，任意の行列と交換できることを用いた）.

（証明２）対角化可能なためには，独立な固有ベクトルを４つ持つことが必要（十分）であるので，これが不可能だと言おう.
固有値を α として，固有ベクトルは連立方程式 $(A - \alpha I_4)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解である．また一般に $n \times n$ 行列 B によって決まる連立方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の次元は $n - \mathrm{rank}(B)$ である．この２つから今の場合，A が対角化可能なためには（4 つの独立な固有ベクトルが存在するためには）$\underline{A - \alpha I_4 \text{ のランクがゼロ}}$ であることが必要だと結論できる.
ところが，ある行列のランクがゼロだということはそれがゼロ行列であると言うことと同値だ（どこかにゼロでない成分があると，行の変形によってもゼロでないものが残る；各自チェック）．これは $A - \alpha I_4$ がゼロ行列であること，すなわち $A = \alpha I_4$ を意味する．しかしながら，$A = \alpha I_4$ は「A が対角行列である」を意味し，題意に反する.

問５：まあ，これは難しい．そう簡単に出来ないだろうとは思っていました．模範解答は大体以下のようになります.（なお，問題には明記するのを忘れましたが，A, B ともにゼロ行列ではないものとしておきます.）以下では A, B の共通の固有ベクトルを「同時固有ベクトル」と言う.

(1) A, B ともに少なくとも一つは固有ベクトルを持つから，A の勝手な固有ベクトルを $\boldsymbol{x}$，その固有値を α とする．すなわち，

$$A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}, \qquad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}). \tag{1}$$

両辺の左側から B をかけると，$BA\boldsymbol{x} = B(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(B\boldsymbol{x})$ となるが，$BA = AB$ なので，これは結局

$$A(B\boldsymbol{x}) = \alpha(B\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

を意味する．さてこの式の解釈であるが，これは $B\boldsymbol{x}$ が「A の固有値 α に対する固有空間 W_α」の元であることを意味する.（固有空間と書いたのは，$B\boldsymbol{x}$ がゼロベクトルなら，固有ベクトルとは言えないからである.）そこで，W_α の次元によって場合分けする．

(1-1) W_α の次元が 1 の場合：α に対する固有ベクトルは定数倍を除いて一つに決まるわけだから，$B\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{x}$ となっているはずだ（β はゼロかもしれない定数）．これは $\boldsymbol{x}$ が B の固有値 β に属する固有ベクトルであることを意味するので，メデタシメデタシ．

(1-2) W_α の次元が 2 以上の場合：今度は上のように単純ではなく，$B\boldsymbol{x}$ が，W_α の基底の線形結合になっているとしか言えない．つまり，

$$B\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \tag{3}$$

の形に書けているはずだ（$\boldsymbol{v}_i$ が W_α の基底で，k は W_α の次元）．このままでは左辺と右辺に出ているベクトルが同じとは限らないので困る．以下，$\boldsymbol{v}_i$ のうまい線形結合をとって，B の固有ベクトルを作ろう．
そのためにまず，いままでの議論は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_i$ ととっても成り立つことに注意する．各 $\boldsymbol{v}_i$ を今までの $\boldsymbol{x}$ だと思って今までの議論をくり返すと，係数 c_{ij} が存在して

$$B\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\boldsymbol{v}_j \tag{4}$$

が成り立つことがわかる．そこで，B の固有ベクトルの候補として

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{k} y_i\,\boldsymbol{v}_i \qquad (y_i \text{ はこれから決める係数}) \tag{5}$$

を考えて $B\boldsymbol{y}$ を計算すると，

$$B\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{k} y_i\,B\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{k} y_i \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{k} c_{ij}y_i\right)\boldsymbol{v}_j \tag{6}$$

となる．(6) の右辺のベクトルが $\boldsymbol{y}$ の定数倍になって欲しいのだが，これは

$$\sum_{i=1}^{k} c_{ij}y_i = \beta y_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, k;\ \beta \text{ は } j \text{ によらない定数}) \tag{7}$$

ならば実現される．つまりこの場合，$\boldsymbol{y}$ は B の固有値 β に属する固有ベクトルになるのである．
ところで，(7) は，成分を c_{ji} とする行列の固有ベクトルが $\boldsymbol{y}$ であると主張している．任意のゼロでない行列は少なくとも一つの固有ベクトルをもつので，このような $\boldsymbol{y}$ は存在し，(7) が満たされる．従って，B の固有ベクトルは少なくとも一つは存在するわけだ．

以上からいずれの場合でも A, B の同時固有ベクトルが存在することがわかった．

(2) 以下では題意の通り，$AB = BA$ かつ A, B がそれぞれ対角化可能である場合のみを考える．小問 (1) の証明では，A の固有値の一つ一つに対して，A, B の同時固有ベクトルが少なくとも一つ存在することが証明された．そこで (2-1) A の固有空間がすべて 1 次元の場合（固有値が重根になっていない），(2-2) 多次元の固有空間がある場合，に分けて考えるのがわかりやすいだろう．

(2-1) A の固有値が重根になっていない場合．このときは（A が対角化可能であるから）A は n 個の異なる固有値を持つが，そのそれぞれに対して A, B の同時固有ベクトルが存在することが，小問 (1) の証明から言える．従って，n 本の独立な A, B の同時固有ベクトルが存在する訳で，この n 本から行列 P を作ると A, B を両方とも対角化できる．

(2-2) A の固有値が重根を持ち，いくつかの固有空間が 2 次元以上になっている場合．

これはなかなか大変だ．A の固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$，対応する固有空間を $W_1, W_2, W_3 \ldots$，それぞれの次元を $n_1, n_2, n_3, \ldots$ としたとき，それぞれの固有空間 W_i において n_i 本の同時固有ベクトルが存在することを言いたい．もしこれが言えると，(2-1) と同じように，全体で $\sum_i n_i = n$ 本の同時固有ベクトルが存在すると言え，証明は終わる．

さて，小問 (1) では各 W_i に少なくとも一本の同時固有ベクトルが存在することまでは言ってあるのだが，その後がちょっと大変．一つのやり方は以下のように議論することだろう．(以下の議論は格好の良いものではない．しかし，線形代数の教科書などにはもっとカッコイイ議論が書いてあるから，敢えて泥臭く攻めることにした.)

Step 1. W_1 に注目する（W_2 以下も同じ）．W_1 の任意の元 $\boldsymbol{x} \in W_1$ は B をかけても W_1 の外に出ない．なぜなら，これは式 (2) の解釈として，その式の直後に書いたことそのものだから．つまり（あまり講義では強調しなかったが）W_1 は B の作用に関して不変部分空間になっている．数式では

$$B\boldsymbol{x} \in W_1, \qquad (\boldsymbol{x} \in W_1) \tag{8}$$

Step 2. 仮に，B の固有ベクトル（固有値 β）$\boldsymbol{y}$ があり，W_1 と W_2 の両方の成分を持っていたとしよう：

$$B\boldsymbol{y} = \beta\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \qquad (\boldsymbol{v}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in W_2) \tag{9}$$

上で述べたように，$B\boldsymbol{v}_1 \in W_1, B\boldsymbol{v}_2 \in W_2$ であり，さらに W_1 に属するベクトルと W_2 に属するベクトルは独立である．ということは

$$\beta\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2 = \beta(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = B\boldsymbol{y} = B\boldsymbol{v}_1 + B\boldsymbol{v}_2 \tag{10}$$

の両端を見比べることで，

$$\beta\boldsymbol{v}_1 = B\boldsymbol{v}_1, \qquad \beta\boldsymbol{v}_2 = B\boldsymbol{v}_2 \tag{11}$$

が成り立つ必要がある．つまり，W_1 と W_2 にまたがって存在するような B の固有ベクトルがあれば，その W_1 と W_2 の成分のそれぞれが B の固有ベクトルになっているわけだ．

Step 3. 上の議論は容易に 3 つ以上の固有空間へも拡張できることはわかるだろう．例えば，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_5$（$\boldsymbol{v}_i \in W_i$）が B の固有ベクトルなら，各 $\boldsymbol{v}_i$ が B の固有ベクトルなのだ．このように，B の任意の固有ベクトルは，何かの W_i に入っている固有ベクトルにいつでも分解し，分解した成分がそれぞれ固有ベクトルになっている．この意味で，各 W_i に分解した成分を B の固有ベクトルを作る「基底」のようなものと考えることができる．

Step 4. 以上を元にして，B の固有ベクトルの数を数えよう．B が対角化可能だと仮定しているから，B は全体で n 本の独立な固有ベクトルを持つはずである．これらの n 本の固有ベクトルを，上で見たように各 W_i に入っている成分に分解しよう．このとき，各 W_i へ分解した成分が丁度 n_i 本あるはずである．その理由を以下で説明する．

Step 4$'$. （理由）各 W_i の次元が n_i であるから，各 W_i では高々n_i 本しか成分がとれない．従って，ある W_j 内の成分（基底）が n_j より少ないとすると，全体で $\sum_i n_i = n$ 本よりも少ない成分（基底）しか残らない事になる．n 本よりも少ないベクトルの線形結合からは，いくら頑張っても n 本以上の独立なベクトルを作ることはできない．(要するに，ある空間に存在できる一次独立なベクトルの最大数は，その空間の次元を超えられない.) 従って，今の場合，B の独立な固有ベクトルは n 本より少なくなり，対角化可能との題意に反する．

Step 5. 以上から，B の独立な固有ベクトルは，各 W_i 内に n_i 本ずつとれることがわかった．各 W_i 内のベクトルは（ゼロでない限り）A の固有ベクトルだからこれで A, B の同時固有ベクトルが W_i 内に n_i 本存在するといえる．従って全体では $\sum_i n_i = n$ 本の独立な同時固有ベクトルが存在する．よって，これらの同時固有ベクトルを並べて行列 P をつくれば，P が A, B を同時に対角化する． $\square$