

線形代数学 I : 期末テスト解答例と講評 (原, 2003.10.20)

全体の講評 :

平均すれば大体, 予想通りの出来でした. しかし, 中間試験について満点をとった人が数人いた一方で, 中間試験とほとんど同じ問題ができなかった人もかなりいます (しかも同じところで間違っている). 部分空間についてはまあ, 仕方ないと思うものの, 連立方程式がちゃんと解けないのは困りものです. また, 中間テストの成績が良いため, かなりさぼった (と言う言い方が悪ければ, 他の科目に注力した) 人もいたようだ. ちょっと成績のつけかたに問題があったかも.

個々の問題について :

問 1 : 一次結合, 基底, などの定義がわかっているかどうかを聞く問題です. 中間試験とほとんど同じなので, 簡単に解答します.

(1) $c = k_1 a + k_2 b$ となるような k_1, k_2 を求めれば良い. 流石にほとんどの人ができてました. 答えは, $c = -3a + 2b$.

(2) $xa + yb + zd = 0$ の解が, $x = y = z = 0$ 以外にないことを言えばよい. これも連立方程式を解くだけです.

(3) 部分空間の定義を満たしていることを言えばよい. つまり, 任意の $x, y \in W$ と任意のスカラー k に対して

- $x + y \in W$,
- $kx \in W$,
- $0 \in W$

であることを示す. 例えば 2 つめなら, $x = xa + yb + zc + ud + we$ に対して, $kx = k(xa + yb + zc + ud + we) = (kx)a + (ky)b + (kz)c + (ku)d + (kw)e$ と計算でき, これは W の定義の形になっているから, $kx \in W$ と結論できるわけ.

なお, この問いで「 W の定義から, 定理により正しい」と書いた人が何人かいたが, 「部分空間であることを示せ」だから, ここは定義に戻って示すべきである.

(4) 問題は (4) だ. 基底の定義は「その空間のどのベクトルも線形結合で書ける」「一次独立である」の 2 つだった. 今の場合, a, b, c, d, e の線形結合で書いているのが W なんだから, a, b, c, d, e は一つ目の条件はクリアしている. 問題は 2 つ目だ. 小問の (1) から, c は他のベクトルの線形結合で書けるから基底には入れないことがわかる. 小問の (2) から a, b, d は独立だ. 従って, e がこれらの線形結合で書けるかどうかの問題になる. 計算してみると, $e = a + b + d$ であった. 従って, 基底は $\langle a, b, d \rangle$ で, 次元は 3.

この (4) は少しだけ経路の変わった問題で, 部分空間の定義が良くわかっているかを知るために出しました.

問 2 : これも中間と同じような問題.

(1) (3) 解くしかありません (一緒にやってしまうぞ). 掃きだし法をやると, (3) の拡大係数行列が

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a-1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (1)$$

となることがわかる.

(1) の場合, 一番右側はゼロだから, これは

$$(a-1)x_1 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_2 + x_4 = 0 \quad (2)$$

ということである． $a \neq 1$ では (t を任意の実数として)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

が解．また， $a = 1$ では (s, t を任意の実数として)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

が解．

(3) の場合は，

$$(a-1)x_1 = -1, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3, \quad x_2 + x_4 = 1 \quad (5)$$

ということになる． $a \neq 1$ では一番目の方程式に解はないので，解なし． $a = 1$ では

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{a-1} \\ t \\ 1 + \frac{1}{a-1} - t \\ -t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{a-1} \\ 0 \\ \frac{a}{a-1} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

(2) の解は，式 (3),(4) からすぐに出る．

$$a \neq 1 \text{ では 1 次元, 基底は } \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad a = 1 \text{ では 2 次元, 基底は } \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (7)$$

問 3 : 計算だけじゃ．答えは $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

問 4 : これも計算のみ．ただし，大抵は答えがすぐ出るようになっている．

$\det A = 0$. なぜなら，第 3 列が全部ゼロ．

$\det B = 0$. なぜなら (第 1 行) + (第 2 行) = (第 3 行) . この足し算の関係を明らかにするために，わざと第 1 列に a, b を入れたんやけどなあ ...

$\det D = abcd$, なぜなら対角行列 .

残るは C だけで，これはまあ，地道にやってください．その際，「行や列を交換すると符号が変わる」「ある行や列から共通因子を引っ張り出すと，それが前にでる」などを忘れないように (間違っただけは大抵，このどちらかです) 答えは， $a^2(a^2 - 1)$ です．

(蛇足) C の行列式は $a, a-1, a+1$ に因数分解できたが，これはある程度は以下のように予測できる．まず，行列式は a の高々 4 次の多項式であることに注意．従って $a = x$ の値で行列式がゼロになるなら，その因数分解は $(a-x)$ の因子を含むはず．

この観点で見ると， $a = 0$ では第 2 行と第 3 行が，また第 2 列と第 3 列が比例するから，行列式はゼロ． $a = 1$ では第 1 行と第 4 行が等しくなるので，行列式はゼロ． $a = -1$ では第 1 列と第 4 列が比例するので，行列式はゼロ．つまり，行列式は $a(a-1)(a+1)$ の因子を含むはずなのだ (どのくらいの数の行や列が比例するか，を考えると a は a^2 以上ということもわかるが，ここでは立ち入らない) .