線形代数学 I：中間テスト解答例と講評（原，2003.6.11）

全体の講評：

平均すれば大体，予想通りの出来でした．

僕の反省点としては問３をレポート問題に似せすぎたのではないか（完全にわかってない人でも答えが書けた？），と言うことはありますが，まあよしとします．ただし，合計が 100 点を超えた場合，105〜110 点程度に抑えて最終成績を計算することもあり得ます．ご了承ください．

しかし，一方で，かなり苦戦している人も 1/4 くらいいます．このような人はこれからいよいよ苦しくなることが考えられます．傷が深くなる前に質問などに来てください．質問などにも来ず，レポートも出さず，最後のテストが悪ければ全く助けることはできません．

個々の問題について：

問１：一次結合，基底，などの定義がわかっているかどうかを聞く問題です．ただ，３次元空間では簡単になりすぎるので４次元で訊きました．

（ガリガリ計算する前に）このような状況では与えられた４つの組から基底になりそうな一つの見当をつける（証明はともかく）のが先決です．これは単なる問題を解くテクニックではない．実際にある状況の下での基底を探す場合，解の見当を正しくつけることは労力の大きな節約（結果として正確な解析）につながります．だから，与えられた情報を最大に使って，基底になりそうなもの（ご丁寧に基底は一つだと言っている）を考えましょう．

- ４項列ベクトルの空間では，５つ以上のベクトルは一次従属になるはずです．だから（え）は一次従属で，基底になり得ません．
- ４項列ベクトルの空間の基底は４つのベクトルからなるはずです．これは講義では「証明はできないけど，こうなる」と述べたことです．とすれば基底の候補は（い）,（う）に絞られます．
- 更に,（い）,（う）のどちらも $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を含んでいます．と言うことは，この３つは一次独立のハズです（もし一次従属ならば，これにもう一つベクトルを足しても一次従属で，基底になれない）．つまり,（あ）は一次独立のハズです．

以上は問題に書いてあることをすべて信用した場合の結果であって，<u>何の証明にもなってません</u>．だから，<u>以上をきちんと証明する必要</u>があります．しかしともかく，このように見当をつけておけば，証明もかなり簡略化できます．以下では勿論，上で書いたようなことは直接は使わずに証明を書きます．

以下ではまず，上の考察を利用した解法を与えます．その後，そのようなことを考えず，一回だけ連立方程式を解けば良い方法（別解）も与えます．

解法１

(1) （い）,（う）が一次独立か従属か，から考える．（い）については $k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c} + k_4\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ を,（う）については $k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c} + k_4\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ をそれぞれ解き，ゼロ以外の解があるかどうかを調べるわけだ．やってみると,（う）についてはゼロ以外の解がないことがわかる．つまり,（う）は一次独立．一方,（い）についてはゼロ以外の解がある（特に，$-3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ）ことがわかるので,（い）は一次従属．

（い）が一次従属だから，それに $\boldsymbol{e}$ を付け加えた（え）も一次従属である．

（う）が一次独立だから，それから $\boldsymbol{e}$ を減らした（あ）も一次独立だ．

結果として,（い）と（え）が一次従属である．

(2) 基底の条件は２つ,「独立である」「任意のベクトルを線形結合で表せる（空間を生成する）」であった．独立である条件から，基底である可能性があるのは（あ）と（う）である．実は「４項列ベク

トルの空間の基底は４つのベクトルからなるはず」を使ってしまうと答えは（う）だろう，と見当がつくが，それはここでは使わないで，後の条件（空間を生成する）を確かめることにする．それには,「任意のベクトルを一次結合で表せる」条件を実際に解いてみれば良い．つまり,（う）ならば x, y, z, w を任意の実数として,

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \tag{1}$$

を満たすような k_1, k_2, k_3, k_4 が決まるか（存在するか）どうか，調べればよい.（(あ）の場合は上で $k_4 = 0$ とした式になる.）これを解くと（ちょっと大変だが，頑張って解こう．左辺は (1) で一次独立性を調べた場合と同じだから，それを見ながらやればよいのだ）

$$k_1 = -2x - y - z + 4w, \quad k_2 = -2x - z + 3w, \quad k_3 = 3x + y + 2z - 5w, \quad k_4 = x - w \tag{2}$$

となる．つまり，任意のベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{e}$ の一次結合で表せるので,（う）は基底だ.

（あ）については，(2) 式で $k_4 = 0$ の場合である．これでは $x = w$ の場合にしか解がない．つまり，$x \neq w$ のベクトルを（あ）の一次結合では表せないので，基底ではない.

(3) これは簡単．上の（う）を解いた場合で，$x = 3, y = 1, z = -1, w = 2$ を代入して，答えは $\boldsymbol{f} = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}$.

解法２

余りややこしいことを考えずに一つの連立方程式を解く方法を示しておく．解法１では，同じような（でも微妙に違う）方程式を何回も解いていた．これらをまとめると，結局,

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \tag{3}$$

の形になる（後で詳しく説明する）．これを解くと，t を任意の定数として,

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x - y - z + 4w - 3t \\ -2x - z + 3w - t \\ 3x + y + 2z - 5w + 2t \\ t \\ x - w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x - y - z + 4w \\ -2x - z + 3w \\ 3x + y + 2z - 5w \\ 0 \\ x - w \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

となる．以下ではこれを使って，いろいろな問いに答えよう.

(1) 一次独立かどうかは (3) の右辺をゼロとした解，つまり (4) 式にて $x = y = z = w = 0$ とした

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

を見ればよい．まず（え）については上の t を任意（ゼロでない）にとれるから（え）は一次従属だ．次に（う）については，$\boldsymbol{d}$ が方程式に入ってない場合を解けばよいから，上で $k_4=0$ の場合だけ考えればよい．この場合，(5) 式から $t=0$ となるので，k_1,k_2,k_3,k_5 はみんなゼロ．つまり（う）は一次独立とわかる．同様に,（い）については $k_5=0$ の場合を見れば良く，これは t が任意でゼロでない解があるので一次従属．ついでにここで $t=1$ とすると，$-3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$ が成り立つこともわかる．（あ）では $k_4=k_5=0$ を見れば良くって，このとき $k_1=k_2=k_3=0$ となるから一次独立．

(2) 基底になっている可能性があるのは（あ）,（う）であり（これらが一次独立），これらが $\mathbb{R}^4$ を生成するかを見ればよい．

（あ）の場合，(4) 式にて $k_4=k_5=0$ となる解を探すべきだが，$k_5=0$ から $x=w$ となってしまう．つまり，k_1 から k_3 が存在するためには $x=w$ が必要である．ということは，$x\neq w$ なるベクトルを（あ）の線形結合で表すことはできず,（あ）は $\mathbb{R}^4$ の基底になれない．

一方,（う）の場合は $k_4=0$ となる (4) 式の解を探す．これは $t=0$ を意味するだけで，

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x-y-z+4w \\ -2x-z+3w \\ 3x+y+2z-5w \\ x-w \end{bmatrix} \tag{6}$$

と言う解がちゃんと求まる．つまり，任意のベクトル (x,y,z,w) を $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{e}$ の線形結合で表すことができる．と言うわけで,（う）は基底になっている．

(3) $\boldsymbol{f}$ を線形結合で表すのは (6) 式に $x=3,y=1,z=-1,w=2$ を代入すればよい．

問２：ともかく連立方程式を解いてもらおうという問題です．間違えないようにやってもらうしかありません．

(1) 掃きだし法でやると，例えば（ここのところはいろいろな可能性がある）

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ -2y + 2z - 2w = b-a \\ -y + z - w = c-a \\ -2y + 2z - 2w = d+a \end{cases} \tag{7}$$

となる（右辺を見ればわかるように，これは第一行を第２行以下からひいたもの）．

これをみると，左辺で第２行以下が比例しており，特に第２行と第４行は同じである．であるから，右辺も同様に振る舞うことが解の存在には必要である．つまり，

$$b-a=2(c-a)=d+a \tag{8}$$

が解の存在のための必要条件だ．ここで条件は２つ出ていることに注意．なぜかわからないが，かなりの人がこれを一つの式にしようとして条件を一つ落としていた．このようなところを見ていると，本当に等式の同値変形を理解しているのか（完全に高校の範囲だと思うが），気になってしまう．大丈夫だとは思うが，自分でもう一度復習して欲しい．

さて，(8) 式が満たされているとして，残りを解こう．(8) 式の下では，(7) 式の第２行以下は同じ事を表す（比例している）ので，結局，第一行と第３行だけ考えればよい．つまり，

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ -y + z - w = c-a \end{cases} \tag{9}$$

である．この第２行は z,w を任意の数として y を表す式，第１行は y,z によって x を表す式である．よって，$z=s, w=t$ （s,t は任意）として，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s+t+c \\ s-t+a-c \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ a-c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

これが解．これ以外の表し方もある．最後を参照．

テスト終了１０分前くらいに訂正したが，(2) は本当は $a=b=c=d=0$ の場合に解いてもらうつもりだった（もとの問題文では $=0$ が落ちていた）．もちろん，解の存在条件に $a=b=c=d$ を入れると $a=0$ が必然的に出てくるのではあるが，これを出させるのは変な混乱のもとと考え，要求しないつもりで問題文を作った．しかし，結果的に $=0$ を落としてしまったため，無用の混乱を招いてしまったかもしれない．この点，深くお詫びする．この辺りの事情がよくわかった解答をしたひとは，もちろん，それを考慮して採点した．

(2) $a=b=c=d=0$ の場合，上の解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

となって，２つのベクトル $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の線形結合で書けている．この形のものはすべて解だから，この２つのベクトルは解の空間を<u>生成する</u>と言える．また，この２つのベクトルは<u>一次独立</u>だ（各自，問１の解答のようにチェック）．従って，この２つのベクトルが解の部分空間の基底をなす．基底が２つのベクトルからなるから，この空間の次元は２である．(オシマイ)

勿論，基底の取り方は一通りではない．例えば，以下の４つのベクトルのうち，任意の２つを使ってもよい．これらはすべて，(11) 式で s,t を適当に選ぶと得られる（各自チェック）．

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

また，(10) 式の非斉次解もいろいろあり得る．例としては以下のようなものが挙げられる：

$$\begin{bmatrix} c \\ a-c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b-c \\ a-c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ a-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a-b}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 2a-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ \frac{a-d}{2} \end{bmatrix} \tag{13}$$

問３：レポート問題と酷似しているので略．部分空間の定義の条件のうち，どれか破れているか，簡単な<u>反例を挙げれば</u>よい．