2003.04.15

線形代数学 I (2113210)

担当：原　隆（多元数理科学研究科）：理 1 号館 508 号室，内線 (hara@math.nagoya-u.ac.jp)

Office hours: 毎週水曜の昼休み（この講義の後），この教室で

概要： 理工系の学問の基礎となる道具の一つである「線形代数学」の前半を学びます（後半は後期に行う線形代数学 II で）．線型代数とは何か，を簡単に説明できれば良いのですが，高校数学とそれほどつながりのあるものではないので，今の時点でわかるように説明するのは簡単ではありません．同じ理由で,「内容予定」の用語が何を意味するかは今はほとんど理解不能だと思います．これらは講義の中で段々と明らかにして行くつもりなので，御容赦ください．皆さんが困難と思うであろうキーワードを挙げておくと，前期は「線形空間，ベクトルの一次独立，基底」など，後半は「線形写像と行列の関係，行列の対角化」です.（これ以外にも習うことは多いが，それらは計算ルールみたいなもんだから，そんなに困らないだろう.）

内容予定：（以下は大体の目安です．何回目に何をやるか，は段々とずれてくるでしょう.）

大体，教科書の第１章〜第７章をやりますが，第４章と７章の内容は少し省き，代わりに幾何学的側面（空間内の平面や直線との関係）と「線形空間」の基礎的な部分を随時はさみます．予備日を設けてあるので，理解の不足していると思われる部分を最後の方で補うことも考えています.

0. Introduction （第１回）
1. この講義について（何をやるか，心構え，注意事項）
2. 集合と写像（写像、全単射、逆写像、変換　）

I. 数ベクトル空間と基底 （第１回〜第３回）
1. ２次元，３次元のベクトルとその幾何学的意味（高校の復習）
2. 数ベクトルの組の一次独立・従属の定義とその幾何学的意味
3. 「基底」— 言葉だけ（詳しくは II の後半で）

II. 行列と連立一次方程式（第３回〜第６回）
1. 掃き出し法を用いて連立一次方程式の解法を学ぶ
2. 係数行列の階数と解の関係
3. 連立方程式の解の空間，線形空間と基底（教科書に付け足し）

挿入. II か III の後で中間試験！

III. 行列と逆行列（第７回〜第８回）
1. 行列の和と積の定義
2. 逆行列の計算法
3. 連立方程式と正則行列

IV. 行列式（第９回〜第１２回）
1. 行列式の定義
2. 行列式の性質
3. 行列式の計算（基本変形による）
4. 行列式の計算（展開による）

> 中間試験の具体的な日取りは後日，進度と相談しながら決め，講義やプリントで連絡する．その日取りは，上の「内容予定」からずれることも十分にあり得るので，知らないうちに試験が終わっていたなどと言うことのないように，十分，注意されたい.

教科書：「線形代数概説」（内田伏一・浦川肇　著，裳華房）

参考書：「線形代数入門」（斉藤正彦　著，東大出版会）

評価方法：

この大学では基礎科目を一旦落とすと回復は非常に難しいようです．またすぐ下に書くように,「線型代数」は一年生の科目の中でも鬼門とされています（僕自身，学生時代には苦労しました）．この点を考慮し，何回かの小レポートや中間テストなどと期末試験の成績を総合して，以下のように評価します．中間テストの具体的な実施日時は追って講義中に通知します．

- 最終成績は一旦，１００点満点に換算してから，この大学の様式に従って（４段階で）つける．
- その１００点満点（「最終点」と呼ぶ）は，以下のように計算する．
  - まず,「レポートの点」「中間試験の点」「期末試験の点」をそれぞれ１００点満点で出す．
  - 次にこの３つを以下の式で「平均」し，一応の総合点を出す：

$$
\begin{aligned}
(\text{総合点 } A) &= 0.25 \times (\text{レポート点}) + 0.35 \times (\text{中間の点}) + 0.40 \times (\text{期末の点}) \\
(\text{総合点 } B) &= 0.50 \times (\text{中間の点}) + 0.50 \times (\text{期末の点})
\end{aligned}
$$

    ただし，上の計算式の重みを若干変更する可能性はあることを承知されたい（例えば，総合点 B で，中間と期末の比を $4:6$ にするなど）．
  - 最終成績は

$$(\text{最終点}) = \max\{\,(\text{総合点 } A), (\text{総合点 } B), (\text{期末の点})\,\}$$

    とする事にする．つまり，上で計算した（総合点 A）,（総合点 B）と（期末の点）を比べて，良い方をとるのだ．
- このように，一応は,「期末で一発逆転」も可能なようにした．だから，理論的には，講義にも全く出ず，レポートも出さず,...，とやっていても期末で１００点とればよいことになる．しかし,（失礼だが），最近の学生さんでこれができる人はほとんどいないだろう — 言うまでもなく，期末試験は中間試験やレポートよりは難しいぞ．だから，あくまで自己責任でやってくれ．期末の一発勝負に出て成績が悪くても，苦情は一切受け付けないからね！(できる人がいないだろうと思いつつもこの形式をとるのは，僕の美学にこだわっているからである.）
- 本来なら「どこまでできれば合格か」をここに明示するのが良いのだが，何も習っていない時点で単語だけ並べても無意味であろう．その代わりとして毎回，または隔回に出題するレポート問題と同レベルの問題が解ければ合格できるだろうと宣言しておこう.（ただし「ここは大事だからきちんとやること」「時間がなくてレポートは出せないけど試験には出すぞ」などの指示を講義中に与えることもあり得る.）

レポートについて：

毎回ないし隔回の割合で，一問か二問からなる簡単なレポートを出し，適当に返却する（具体的な方法は次回から）．レポート出題の意図は「この程度できれば講義についていけるし，合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること，である．上の「総合点」でのレポートの比重は低いが，この講義をこなす上では重要な意味があるので，面倒でもやってみることを強く奨める．

特に一言：

この講義でカバーする内容は，今まで皆さんが高校で学んできた数学とはかなり異なります．単なる計算のところはよいのですが，かなりの抽象思考を要求される部分もあります．

更に困ったことに，高校数学のカリキュラムが大幅に変更されたため，高校数学との接点も少なくなってしまいました.（行列・一次変換などと言ってもあまり親しみがないのでは？）従って，従来は取っ付きやすいはずの前半でも苦労する人がでるかも知れません．そこで思い切って，取っつきにくい内容（ベクトルの独立，基底）を最初に持ってくることにしました．

一方，線型代数で学ぶこと（特に線型空間の概念）は後々まで，理工系の学問の至る所（例：振動と波動，量子力学，電気回路論，微分方程式論,...）に顔を出します．ですから，この科目の内容をおろそかにするわけにはいきません．

以上の事情から，どのようにしたらわかりやすい講義になるか，非常に悩んでいます．皆さんの方でも決して油断せず，しっかり勉強してください．同時に,「ここがわからなかった」というところをどしどし言ってくれると参考になります．

この科目に関するルール：

最近の世相の移り変わりは激しく，学生気質も僕の頃とはかなり異なっているようです．後でお互いに不快な思いをすることがない様，この科目に関して，以下のルールを定めます.（こんなこと言うまでもないとは思うのだが...）

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強することであると確認する．
- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室・退室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケットです．
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う．
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う．
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.nagoya-u.ac.jp）．ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい．

0　用語の解説：写像とは

高校ではいろいろな「関数」をあつかったと思う．関数 $f(x)$ とは，一般に実数 x に実数 $f(x)$ を対応させる，対応関係の事だった．つまり，数に数を対応させるものを「関数」と言った．

大学では，数から数だけでなく，もっと一般の対応関係を考え，これを写像と言う．正しい定義は以下の通り．

定義 0.0.1 集合 X と集合 Y があるとき，X の元（要素）x に Y の要素 y 対応させる関係のことを，写像と言う．

この定義によると，今までに出てきた関数とは，$X = Y = \mathbb{R}$ とした写像になっていたわけ．

考えている写像を f で表そう．また，f によって X が写された行き先を f の値域と言う：

$$f(X) \equiv \bigl\{ f(x) \bigm| x \in X \bigr\} \tag{0.0.1}$$

特に $f(X) = Y$ の時，写像は全射であるという．また，X の異なる 2 元の行き先がいつも異なるとき，つまり，

$$f(x) \neq f(y) \qquad \text{がすべての } x \neq y \in X \quad \text{について成り立つ} \tag{0.0.2}$$

時，写像は単射である，と言う．

註： 一般には，写像 f は X のすべての元について定義されていない場合も考える．その場合，$f(x)$ が定義されている x の全体を f の定義域というのであるが，始めから余りややこしくすると問題なので，出てきたときに考えましょう．

記号の約束：

実数全体の集合： $\mathbb{R}$,　　複素数全体の集合： $\mathbb{C}$,　　整数全体： $\mathbb{Z}$.

1　数ベクトル

いよいよ，線形代数の中身にはいる．高校でも少しやったはずの,「ベクトル」を突破口にする．

1.1　数ベクトルとは

特に断らない限り，n, m は正の整数とする．

n 個の実数を縦に並べたものを n 項の列ベクトルと言う（下の左半分）．また，横に並べたものを n 項の行ベクトルと言う（下の右半分）．両方まとめて「数ベクトル」と言う．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{または} \quad [x_1, x_2, \ldots, x_n] \tag{1.1.1}$$

n 項の数ベクトルの全体の集合を実ベクトル空間と言い，$\mathbb{R}^n$ と書く．

註：

- ベクトルと対比して，実数のことをスカラーと言うことがある．
- 教科書ではベクトルや行列を表すのに四角いカッコ [,] を使っているが，僕は丸いカッコ (,) を使う癖がついてしまった．どちらもよく見かける記号法なので，特にどちらに統一することなく，両方を使うことにする．
- 「n 項の」ベクトルという代わりに,「n 次元の」ベクトルと言うこともある．
- この講義では数ベクトルと言えば列ベクトルのことを指すものとする．縦に書くのはスペースを食うから本当は避けたいのだが，後の題材との関連からは仕方ない．この意味で，行ベクトルは以下ではほとんど出てこない．
- ベクトルの成分として，複素数を考えることも勿論でき，その方が望ましい．(教科書では複素数も考えることになっている．）しかし，高校でのカリキュラムの変更で，複素数に苦手意識を持つ人も多いと聞く．そこで，この講義では，春学期の間は実数の成分を持つベクトルのみを扱うことにする．これに対応して「スカラー」は実数とする．

ベクトルは（高校までは $\vec{a}$ のように書いていたと思うが）太字のアルファベットで表す．つまり，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

など．$\vec{a}$ と書きたい人は書いてもかまわないが，大学で使う本には大抵，太字で書いていると思うので，慣れて欲しい．

註： 黒板には太字を書くのは大変なので，二重線（blackboard font）で書くことが多い — R の場合は $\mathbb{R}$ となる．実例は黒板で見せる．本当はプリントもこの二重線で書くべきなのだが，フォントがないのでご勘弁を．

数ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が等しいとは，(1) その成分の数が等しく，かつ，(2) 対応する成分がそれぞれ等しい，ことである．つまり，

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

は (1) $m = n$ であり，かつ (2) すべての $1 \le j \le n = m$ に対して $a_j = b_j$ であるときにのみ，等しいと言い，

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{1.1.4}$$

と書く．

次に，ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1.1.5}$$

とスカラー（実数） k に対して，ベクトルの和，差，スカラー倍を以下のように定義する：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n+b_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n-b_n \end{pmatrix}, \qquad k\,\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} k\,a_1 \\ k\,a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ k\,a_n \end{pmatrix} \tag{1.1.6}$$

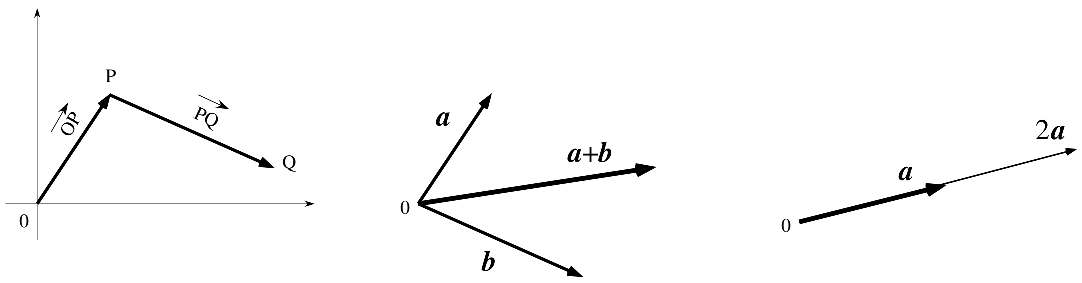
別に難しいことはない：単に成分ごとに計算するだけだ.（注：次元の異なるベクトル同士の和や差は定義できない.）

大事なおまけ：高校でやったこととの関連

と大上段に振りかぶるまでもなく，上の数ベクトルは高校までの２次元や３次元でのベクトルの一般化になっている．復習しておくと：

平面や空間において，２点 P, Q をとり，P から Q に向かう有効線分（向きのついた線分，図の (a) 参照）を $\vec{PQ}$ と書く．これを P を始点，Q を終点とするベクトルと言う．

（ここのところの図が，元々配ったプリントでは消えていた．一応，修正しました.）



(a) (b) (c)

始点と終点を決めると色々なベクトルができるが，２つのベクトルは平行移動して互いに重なるとき，等しい，と言うことにする．このように約束すると，ベクトルの全体は（始点をいつも原点になるように平行移動して考えて）,「原点から空間の点 Q へ向かう有効線分」と考えることができる．

さて，平面や空間に直交座標を導入すると，各点の座標を (x, y, z) のように表すことができる．点 Q の座標が (x, y, z) の場合，ベクトル「原点から空間の点 Q へ向かう有効線分」を点 Q の座標と同一視して，(x, y, z) と書くことができる．これで有効線分と数ベクトルの関係がついた．このとき,「ベクトルが等しいこと」の定義は「ベクトルが重なること」と同じであることはすぐにわかる．

また，成分ごとの足し算を行うことは,「ベクトルの合成」をやっていることになる（図 a, b 参照）．一方，スカラー倍は，ベクトルの長さを伸ばしたり縮めたりしていることに当たる（図 c 参照）．

この意味で，今までのところは，高校でやったことの単なる拡張である．面白くなるのはこの後から．

４月２３日の連絡：先週の講義中に指摘されて気づきましたが，先週のプリント，教科書が間違ってました．正しくは,「線形代数概説」（内田伏一・浦川肇　著，裳華房）です．

第１回レポート問題：

１次結合と１次独立などについての問題です．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問１： ベクトル $\boldsymbol{a}, ..., \boldsymbol{e}$ を

$$\boldsymbol{a} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} \equiv \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とする．以下のベクトルの組が１次独立か１次従属かを判定せよ．可能な場合は，カッコの中のベクトルを他のベクトルの線形結合で表せ．

1. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の３つのベクトル（$\boldsymbol{a}$）
2. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の３つのベクトル（$\boldsymbol{b}$）
3. $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}$ の４つのベクトル（$\boldsymbol{b}$）

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問１に解答し，

> ４月 28 日（月）午後５時までに
> 原の部屋（理学部１号館５０８号室）の前の封筒に
> （注意：理学部１号館は午後６時を過ぎると入れないよ）

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください.（別にレポート用紙である必要はありません．また，用紙の裏にも解答してくれて一向にかまいません.）また,「番外」の問題はもちろん，成績には一切関係ないので，自由に回答してくれると助かります．

———————————————-以下，レジュメの続き ———————————————

1.2　１次独立と１次従属

キーワード：ベクトルの１次結合，１次独立と１次従属（教科書の４ページ～７ページ）

r 個のスカラー $k_1, k_2, \ldots, k_r$ と r 個の n 項列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ に対して,

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r \qquad \text{これを} \quad \sum_{j=1}^{r} k_j\boldsymbol{v}_j \quad \text{とも略記する} \tag{1.2.1}$$

を列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の<u>一次結合</u>（線形結合）と言う．

（幾何学的意味を黒板で説明．４ページの問題解説）

以下では線形結合を用いて，別のベクトルを表すことを試みる．例として

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.2}$$

を考えよう.

（あ）$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ のように，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の１次結合で書け，書き方は一通りに決まる.

（い）また $\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{c}$ とも書け，やはり書き方は一通りに決まる.

（う）$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の線形結合で書くこともできるが，この場合は一通りに決まらない．例えば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} = \cdots$，と無限通り，ありそうだ.（最初の２例には２つのベクトルしか出ていないが，これは $k_j = 0$ と思えばよい.）

（え）しかし，どんなに k_1, k_2 を選んでも $\boldsymbol{y} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}$ とは書けない．さらに，$\boldsymbol{y} = k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b} + k_3\boldsymbol{c}$ と書くのも不可能である.

上の場合のうち,（あ，い）がもっとも幸せである：$\boldsymbol{x}$ を他のベクトルの<u>１次結合で書け</u>，かつ，その書き方は<u>一通りに決まる</u>．一方,（う）では１次結合で書けたのだが，右辺に出てくるベクトルの数が多すぎるために，何通りもの書き方ができてしまった．最後に（え）は非常に不幸で，右辺に出てくるベクトルが明らかに足りない.

線形代数の前半ではこのような事情を詳しく調べる．特に（あ，い）が実現される場合に名前を付け，どのような場合にこれが起こるのか，などを考えていく．その第一歩として上の（あ，い）と（う）を区別するため，以下の用語を導入する．ちょっと見ただけではこれは（あ，い）と（え）の区別に見えるだろうが，そうではないことがすぐにわかる.

r 個の n 項列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ がある.

- 少なくとも一つのベクトルが他のベクトルの１次結合として<u>書ける</u>場合，これらのベクトルは<u>１次従属</u>であると言う.
- どのベクトルも他のベクトルの１次結合として<u>書けない</u>場合，これらのベクトルは<u>１次独立</u>であると言う.

上の例では，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が１次独立であることはすぐにわかる．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{c}$ も１次独立，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ も１次独立である．一方，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の３つは１次独立でない（why?）．つまり，これが（あ，い）と（う）の違いになっているようだ.（より詳しくは講義で）.

註：（え）の場合は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が１次独立である，とは言えない（why?）．これが上の定義は（あ，い）と（う）の区別である，と言った意味.

さて，１次独立には，以下のような同値な定義の仕方もある（教科書の定理 1.1）.

定理 1.2.1 r 個の n 項列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が１次独立である必要十分条件は，以下の通りである.

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad k_1 = k_2 = \cdots = k_r = 0 \tag{1.2.3}$$

４月３０日の連絡：特にありません.
今日のキーワード：一次独立，一次従属，基底,（線形空間）

第２回レポート問題：基底についての問題です．言うまでもないことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください.

問２： ３項列ベクトルの組（あ）〜（え）を以下のように定義する．それぞれが $\mathbb{R}^3$ の「基底」になっているか，なっていないか，理由とともに答えよ.

（あ） $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ の３本.

（い） $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$ の２本.

（う） $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ の３本.

（え） $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ の４本.

ヒント：「基底」の定義の２つの条件が満たされているか，地道に確かめるのが筋.（ずるい手もないわけではないが，まあここはだまされたと思って地道にやってくれ.）

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ.

レポート提出について：

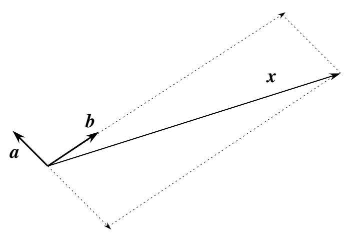
上の問１に解答し，

５月６日（火）午後５時までに
原の部屋（理学部１号館５０８号室）の前の封筒に
（注意：理学部１号館は午後６時を過ぎると入れないよ）

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください.（別にレポート用紙である必要はありません．また，用紙の裏にも解答してくれて一向にかまいません.）また,「番外」の問題はもちろん，成績には一切関係ないので，自由に回答してくれると助かります.

———————————-以下，レジュメの続き ——————————（先週の最後，少し時間がなくなったので，その復習からやります.）

まず，一つ言い忘れたこと：r 個の n 項列ベクトルをもってくると，$r>n$ ならば，いつでもこいつらは一次従属である．これは，$n=2,3$ ならイメージが湧くので理解しやすい（一般の時の証明は連立方程式をやってからやる）.



例えば $n=2$ と言うことは平面上のベクトルを考えているわけだ．ここで 3 個の（ゼロでない）ベクトルを持ってくると，そのうちの 2 つを何倍かしてうまく合成し，3 つ目のベクトルを作れる．(実は例外もあるが，その場合は 2 つのベクトルが平行.)

つまり，n 項列ベクトルの空間には最大 n 個の異なる「方向」しかないので，$n+1$ 個以上のベクトルを持ってくると，いくつかは余分になるのだ．(ここのところはすご〜〜くいい加減な書き方だから，わからない人は気にしない方がよい.)

次に，一次独立，一次従属などの定義と，例の（あ，い，う，え）の関係をまとめておく（この前の書き方だと少し混乱したかもしれないので）．

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ を考えると，これは一次独立か一次従属かのどちらかである．ここまでは定義の問題だからよいだろう．(実際の判定は，レポート問題でやったもらったようにする.) 例の（あ，い，う，え）が混乱したかもしれないのは，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots$ に加えて $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ もあったからである．つまり，例では以下の 2 つの問いを同時に聞いていた：

Q1: $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で書けるか？
Q2: 一次結合で書ける（Q1 の答えが YES）ならば，書き方は一意か？

これらの問いに対する答えは

- 例（あ，い）ではどちらも Yes
- 例（う）では Q1 は Yes，Q2 は No.
- 例（え）では Q1 も Q2 も No.

となっていた，わけだ．

さて，この例と一次独立・従属の関係を説明しよう．少し混乱しがちなのは，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次独立・従属を問題にしているのか，それとも $\boldsymbol{x}$ まで含めた $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次独立・従属を問題にしているのか，である．場合分けをして整理した方が良いだろう．

- Q1 の答えが YES の（$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で書ける）場合：
  $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次独立か従属かで Q2 の答えが決まる．つまり，
  - $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次独立なら書き方は一意.
  - $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次従属なら書き方はいろいろある.

  このときは定義から，$\boldsymbol{x}$ も含めた $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は一次従属である.
- Q1 の答えが NO の（$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で書けない）場合：
  このときは $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次独立と言いたくなるが，そうとは言い切れない.
  （理由）$\boldsymbol{x}$ を持ち出す前に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次従属かもしれないから.

しつこいけども，「$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次独立・従属」と「$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で書けるか書けないか」には直接の関係はない．一般に $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で書けるか書けないかはレポート問題でやってもらったように計算するしかない.

では，上の「Q1 の答えが YES の場合」について，説明しよう．上では「一次独立」と「書き方が一意」が同値である，と主張しているからこれを証明（説明）する．定理 1.2.1 の証明はこの後でやります．しつこいが，以下は，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ の一次結合で書ける場合の話.

（$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次独立ならば書き方は一意，の証明）

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次独立だと仮定する．このときに，$\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_r\boldsymbol{a}_r = l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + l_r\boldsymbol{a}_r \tag{1.2.4}$$

と二通りに書けたとして，$k_1 = l_1, k_2 = l_2, \ldots, k_r = l_r$ であることを示そう．上の中辺と右辺を辺々引き算すると，

$$(k_1 - l_1)\boldsymbol{a}_1 + (k_2 - l_2)\boldsymbol{a}_2 + \ldots + (k_r - l_r)\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0} \tag{1.2.5}$$

となる．ここで，定理 1.2.1 を思い出すと，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が独立の場合には上の係数 $k_1 - l_1, k_2 - l_2, \ldots, k_r - l_r$ はすべてゼロである．つまり，$k_1 = l_1, k_2 = l_2, \ldots, k_r = l_r$ が示された． □

（書き方が一意ならば $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ は一次独立，の証明）

対偶をとって考えるのが楽だろう．つまり,「一次従属ならば書き方はいろいろある」を示すのだ．これも定理 1.2.1 を使えば簡単だ．この定理によると，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が一次従属ならば,

$$l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + l_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0} \tag{1.2.6}$$

となるような，すべてはゼロでないスカラー $l_1, l_2, \ldots, l_r$ が存在する．そこで，$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ で表す書き方を何でも良いから一つとってきて

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_r\boldsymbol{a}_r \tag{1.2.7}$$

としよう．この両辺に $\boldsymbol{0} = l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + l_r\boldsymbol{a}_r$ を足してやると,

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + k_r\boldsymbol{a}_r + l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + l_r\boldsymbol{a}_r = (k_1 + l_1)\boldsymbol{a}_1 + (k_2 + l_2)\boldsymbol{a}_2 + \ldots + (k_r + l_r)\boldsymbol{a}_r \tag{1.2.8}$$

となる．l_1 から l_r のなかにはゼロでないものがあるから，この右辺は (1.2.7) とは異なる係数で表されていることになる．つまり，$\boldsymbol{x}$ は二通り以上の表され方をした． □

定理 1.2.1 の証明

（補足）この定理は「一次独立であること」と「(1.2.3) の関係がなりたつこと」が同値である，と主張している．ここで，(1.2.3) そのものの主張は,「$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$ を解いたら，$k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$ の解しかない」と言うことだ（$k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$ ならば $k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$，の方はいつでも成り立つから面白くない）.

同値関係を証明しているので，両方の方向を別々に示す.（図で説明しよう.）

(一次独立ならば (1.2.3)，の証明)

対偶をとるのが簡単であろう．つまり,「(1.2.3) が成り立たないならば一次従属」をしめすのだ．(1.2.3) が成り立たないということは，すべてはゼロではないスカラー $k_1, k_2, \ldots, k_r$ があって，$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$ が成り立つ，と言うことだ．ゼロでない数を例えば k_1 とすると，両辺を k_1 で割ってから移項して

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{v}_2 - -\frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{v}_3 - \ldots - \frac{k_r}{k_1}\boldsymbol{v}_r \tag{1.2.9}$$

と書ける．つまり，$\boldsymbol{v}_1$ が他のベクトルの一次結合で書けたので，一次従属と言えた.（$k_1 = 0$ の時は，他に絶対ゼロでない k_j があるはずだから，それで割って同じ議論をすればよい.）

((1.2.3) ならば一次独立，の証明)

やはり対偶をとるのが簡単であろう．つまり,「一次従属ならば (1.2.3) が成り立たない」をしめすのだ．一次従属と言うことは，あるベクトルが他のベクトルの一次結合で書けると言うことだ．例えば，$\boldsymbol{v}_1 = k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + k_r\boldsymbol{v}_r$ と書けたとしよう．これは移項すると

$$(-1)\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + k_3\boldsymbol{v}_3 + \ldots + k_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0} \tag{1.2.10}$$

と言うことであるから，(1.2.3) の条件が満たされていない． □

1.3 基底

（ここは教科書の 1.3 節の内容である.）

さて，先の例の（あ，い，う，え）では（あ，い）が一番幸せである，と書いた．その理由は $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ などの線形結合で一意的に書けたからである．ここでは特定の $\boldsymbol{x}$ を問題にしたが，どんな $\boldsymbol{x}$ でも線形結合で書くことはできるだろうか？できるとすれば，どのようなベクトルを持ってくるべきだろうか？この問いに答えるために，名前を付けた：

r 個の n 項列ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は以下の２つの条件を満たすとき，$\mathbb{R}^n$ の基底と呼ばれる．

- すべての n 項列ベクトルが，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の一次結合で書ける（「$\mathbb{R}^n$ を生成する」と言う）．
- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立である．

（実は，$r = n$ であることが後でわかる．）
教科書にはないが，ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ からなる基底を $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ と書くことがある．

Remarks.

1. 基底という場合，順序も区別する．例えば $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}$ は異なる基底とみなす．
2. 上の２つの条件はどちらも大事である．一つ目の条件は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ が十分にたくさんあって，他のベクトルをそれらの一次結合で書けることを要求している．２つ目の条件は逆に，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ はそれほど多くなく，他のベクトルを書き表すやり方が一通りである，ことを要求している．
3. 上の「基底」の定義は,「一次結合で書ける」「一次独立」の２つがわかっていればわかるものであるが，基底が実感としてわかるにはある程度の慣れが必要だろう．基底の感覚が身に付けば，線形代数の半分はできたと言ってもよいかな...
4. 上の箱の中に書いた「実は $r = n$ である」の証明はそれほど簡単ではない．次の章で連立方程式をやってから戻ってくることにしよう．

重要な基底の例として，標準基底がある．これは

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \cdots, \qquad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.3.1}$$

という，n 本のベクトルからなる組である．

（少し先取りした解説）秋学期に「線形変換」をやると，標準基底以外の基底を考えたくなる（「線形変換」の「固有ベクトル」を基底のベクトルにとりたい；ここのところはわからなくて良い）．また，５月にはいると，$\mathbb{R}^n$ 全体ではなく，その「一部分」（部分空間と言う）を考えることもする．この場合，$\boldsymbol{e}_j$ がその部分空間に入らないこともある．これらの理由で，標準基底以外の基底も考えていく．

いくつか基底の例を挙げよう．成分が多くなると大変なので，まず $n = 2$ のとき，

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \tag{1.3.2}$$

はそれぞれ $\mathbb{R}^2$ の基底である（最初のは標準基底ね）．一方，

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \tag{1.3.3}$$

はすべて，基底ではない（why?）．

（基底のイメージ：図で説明しよう．）

５月７日の連絡：先週のプリント，(1.2.9) の下で「$k_1 = 1$ の時は」とあるのは,「$k_1 = 0$ の時は」のマチガイです.
今日のキーワード：連立一次方程式と掃きだし法

第３回レポート問題： 掃きだし法の練習問題です．来週は基底などとの融合問題になります．毎度のことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問３： 以下の連立方程式系を（掃きだし法で）解きなさい．ここで a, b, c, d は実数の定数である．答え（解の存在など）は，a, b, c, d の値によって変わるかもしれないよ．

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = a \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = b \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = c \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = d \end{cases}$$

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

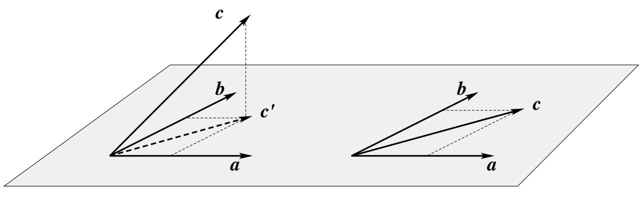
上の問１に解答し，

５月 12 日（月）午後５時までに，原の部屋（理学部１号館５０８号室）の前の封筒に
（注意：理学部１号館は午後６時を過ぎると入れないよ）

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください.（別にレポート用紙である必要はありません．また，用紙の裏にも解答してくれて一向にかまいません.）また,「番外」の問題はもちろん，成績には一切関係ないので，自由に回答してくれると助かります．

——————以下，レジュメの続き ——————

まず，先週からの宿題として，３項列ベクトルの空間 $\mathbb{R}^3$ の基底のイメージについて．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が基底であると言うのは，この３つが「別々の」方向を向いている，と言うことだ．下の図の (a) は基底になっているが，(b) では３つのベクトルが同一平面上にあるので，基底になれない.（図の見方：陰のついた平面内に $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が入っている．(b) では $\boldsymbol{c}$ までこの平面内にあるので，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が一次従属になってしまい，基底にはならない．(a) では $\boldsymbol{c}$ がこの平面から上にはみ出しているので，基底になる．この場合，$\boldsymbol{c}$ の先から平面におろした垂線の足を $\boldsymbol{c}'$ とした.）



(a) (b)

2 連立方程式と掃きだし法

今までのレポート問題でも連立一次方程式を解くことが必要になったので，この辺りで連立一次方程式の効率の良い解き方を考える．すると，今までの宿題（$\mathbb{R}^n$ の基底は丁度 n 個のベクトルからなる，など）への答えも得られるだろう．

2.1 行列と一次方程式系（記号の導入）

（教科書に該当する部分がない部分もあるが，簡単な定義などであるから，挿入する．該当部分は，教科書の p.12, 22, 23 と僕自身の付け足し.）

n 個の未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ についての方程式が m 個あって，それぞれの方程式が未知数について一次式以下であるとき，これを m 連立一次方程式系 と言う．この解の性質を調べるのがこの節の目的である．考えている方程式系は一般に係数 a_{ij} と b_i を使って

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots &= \cdots \\ \cdots &= \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases} \tag{2.1.1}$$

のように書ける．具体例としては,

$$\begin{cases} 2x + y - z = 9 \\ x + y - z = 2 \\ 2x + 4y - 3z = 16 \end{cases} \tag{2.1.2}$$

を挙げておこう（この場合，$n = m = 3$ である．各自，a_{ij} と b_i が何にあたるか，確認すること）.

後の書き方を簡単にするために，少しだけ記号と定義を導入する．上の方程式系の左辺にて出てくる順序に係数をとりだすと,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots \\ \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

と言うものになる（後のためにこいつを A と置いた）．このように縦に m 個，横に n 個の数が並んだものを $m \times n$ 行列 と言う．行列の成分の横方向の並びを行と言う．上の例では上から 1 行，2 行，と来て，全部で m 行ある．また，成分の縦の並びを列と言う．上の例では左から 1 列，2 列，と来て，全部で n 列ある.

皆さんは高校で 2×2 行列を学んだはずだ．その一般化である．なお，この講義では大抵，行列 A の ij 成分を a_{ij} と書く（上の式でわかるように，a_{ij} とは上から i 番目，左から j 番目のところ — つまり，i 行と j 列 — に入っている成分のこと）.

ついでに，列ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2.1.4}$$

も導入しておこう.（更におまけ．n 項列ベクトルは，$n \times 1$ 行列，とも言える.）

さて，ここで，行列とベクトルの積を定義する．$m \times n$ 行列 A と ℓ 項列ベクトル $\boldsymbol{x}$ の積 $A\boldsymbol{x}$ は $n = \ell$ の時のみ定義され，成分が以下で与えられる m 項列ベクトルになる：

$$(A\boldsymbol{x} \text{ の } i \text{ 成分}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.1.5}$$

このように書くとややこしいが，要するに，(2.3.5) の左辺が丁度 $A\boldsymbol{x}$ になっている（そうなるように行列とベクトルの積を定義した）．この定義によると，(2.3.5) は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{2.1.6}$$

と簡略化して書くことができる．

（斉次と非斉次）

すぐ見るように，連立方程式系は $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ かどうかで，その性質がかなり異なる．そこで，右辺の b_j がすべてゼロの方程式系を斉次の方程式系と言う．右辺に一つでもゼロでないものがある場合，これを非斉次の方程式系と言う．

以下は教科書には明記されていないが，すぐにわかる重要な性質である．

（１）どんな斉次の方程式系でも，少なくとも一つは解をもつ．つまり，$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ はいつでも解だ．

（２）斉次の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解と，非斉次の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の間には以下のような特別な関係がある：たまたま，$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ となるような $\boldsymbol{y}$ が見つかったとすると，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の任意の解 $\boldsymbol{x}$ を，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ と書くことができる．ここで $\boldsymbol{z}$ は適当な $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解.

（１）はそのまんまだが,（２）は少し説明が必要だろう.（２）は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解く仕事が，部分的に $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解く仕事にすり替えられる，ことを主張している．つまり，何らかの偶然で（もしくは勘で）$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ となるような $\boldsymbol{y}$ を一つだけ見つけてやれば，それ以外の解は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解を足しあわせることで得られる，と言うわけだ．この性質は連立方程式系ではそれほどうれしいものではないが，将来，皆さんが微分方程式などを扱うようになると，かなり嬉しいものであることがわかるだろう．

（２の証明）

$A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ となるような $\boldsymbol{y}$ があったとして，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ なる任意の $\boldsymbol{x}$ を持ってきたときに，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ が斉次の方程式を満たすことを言えばよい．でもこれは行列とベクトルのかけ算が分配法則を満たすことから，

$$A\boldsymbol{z} = A\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = A\,\boldsymbol{x} - A\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{2.1.7}$$

となって，実際に $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ が斉次方程式の解であることがわかった． □

註： 上の性質はあくまで，非斉次方程式系の解が一つ見つかったとき，にのみ有効である．後で見るように，非斉次方程式には解がないことも多々ある．

2.2 掃きだし法

連立一次方程式を解くのである．ここはほとんど，教科書の 2.1 節（pp.12–15）であるが,「ベクトル表示」を使ったところは後に回す．この節では

- 「掃きだし法」を使って連立一次方程式が解けるようになること．
- 一次方程式系の解の様子には３つの可能性があることを理解すること．
  - 解が全く存在しない（不能）
  - 解が存在し，一意に定まる
  - 解が無数にたくさん存在する（不定）

ができればよい．

さて，このような連立方程式を効率よく解くことを考えよう．実のところ，連立方程式を解くのなら，人間よりパソコンの方がよほど速い．しかし,（１）計算機といえども（計算機だからこそ）アホなマチガイをすることがあり，解法を知っていてチェックすることが大事,（２）解き方の原理を知っておくことは，より発展した問題を将来解くときに役に立つ（３）解法を知ることで，宿題になっていた理論的な問題にも方がつく，のような理由から，ここで整理しておくことにする．

連立方程式を解くのは，原理的には簡単だ．一つの方程式を選んで，一つの未知数について解き，それを残りの方程式に放り込む（要するに，一つの変数を消去する）．すると，もとより未知数も方程式の数も一つずつ少ない

方程式系が得られる．そこで，この新しい方程式系からまた一つの変数を消去する．以下，これをくり返して一つだけの方程式になればよい．

しかし，これを実際にやるのはなかなか大変だ（ウソだと思ったら，未知数が５個くらいある，５連立方程式でやってごらん）．そこで，もう少しマシな方法として考案されたのが「掃きだし法」である．ダラダラ書くより，例で説明する方が速い．教科書の例題 2.1 を用いる：

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 9 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 16 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 16 \end{array}\right] \tag{2.2.1}$$

を解こう．要するに同値な方程式の組に変形していくのだ．教科書よりも少しだけ詳しく書くが，それぞれの段階で何をやったかは講義中に説明する．

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & z & = & 9 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 16 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 16 \end{array}\right] \tag{2.2.2}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & - & y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 16 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 & 16 \end{array}\right] \tag{2.2.3}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & - & y & + & z & = & 5 \\ & + & 2y & - & z & = & 12 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 12 \end{array}\right] \tag{2.2.4}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & - & y & + & z & = & 5 \\ & & & + & z & = & 22 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 22 \end{array}\right] \tag{2.2.5}$$

これで大体，できた．$z = 22$ が求まったので，こいつを真ん中の式に入れて y について解くと，$y = z - 5 = 17$．これらを一番上に入れて x について解くと，$x = -y + z + 2 = 7$．２段階に分けて書いとくと，以下のようになる．

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ & - & y & & & = & -17 \\ & & & + & z & = & 22 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 22 \end{array}\right] \tag{2.2.6}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 7 \\ & y & & = & 17 \\ & & z & = & 22 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 22 \end{array}\right] \tag{2.2.7}$$

上でやったことは，以下の３つの操作の繰り返しである：

(0) ２つの方程式の順序を入れ替える．
(a) １つの方程式に，別の方程式の定数倍を加える．
(b) １つの方程式にゼロでない数をかける．

この３つの操作のそれぞれについて，操作の前と後では，方程式の解の集合は変わらない（不変である）．つまり，これらは方程式系に対する同値変形になっているわけで，掃きだし法とは，この３つの同値変形をくり返して，方程式をわかりやすい形に変形する方法の事である．

ここで「わかりやすい形」とは，(2.2.7) のように未知数について解ききった形，または (2.2.5) のように階段状になっていて，下の方から順に上に代入して解けるようになっている形，を言う．上の３つの変形を使うと，いつでも少なくとも (2.2.5) のような階段状に持っていけることがわかる（why?）．ただし，(2.2.7) の形にまで行けるかどうかはわからない．

（行列との関係）

上の変形をよく見ると，いちいち x, y, z と書かなくても，その係数だけ取り出して，同様の計算をやれば良い．この部分を上では右側に書いてある．この行列に対する操作は，以下の３つという事になる．

(0) ２つの行を入れ替える．

(a) １つの行に，別の行の定数倍を加える．

(b) １つの行にゼロでない数をかける．

では，これから一次方程式系には３つの場合があることを例を使って学習しよう．上の例題 2.1 は典型例で，未知数も方程式の数も３個ずつ．この場合，上で解いた結果によると，解が存在して一意に定まった．

しかし，そうでない例もある．教科書の例題 2.2 が一例である：

$$(1)\quad \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x - 2y + z = 6 \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 4 \end{cases} \tag{2.2.8}$$

この場合（解き方は各自やってみること；教科書にも書いてある），掃きだし法で解いた結果は

$$(1)\quad \begin{cases} x - y = 2 \\ z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x - y = -2 \\ z = 4 \\ 0 = -6 \end{cases} \tag{2.2.9}$$

となる．（１）の方は，$z = 2$ かつ，$x = y + 2$ なら何でも良い．つまり，t を任意の実数として，$x = t + 2, y = t, z = 2$ が解なのである．この場合，解は無数にあるわけだ．

一方，（２）の場合は一番下の式が矛盾している．x, y, z をどのようにとっても，この３つを満たすことはできない．つまり，もともとの（２）のは存在しないのだ．

以上を多少強引にまとめると，連立一次方程式系の解については，以下の３つの可能性があることがわかる：

(a) 解が存在し，一意的に定まる（教科書の例題 2.1 のように）

(b) 解が無数に存在する（教科書の例題 2.2 (1) のように）— 連立方程式系は「不定」であるという．

(c) 解が全く存在しない（教科書の例題 2.2 (2) のように）— 連立方程式系は「不能」であるという．

与えられた方程式系がこの３つのどれであるかは，一般には解いてみないとわからないが[1]，以下でもう少し考える．未知数の数を n，方程式の数を m とすると，$m = n$ なら (a)，$m > n$ なら (c)，$m < n$ なら (b) と言いたくなるが，これは一般には正しくないから注意のこと．（各自，反例を考えてみよう．）

2.3　行列の階数と解の構造

この節の内容は教科書の 2.1 節の一部分と 2.2 節である．

では，上に挙げた３つの可能性がどのようにして出てくるのか，連立方程式の一般論と併せて考えてみよう．

まず，連立方程式系とベクトルの一次独立，一次従属の関係などについて，少し見ておこう（教科書の pp.13, 15）．まず，一般の連立方程式系 (2.3.5) を以下のように書き直す．n 本の列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

[1]ただし，斉次の方程式の場合はいつでも「すべてゼロ」の解があるから，(c) の可能性はない

を導入すると，行列とベクトルの積を

$$A\,\boldsymbol{x} = x_1\,\boldsymbol{a}_1 + x_2\,\boldsymbol{a}_2 + x_3\,\boldsymbol{a}_3 + \ldots + x_n\,\boldsymbol{a}_n \tag{2.3.2}$$

と書くことができる（各自，確かめよ）．従って，元々の連立方程式系 (2.3.5) は

$$x_1\,\boldsymbol{a}_1 + x_2\,\boldsymbol{a}_2 + x_3\,\boldsymbol{a}_3 + \ldots + x_n\,\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b} \tag{2.3.3}$$

という方程式とも考えられる．これで見て取れることは２つある．

（１）$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の斉次方程式の場合：(2.3.3) はベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立か否かを判定する方程式そのものになっている（こいつがゼロ以外の解を持つなら一次従属，ゼロしかないなら一次独立）．つまり，斉次方程式の解が一意に（「すべてゼロ」に）決まるかどうかは，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立か否かにかかっている．

（２）$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ の非斉次の場合：(2.3.3) は $\boldsymbol{b}$ がベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の線形結合で書けるかどうかを判定する式に他ならない．つまり，非斉次方程式の解があるか否かは，$\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の線形結合で書けるかどうかで決まる．また，書ける場合，その書き方が一意かどうかは，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が一次独立か否かで決まる．

以上はまあ，今までやってきたレポート問題の解答を逆から見ただけの事である．ただ，方程式の係数をまとめてベクトルとしてみると，その係数ベクトルの一次独立・従属が解の存在や一意性と関係していることは知っていて損はない．

行列の階数の話に入る前に，今までの宿題の一つを片づけておこう．

（$\mathbb{R}^m$ において，$m+1$ 本以上のベクトルが一次従属であることの初等的証明）

ベクトルが n 本あるとする（$n > m$）．これらが一次独立か従属かを判定するには，方程式

$$x_1\,\boldsymbol{a}_1 + x_2\,\boldsymbol{a}_2 + x_3\,\boldsymbol{a}_3 + \ldots + x_n\,\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \tag{2.3.4}$$

を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ について解き，解が「すべてゼロ」に限るかどうかを見れば良かった（定理 1.2.1）．我々は一次従属だと言いたいのだから，これがゼロでない解を持つ，と言いたい．

そこで，この方程式を掃きだし法で解く．2.2 節の基本操作を繰り返し，できるだけ簡単な形になるように，頑張るのである．ここで「簡単な形」というのは，(2.2.5) のような階段状のものを指す.（黒板で説明するように，いつでもこの階段状の形には持っていける.）具体的には

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + a'_{14}x_4 + \cdots + a'_{1n}x_n &=& 0 \\ x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 + \cdots + a'_{2n}x_n &=& 0 \\ x_4 + \cdots + a'_{2n}x_n &=& 0 \\ \cdots &=& \cdots \\ x_\ell + \cdots &=& 0 \end{array}\right. \tag{2.3.5}$$

のような形になっている.（上では３行目が x_4 から始まっているが，そうとは限らない．だけど，このように階段状になるのは間違いない.）

さて，階段状になれば，どのような解があるかは明らかになる．つまり，下の方から順次解いていけばよい．このとき，一番下の式が２つ以上の x_i を含んでいればこれで証明終わりである．と言うのも，そのような式は必ず,「すべてがゼロ」とは限らない解を持ち，これを上のそれぞれの方程式に代入して解けば，ゼロでない解が得られるからである．

不幸にして一番下の式が

$$x_n = 0 \tag{2.3.6}$$

となっていれば，ここでは話がすまない．これを上のところにすべて代入し，x_n をなくした式を改めて解く．下から２番目の式が $x_{n-1} = 0$ でなければオシマイ．もし x_{n-1} ならもう一つ上を見る．こうやって上っていくが，方程式の数が未知数の数より多いから，絶対にどこかでゼロ以外の解が入ってくるはずである.（このところはすぐ後で，行列の「階数」と関連させてもう一度扱う.） □

５月１４日：連絡というわけではないが：

- 進度について．第３回のレポートはかなりの人が苦戦している一方で,「掃きだし法みたいな簡単なところは速く軽くやってくれ」との意見も聞かれた．ここは非常に苦慮するところであるし，個人的には「大学の講義なんだから上位 20% をこそ相手にすべきである」と思うところもある．しかし，この講義は必修である上に，入学時からある程度の学力差があったものとも考えられるので，余り進度を上げることはやりにくい．つまり，この講義では上位 10% の人を退屈させないことはできないだろうと思われるので，余裕のある人は自分で参考書をよむなり，講義の後で雑談に来るなり，して補って頂けるとありがたい．また，当初に宣言したとおり，自己責任で講義に出ないのは一向に構わない．
- ただし，来週は教える側の間で鬼門とされている「関数空間」の話を少しだけやる予定なので，退屈している人でも出席すると少しは良いことがあるかも．
- 第３回のレポートの採点について：厳密につけるのは短時間ではとても不可能なので，考え方があっているかどうかを重点的にみた．従って，A になっている人でも細かい計算マチガイをやっている人もいるかもしれない．自分で細部はチェックのこと.（初めに宣言したように，レポートは半分以上が提出点だから，このような付け方も許されるでしょう.）

今日のテーマ：連立一次方程式の解の空間と部分空間

第４回レポート問題：線形方程式を解いた上で，その解の空間の基底を求める問題です．毎度のことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問４： （１）以下の連立方程式系を解け.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

（２）その解の空間，つまり，下の方程式を満たす x_1, x_2, x_3, x_4 によって作ったベクトル $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ の全体，を考え，これを W と書こう．以下でやるように W は $\mathbb{R}^4$ の部分空間になっている．この W の基底を一つ，求めよ．

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ.

レポート提出について：

上の問に解答し，

５月 19 日（月）午後５時までに，原の部屋（理学部１号館５０８号室）の前の封筒に
（注意：理学部１号館は午後６時を過ぎると入れないよ）

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ（最低限の礼儀だぞ）．また,「番外」の問題はもちろん，成績には一切関係ないので，自由に回答してくれると助かります.

―――――――――――――――――-先週のレポートの解答 ―――――――――――――――――

まず，先週のレポートの解答．時間節約のため，印刷した．ともかく掃きだし法で解くのである．拡大係数行列は

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & | & a \\ 4 & 2 & -1 & 1 & | & b \\ 2 & 1 & 1 & 2 & | & c \\ 2 & 1 & 2 & 3 & | & d \end{bmatrix} \tag{2.3.7}$$

なので，基本変形を用いて，できるだけ階段状になるようにする．いろいろなやり方があるが，たとえば，

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & | & a \\ 4 & 2 & -1 & 1 & | & b \\ 2 & 1 & 1 & 2 & | & c \\ 2 & 1 & 2 & 3 & | & d \end{bmatrix}
\Longrightarrow
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & | & c \\ 2 & 3 & 2 & 1 & | & a \\ 2 & 1 & 2 & 3 & | & d \\ 4 & 2 & -1 & 1 & | & b \end{bmatrix}
\Longrightarrow
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & | & c \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & a-c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & d-c \\ 0 & 0 & -3 & -3 & | & b-2c \end{bmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & | & c \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & a-c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & d-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 3d+b-5c \end{bmatrix}
\tag{2.3.8}
$$

ここまで来て死んでいる人がいた．わからなくなったら，元の未知数入りの形に戻せばよいのだ．元に戻すと

$$
\begin{cases}
2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = c \\
\qquad 2x_2 + x_3 - x_4 = a-c \\
\qquad\qquad x_3 + x_4 = d-c \\
\qquad\qquad\qquad 0 = 3d+b-5c
\end{cases}
\tag{2.3.9}
$$

となる．望み通り，階段状になったので，下から見ていこう．まず，$0 = 3d + b - 5c$ であるが，これが満たされるような b, c, d でない限りは，x_1 から x_4 をどのようにとってもこれを満たせない．つまり，

$$
3d + b - 5c = 0 \tag{2.3.10}
$$

の時のみ，解があることになる．（これ以外では解はない，つまり不能である．）

さて，(2.3.10) が満たされているとき，(2.3.9) の他の式を見てみると，$x_3 + x_4 = d - c$ は x_3 または x_4 の片方からもう片方を決める式と考えられる．そこで，t を任意の数として

$$
x_4 = t, \qquad x_3 = d - c - t \tag{2.3.11}
$$

と解くことができる．その上の式は，このように解いた x_3, x_4 を代入すると，x_2 を決める式と考えて良い．つまり，

$$
2x_2 + (d - c - t) - t = a - c \qquad \Longrightarrow \qquad x_2 = \frac{1}{2}\Bigl(a - d + 2t\Bigr) \tag{2.3.12}
$$

最後に，これらを (2.3.9) の一番上に代入して，x_1 について解くと，

$$
2x_1 + \frac{1}{2}\Bigl(a - d + 2t\Bigr) + (d - c - t) + 2t = c \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = c - \frac{d}{4} - \frac{a}{4} - t \tag{2.3.13}
$$

と解けた．ベクトルの形にまとめると，

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - \frac{a+d}{4} \\ \frac{a-d}{2} \\ d - c \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad t \text{ は任意} \tag{2.3.14}
$$

と書けることがわかった．（ただし，先に見たように，この解は (2.3.10) が成り立っているときのみ，存在する．）(2.3.9) のように階段状にすることで，上の方程式から下の方程式への制約はなくなったことを十分に味わって欲しい．

——————————以下，レジュメの続き ——————————

さて，掃きだし法をやったついでに，行列についての新しい概念を導入しよう：

> $m \times n$ 行列 A を考える．その n 個の列ベクトルのうち，一次独立なものの最大の個数を 行列 A の階数（rank）とよぶ．

実は，上の定義で，m 個の行ベクトルのうち，一次独立なものの最大の個数を考えると，これも上の階数と同じになるのであるが，ここでは触れない．

この行列の階数は，後で「一次変換」をやるときに非常に重要になるが，ここではそれには立ち入らず，どのように階数を計算するかに触れるにとどめる．

階数の計算法：（連立一次方程式系の係数行列にたいしてやったのと同じ）以下の基本操作

(0) 2つの行を入れ替える．

(a) 1つの行に，別の行の定数倍を加える．

(b) 1つの行にゼロでない数をかける．

をくり返して，階段状にした場合，ゼロでない数の入った行の数がその行列の階数になる．つまり，この操作をやることで，行列に入っている独立な行の数が，基本変形をやることでわかるのである．

（上の計算法が正しい理由—大まかな感じ—は講義で述べる．）

この後，教科書の 2.2 節，2.3 節には補足的な注意がいくつか載っている．

2.4 $\mathbb{R}^n$ の部分空間と解の空間

（この節の内容は教科書から少しはみ出している．部分空間の定義そのものは教科書の p.73 にある．）

漸く，少しは面白いところにきた．今までに「基底」の概念を導入し，実際に基底になっているかどうかの判定もやってもらった．しかし，これまでに考えたのは n 項列ベクトルの全体，つまり $\mathbb{R}^n$ であった．これは $n = 2, 3$ の場合には2次元や3次元でのベクトルの集合だったから，イメージも湧きやすかったはずだ．特に2次元なら2個，3次元なら3個の「別々の」方向を向いたベクトルが必要，ということは，前に配ったプリントでも図を描いて説明した．

これではちょっと簡単すぎて面白くない．そこで，将来を見越して，「部分空間」の概念を導入しよう．

> $\mathbb{R}^n$ の部分集合 W は，以下の3つの条件を満たすとき，$\mathbb{R}^n$ の部分空間である，と言う：
>
> (0) $\mathbf{0} \in W$
>
> (1) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ ならば $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$
>
> (2) $\boldsymbol{x} \in W$ ならば，任意のスカラー k に対して $k\boldsymbol{x} \in W$

「部分空間」の概念は，実はもっと一般に「線形空間」と言うものを定義した上で扱うのがよい．しかし，一気にやると大変なので，今日のところは $\mathbb{R}^n$ のなかで話をする．来週，一般の線形空間の話をサワリだけやる．

ショウモナイ例であるが（こんなショウモナイ例を入れるから数学嫌いが増えるという気もするが），$W = \mathbb{R}^n$ ととると，上の3条件が満たされるので，$\mathbb{R}^n$ 自身は自分自身の部分空間と言える．

もっと意味のある例：$\mathbb{R}^n$ の r 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を持ってきて，これらの線形結合全部の集合

$$W \equiv \left\{ k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + k_r\boldsymbol{v}_r \;\middle|\; k_1, k_2, \ldots, k_r \text{ は実数} \right\} \tag{2.4.1}$$

を考えると，この W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間になっている（各自，条件をチェックせよ）．

さてさて，ここで唐突に部分空間が出てきたのには，理由がある：未知数が n 個の m 連立一次方程式系（斉次）

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \tag{2.4.2}$$

を考える（ここで A は $m \times n$ の係数行列，$\boldsymbol{x}$ は n 個の未知数を並べた n 項列ベクトル）．そこで，この方程式の解全体を W とする．つまり，W とは，上の方程式を満たすような $\boldsymbol{x}$ 全体だ．すると，W が $\mathbb{R}^n$ の部分空間になっているのである（why?）．そこで，この部分空間についても「基底」を考えてみよう，と言うのが，今日のねらいだ．まずは昔の基底の定義を今にあうように書き直しておく．

部分空間 W の r 個のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は以下の 2 つの条件を満たすとき，W の<u>基底</u>と呼ばれる．

- W のすべての n 項列ベクトルが，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の一次結合で書ける（「W を生成する」と言う）．
- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立である．

このとき，r を W の<u>次元</u>と言う.（一般に，基底の取り方はいろいろあるが，どのようにとっても，基底を構成するベクトルの数 r は等しくなることが，後でわかる）．

註： 非斉次の方程式，つまり $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ で $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ の方程式，の解全体は部分空間にならない（why?）

例として，第 3 回のレポートでやってもらったものを使う．$a = b = c = d = 0$ の時の解は,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.4.3}$$

だった（t は任意）．この解全体を W とすると，W は確かに部分空間になっている（各自，チェック）．更に，この場合，W のすべての元はベクトル

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.4.4}$$

の線形結合（と言っても，ただのスカラー倍）で書けるから，このベクトルが W の基底になっている．この場合，解は 4 項列ベクトルで書けているが，4 つの成分が勝手な値をとることができない．そのために自由度ががくんと落ちて，基底はたった一つのベクトルからなっている．

もう一つの例.

$$\text{方程式} \quad x + y + z = 0 \quad \text{を満たす } x, y, z \text{ から作ったベクトル} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{の集合を } W \tag{2.4.5}$$

としよう．上の方程式を解くと，s, t を任意の実数として

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.4.6}$$

と書けることがわかる．このとき，$\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ は W の基底の一つになっている（各自，チェックのこと）．

ついでに：$\mathbb{R}^3$ の標準基底のメンバーは W の元にはなっていないことに注意.

５月２１日：先週の最後の方はちょっと時間切れで，かつ多数の人が慣れていないはずのところで，わかりにくかったかな．もう一回，説明します．
他の教室がすべてふさがっているので，教室変更の可能性はなくなりました．
今日のテーマ：部分空間（続き）と一般の線形空間
中間テストを６月４日（水）の２限（いつもの時間），この教室（3B)で行います．注意事項は以下の通り．

- 最終成績の出し方は初めに宣言したとおりだ．
- 試験範囲は，今までのところ全部だが，特に「次のベクトルの組は一次独立か」「あるベクトルを以下のベクトルの線形結合で書け」「このベクトルの組は基底になっているか」「連立方程式を解け」などがでるだろう．部分空間については，一問くらい出すかもしれないが，解けなくても十二分に単位はあるだろう．

第５回レポート問題：部分空間の定義がわかっているか，自分でやってもらう問題です．毎度のことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問５： ベクトル $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ の成分に対して，以下のように制限を付けて，$\mathbb{R}^3$ の部分集合 W を作る．この W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間になっているかどうかを考えて，部分空間になっていないものについては「なぜ部分空間でないのか」の理由を答えよ．また，部分空間になっているものについては，その基底を一つ，答えよ．

(1) W は $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ を満たすような $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ の全体.

(2) W は $x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$ を満たすような $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ の全体.

(3) W は $x_1 - (x_3)^2 = 0$ を満たすような $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ の全体.

(4) W は x_1 が整数であるような $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ の全体.

(5) W は $x_1 = 0$ または $x_2 = 0$ であるような $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ の全体.

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ.

レポート提出について：

上の問に解答し，

5 月 26 日（月）午後５時までに，原の部屋（理学部１号館５０８号室）の前の封筒に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ（最低限の礼儀だぞ）．また,「番外」の問題はもちろん，成績には一切関係ないので，自由に回答してくれると助かります.

——————————————-先週のレポートの解答 ——————————————

（総評）ある程度の人が苦戦してましたが，その大部分は「部分空間の基底」についてでした．他に少数の人が，連立方程式を解く段階で苦しんでいましたが，これは前回にも解説したところであり，ここでくり返して解説する余裕がありません．わからない人は講義の後にでも質問に来てください．

(1) ともかく，掃きだし法で簡単にし，未知数を戻すと（ここの形は何通りもあり得る，例えば）

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ \quad\ \ x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\ \ 0 = 0 \end{cases}$$

となる．これは先日も説明した「階段状」になってるから，下から解いていけば良い．一番下の式はいつでもなりたつ．真ん中の式は x_3, x_4 を任意の実数にとったときに x_2 を決める．一番上の式は，このように決めた x_2, x_3, x_4 に対して x_1 を決める．と言うわけで s, t を任意の実数として，$x_3 = s, x_4 = t$，$x_2 = 3(s+t), x_1 = -2(s+t)$ と解けるのだ．ベクトルの形で書くと，これは（s, t　を任意の実数として）

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(s+t) \\ 3(s+t) \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{（問 (2) のために，}\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ \text{と置く）}$$

となる．これが答え．

(2) 上で，任意の解は２つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の線形結合で書けることがわかった．つまり，この２つのベクトルは W を生成する，わけだ．更に，この２つのベクトルが一次独立であることは，

$$s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

となる s, t がゼロ以外にない，ことからわかる．従ってこのベクトルは基底である条件を満たしている．と言うわけで，基底の例は $\left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である．

なお，基底の取り方は一通りではない．上では $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ を基底にとったが，他の例として，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \rangle$ や $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \rangle$ など，いくらでもあり得る．この２つを具体的に書くと，それぞれ

$$\left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle, \qquad \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

となる．

——————————————-以下，レジュメの続き ——————————————

（まず，先週の補足）

部分空間の定義が少しわかりにくかった人もいるかと思うので，もう一回，説明．最大のポイントは，部分空間とは要求された性質をもつような集合だと言うことだ．つまり，$\mathbb{R}^n$ の部分集合 W が先週の定義にあるような性質を満たす場合，この W を部分空間，と言うのである．あくまで W 全体を見渡したときに，要求された性質を満たしているか，と問うているのであって，個々のベクトルだけを見ていても，判断できない．このところの感覚を身につけてもらえるような問題をレポート問題にしたので，考えてみて欲しい.（３次元の部分空間のイメージは次に.）

2.5 補足：連立方程式の解空間のイメージ

少し補足として，いままでにやってきた連立方程式の解の空間の幾何学的イメージについて，触れておく．

２次元の場合

まずはわかりやすい２次元の例から行こう．

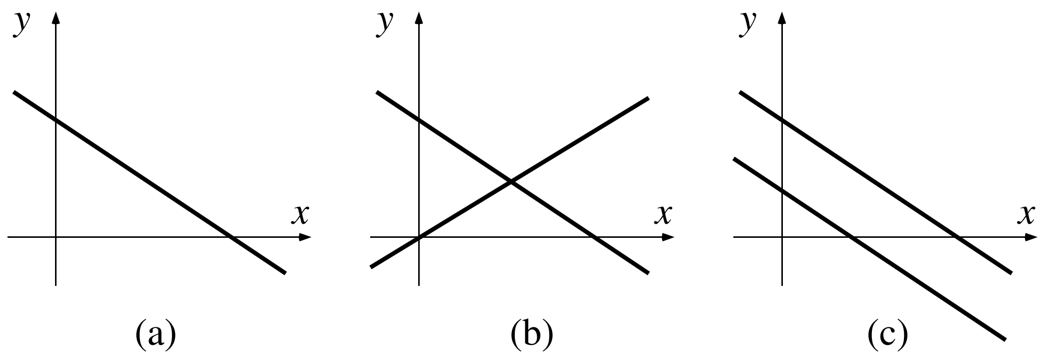
(1) 方程式 $ax + by = g$ （ただし $a^2 + b^2 \neq 0$）は xy-平面での直線を表すことは高校で十分にやっただろう（下図の (a)）．$g = 0$ の場合はこの直線は原点を通る．このとき，ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の全体 W は $\mathbb{R}^2$ の部分空間になっている（各自，確かめよ）．

(2) では次に，$d^2 + e^2 \neq 0$ として，連立方程式

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & g \\ dx & + & ey & = & h \end{array} \right. \tag{2.5.1}$$

を考える．２つの方程式はそれぞれ，xy-平面上での直線を表すので，この連立方程式の解 (x, y) はこの両方の直線上の点全体，つまり，２つの直線の交わりを表す．平面上に２つの直線を引くと，大抵は１点で交わる．つまり，この連立方程式の解は大抵は一つに決まるわけだ（下図の (b)）．

でも，解が一つに決まらない場合もある．それは２つの直線が平行になってしまった場合だ．この場合，２つの直線が重なれば解は無数にある（重なった直線そのもの）．一方，２つの直線が平行だけど重ならないならば，交わりはないのだから，連立方程式の解もない（下図の (c)）．なお，$g = h = 0$ の斉次の方程式の場合は，２つの直線は両方とも原点をとおるから，絶対に交点はある（つまり，原点）．これが「斉次の方程式は少なくとも一つ，全部ゼロの解を持つ」の幾何学的意味ね．



(a) (b) (c)

つまり，連立方程式の解の３つの場合分け（一意に決まる，不定，不能）には上のような幾何学的意味がつくわけである．なお，方程式の表す２つの直線が平行である条件は２つの方程式の左辺が比例することだ（各自，チェック！）．このとき，右辺まで含めて比例していると不定，そうでない場合は不能になる．ここのところは簡単な計算だから，掃きだし法の復習も兼ねて，各自で納得して欲しい．

３次元の場合

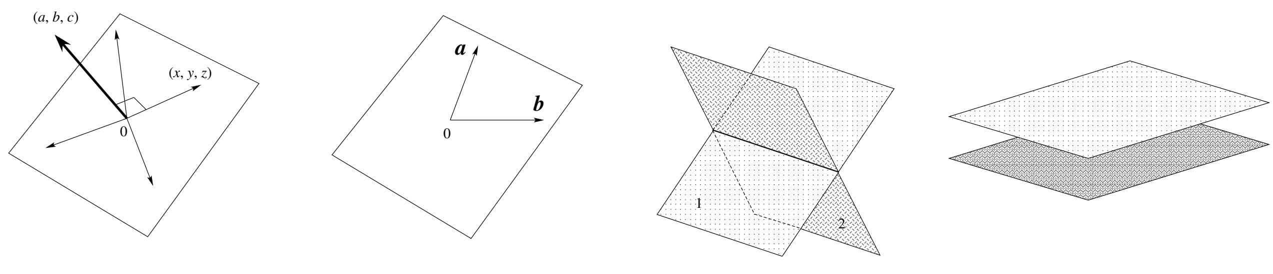
同様の考察を３次元に対して行おう．以下では定数 a, b, c, d, e, f には $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ かつ $d^2 + e^2 + f^2 \neq 0$ の条件が付いているものとする．

(1) $\mathbb{R}^3$ は，要するに我々の住んでいる３次元空間だ．ここで方程式 $ax + by + cz = 0$ を満たすような点 (x, y, z) の全体は「原点を通って，ベクトル (a, b, c) に垂直な平面」を表す．なぜかというと，$ax + by + cz$ は (a, b, c) と (x, y, z) の内積であり，$ax + by + cz = 0$ はこの内積がゼロ，つまり，２つのベクトル (a, b, c) と (x, y, z) が直交していることを主張しているからだ（次図の (a) 参照．太いベクトルは (a, b, c)，細いベクトルは平面内にある (x, y, z) 達のつもりである）．また，この平面が原点を通ることは，$x = y = z = 0$ が解であることからわかる．この場合，この方程式の解 x, y, z からなるベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ の全体 W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間になる（各自チェック）．このときの基

底は，図 (b) のように，平面内にある２つの独立なベクトルになる．座標軸方向の標準基底のベクトルは，一般にはこのような平面内になく，従って基底のメンバーになり得ないことに注意しよう．

(1′) 次に，非斉次の方程式 $ax+by+cz=g$ を考える（$g \neq 0$）．これも平面を表すが，原点は通らない．これを見るには，x_0, y_0, z_0 を $ax_0+by+0+cz_0=g$ を満たす定数として，この方程式が $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ と変形できることに注意すると良い．これはつまり，ベクトル (a,b,c) とベクトル $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ が直交することを意味しており，この方程式が「(x_0, y_0, z_0) を通って (a,b,c) に直交する平面」を表すことがわかる．

以上は，もともと３次元の空間であった $\mathbb{R}^3$ に一つの制限（条件）$ax+by+cz=g$ が加わったので，点 (x,y,z) の存在範囲が平面に制限された，と解釈できる．



(a) (b) (c) (d)

(2) 次に，２つの方程式の連立を考えよう：

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} ax & + & by & + & cz & = & g \\ dx & + & ey & + & fz & = & h \end{array}\right. \tag{2.5.2}$$

それぞれの方程式は何らかの平面を定めるので，連立方程式の解はこの２つの平面の交わりと言うことになる．２つの平面の交わりは大抵は直線になるから，この解の空間は大抵は一次元の直線になる（次図の (c)）．

ただし，これは２つの平面が同じ向きを向いていない場合である．もし平面が同じ向きを向いていたら（要するに，２つの方程式が互いに定数倍になっていたら），２通りの可能性が生じる．つまり，２つの平面が全く重なってしまう場合，２番目の方程式は新たな制限にはならないから，解は（一つ目の方程式で定まる）平面のママである．一方，２つの平面が同じ向きでありながら重なっていない場合，両者の交わりはない（次図の (d)）．つまり，この場合は解は存在しない（不能）のである．ここのところ，２次元平面内の直線の場合と対比させて良く納得すること．

(3) 更にもう一本の方程式があったらどうだろう？これも一つの平面を決めるから，解は一般に３つの平面の交わり（交点）になる．たいていの場合３つの平面の交わりは一点だけだから，解は一つに決まる（ここで図を描こうとしたのだが，うまく行かないのでやめた）．これが皆さんが普通に思っている「未知数３つで方程式の数も３つなら解は一意に決まる」の幾何学的意味だ．

しかし，(2) でも触れたが，方程式の具合によっては，そうはならない．初めの２本の方程式の交わりが直線であったとしても，３番目の平面が丁度，その直線を含んでしまう可能性もある．そうなれば，解は直線全体（つまり不定）と言うことになるのだ．また，３番目の平面と直線の交わりがない場合もあり，この場合は方程式は不能だ．(他にもいろいろな場合があるが，書ききれないのでここまで.）

４次元以上の場合

以上は２，３次元の話で，なんとなく想像することができた．残念ながら４次元以上ではこのような幾何学的イメージは難しい（そもそも４次元空間のイメージとは？）．けれどもともかく，それぞれの一次方程式が「超平面」（もとの空間より次元が一つ下がる）のようなものを表していて，その交わりが解になっている，と言うイメージは持っていると良いだろう．

3　おまけ：一般の線形空間

この節が前期の中では，一番難しいだろう.「よくわからない」と言う人がかなり出ることは覚悟の上である．この内容は「おまけ」と考え，テストに出すとしたら,「ボーナス問題」だ．だから，ここのところがわからなくても，悲観するには及ばない．次からはまた簡単な計算に戻るので，あきらめないで欲しい．
ただ，簡単な計算ばっかりやっていると「大学の数学」という気がしないので，敢えて少しだけ高度なことをやってみることにした．ある意味，将来への「展望」と言ったつもりで，気楽に聞いて欲しい．

今までにも数ベクトルの空間 $\mathbb{R}^n$ を考えたが，これは単に数が縦に並んでいるもので，高校からそんなに変わった感じがしなかっただろう．こんな事では大学に来た気がしない，と言う人のために，一般の「線形空間」を考えることにする．一部の人にとっては，これを知ることで,「線形代数」の深み，広がりがわかる（はずなんだけどお）.

3.1　線形空間の定義

まず，線形空間の定義だ．なんだか抽象的でよくわからんと思った人は少し我慢してくれ．すぐに例を出すから．
ベクトル空間（または線形空間）とは，以下の性質を満たす集合のことである．今まで通り，実数（または複素数）を「スカラー」と呼ぶことにする（「ベクトル」に対比して）．さて,「ベクトル」はもはや数の並んだものとは限らない．一般に以下の性質を満たすような集合の要素なら何でも良い，とするのだ．

定義 3.1.1 (線形空間) 集合 V が次の公理 I, II を満たすとき，集合 V を線形空間（ベクトル空間）と呼び，V の元を「ベクトル」と呼ぶ．
公理 I（ベクトルの加法） V の任意の 2 元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して「$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の和」と呼ばれる第三の元が V 内に定まり（この「和」を $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ と書く），以下を満たす（$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$）:

(I-1) 結合法則： $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$
(I-2) 交換法則： $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$
(I-3) ゼロベクトルの存在： V 内の特別な元 $\mathbf{0}$ が存在して，全ての $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ を満たす．
(I-4) 逆ベクトルの存在： V の各元 $\boldsymbol{x}$ に対して $-\boldsymbol{x}$ と書かれる V の元が存在し，$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

公理 II（ベクトルのスカラー倍） V の任意の元 $\boldsymbol{x} \in V$ とスカラー $k \in \mathbb{R}$ に対して「$\boldsymbol{x}$ の k 倍」と呼ばれる V の元が定まり（この「スカラー倍」を $k\boldsymbol{x}$ と書く），以下を満たす（$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ かつ $k, h \in \mathbb{R}$）:

(II-1) 結合法則： $h(k\boldsymbol{x}) = (hk)\boldsymbol{x}$
(II-2) 分配法則： $(h+k)\boldsymbol{x} = h\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{x}$
(II-3) 分配法則： $k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = k\boldsymbol{x}+k\boldsymbol{y}$
(II-4) スカラー倍の単位元： $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

註： このような感じの定義は「部分空間」でも出てきたが，要するに，上の条件を満たすような集合なら何でも線形空間，と言うのである．だから,「えっ」と言うようなものも線形空間になる（3.1.3 節参照）.

3.1.1　線形空間の例１：数ベクトルの空間

線形空間の典型的な例は今までやってきた「数ベクトル空間」である（上の定義を満たしていることを各自，確かめよ）．つまり，上で定義した一般の線形空間は数ベクトル空間の一般化を意図しているわけだね．
一般の線形空間が数ベクトル空間と非常に近い関係にある，ことは後の 3.2 節で説明する．

3.1.2 線形空間の例２：一次方程式系の解の空間

m-連立，n-未知数の斉次一次方程式系 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の集合は，今まで通りの「列ベクトル空間」の「和とスカラー倍」の定義を用いると，$\mathbb{R}^n$ の部分空間になることは既に見た．面白くないので次へ行こう．

3.1.3 関数のつくる空間

これが今回の目玉である．一見,「ベクトル」らしく見えないでしょ．

例 3-1： n-次 以下 の x の多項式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ （$a_j \in \mathbb{R}$）の全体は，多項式同士の「和」と「スカラー倍」を普通のように

$$(P+Q)(x) \equiv P(x) + Q(x), \qquad (kP)(x) \equiv kP(x) \tag{3.1.1}$$

と定義すると，線形空間になっている．この場合，ゼロベクトルは,「恒等的にゼロ」な関数になる（各人，チェックせよ）．

例 3-2： （上と対比せよ）n-次の x の多項式の全体は線形空間にはなっていない（why?）．

例 3-3： n-次 以下 の x の多項式の内，$P(1) = 0$ をみたすものの全体は例 3-1 と同じ「和」「スカラー倍」の下で線形空間になっている．

例 3-3$'$： n-次 以下 の x の多項式の内，$P(1) = 1$ をみたすものの全体は例 3-1 と同じ「和」「スカラー倍」の下で線形空間にならない（why?）．

例 3-4： 閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数の全体に例 3-1 と同じ「和」「スカラー倍」を入れると，線形空間になる．

例 3-5： a_1, a_2, a_3 を任意の実数として，$a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x)$ の形の x の関数の全体 W を考える．W も例 3-1 と同じ「和」「スカラー倍」の下で線形空間になっている．

例 3-5$'$： b_1, b_2, b_3 を任意の実数として，$b_1 \sin x + b_2 (\sin x)^2 + b_3 (\sin x)^3$ の形の x の関数の全体 W' を考える．W' も例 3-1 と同じ「和」「スカラー倍」の下で線形空間になっている．

上の例 3-5 と例 3-5$'$ に関しては，実は W と W' は同じものであることがわかる（倍角公式，３倍角の公式）．これはかっこいい言い方をすると，$\langle \sin x, \sin(2x), \sin(3x) \rangle$ と $\langle \sin x, (\sin x)^2, (\sin x)^3 \rangle$ が，ともに $W = W'$ の基底になっている，と言うことになるのだが，ここのところは来週のお楽しみ．

3.1.4 微分方程式の解のつくる空間（おまけのおまけ）

$f(x), g(x)$ を適当に与えられた関数とし，($y(x)$ の x-微分を y' で表して）微分方程式 $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ を満たす $y(x)$ の全体を考える．すると，これも例 3-1 と同じ「和」「スカラー倍」の下で線形空間になっている．

これはもっと一般の線形斉次微分方程式に対してもなりたつ．すなわち $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ が与えられた関数として，微分方程式

$$y^{(n)} + f_1(x) y^{(n-1)} + f_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + f_{n-1}(x) y' + f_n(x) y = 0$$

を考える（$y^{(i)}$ は $y(x)$ の x に関する i-階導関数）．この微分方程式を満たす解の全体は例 3-1 と同じ「和」「スカラー倍」の下で線形空間になっている．

５月２８日：一般の線形空間はわかりにくい人が続出することは覚悟している．繰り返しになるが，ここがわからなくてもそれほど問題ではないから，諦めないこと．
先週プリントの訂正：(講義中にも言ったけど）p.27 の線形空間の定義，I-2 の交換法則は，（誤）$\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ となっていたが，ここは （正）$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ が正しい．
今日のテーマ：一般の線形空間（続き）と少しだけ復習
中間テストを６月４日（水）の２限（いつもの時間），この教室（3B)で行います．注意事項は以下の通り．

- 最終成績の出し方は初めに宣言したとおりだ．
- 試験範囲は，今までのところ全部だが，特に「次のベクトルの組は一次独立か」「あるベクトルを以下のベクトルの線形結合で書け」「このベクトルの組は基底になっているか」「連立方程式を解け」などがでるだろう．
- 部分空間については，一問くらい出すかもしれないが，他ができれば十二分に単位はある．だから，部分空間がわからない人も，決して諦めずに試験を受けて欲しい．
- 一般の線形空間については出題しない可能性が高い．もし出題する場合も，線形空間の定義（先週プリントの定義 3.1.1）は問題用紙に採録する．
- 教科書の相当する部分は　第１節と第２節　が主である．ただし,「部分空間」は教科書では７３ページに少し載っているだけであるが，上に書いたように部分空間についても（教科書を少し超えて）出題されるかもしれない．

——————————先週のレポートの解答——————————

（総評）かなりの人が苦戦していました．問題は解けたけど部分空間がわかった気がしないと言う人と，解いているつもりでいろいろな見落としがある人が散見されました.「解けたけどわかった気がしない」については，ある程度の慣れも必要なので，仕方のない部分もあります．講義の後にもで気楽に雑談に来てくれると，少しは効果があるかもしれない．

(1) 部分空間にはなっている．講義中にも一般論として説明したが，部分空間の条件を３つとも確かめればよい．

後は基底をもとめるのだが，この方程式を解くと，x_2, x_3 を任意の実数として，$x_1 = 2x_3 - x_2$ となる．つまり，すべての解は適当な実数 s, t によって，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と書ける（この２つのベクトルは W を生成）．この２つのベクトルは（前回までのレポートのように確かめて）一次独立だから，部分空間の基底を作っている．つまり，基底は $\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である．なお，部分空間になっていることは，上の２つのベクトルの任意の線形結合が W をなすことからもわかる．

(2) 以下のものはすべて，部分空間にはなっていない．以下ではなぜなっていないのかを説明していく．基本は定義にある２つの条件,「$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ ならば $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W$」（和）,「$\boldsymbol{x} \in W$ かつ $k \in \mathbb{R}$ ならば $k\boldsymbol{x} \in W$」（スカラー倍），の両方をチェックするだけだ．

註： 部分空間の定義にはゼロベクトルの存在（$\mathbf{0} \in W$）も入っているが，これは（W が空集合でない限り）残りの２つから導出されるので，残りの２つをチェックすれば十分である．もちろん,「ゼロベクトルが入っていない」ことを確かめて,「だから部分空間ではない」と言っても構わない．実際，(2) はゼロベクトルを要素に持たないことはすぐわかる．

(2) 「和」,「スカラー倍」ともにダメだ. (反例) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は W の元であるが，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は W の元でな

い．また，$3\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}$ も W の元でない．

(3) 「和」,「スカラー倍」ともにダメだ.（反例）$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ は W の元であるが，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$ は W の元でない，つまり，$x_1=(x_3)^2$ が満たされない．また，$3\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}$ も W の元でない，つまり，$x_1=(x_3)^2$ が満たされない．

(4) 「和」の方はなりたっている．しかし,「スカラー倍」の方がダメである.（反例）$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\in W$ であるが，こいつの元の 1/2 倍を考えると，$\frac{1}{2}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}$ となる．これは第一成分が整数でないから，W の元ではない．

(5) 「スカラー倍」の方はなりたっているが,「和」の方がダメ.（反例）$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ はともに W の元であるが，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ は W の元ではない．

（いくつかの注意）

- W が $\mathbb{R}^n$ の部分空間であるとき，W の基底と，$\mathbb{R}^n$ の基底を混同しないこと．注意すべき点は 2 つある．
  - まず，W の基底を構成するベクトルは，W の要素である必要あり！
  - W の基底は，W のベクトルだけを，その線形結合として書ければ十分である．W は連立方程式の解として作ることが多いから，W のベクトルの各成分はもはや勝手な値はとれず，何らかの関係式（つまり，もともとの方程式）を満たしていることが多い．この意味で，W の基底が生成すべき空間は $\mathbb{R}^n$ の一部分にすぎず（だから W を部分空間と言うのよ），従って $\mathbb{R}^n$ よりも少ないベクトルで基底が作られる可能性がある．
- 部分集合と部分空間を混同しないこと !! レポート問題の (1)〜(5) の W はすべて $\mathbb{R}^3$ の部分集合ではある．しかし，上で解説したように，(2)〜(5) は部分空間ではない．
- (3) では，W の元を変な線形結合，例えば $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}t^2\\s\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}t\\0\\1\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$，の形に表して（$s,t$ は任意の実数），線形空間であると結論した人が多かったが，これはマチガイ．上の線形結合をよく見ると，ベクトルの成分に t が入っているではないか !! これではベクトル $\begin{bmatrix}t\\0\\1\end{bmatrix}$ は t とともに変わるから，基底ベクトルの一員などとはとても言えないよ．
- (3) ではいつでも $x_1\geq 0$ だから，スカラー倍で引っかかることはすぐにわかる．
- (4) では k が任意の実数でなければならない，ことを忘れた人が案外，多かった．
- (5) では $x_1=0$ または $x_2=0$ の条件を読み間違った人が大量にいたぞ．要するに，x_1 か x_2 のどちらかがゼロのベクトルが W の要素であるわけだ．W はあくまでこの片方の条件を満たしている集合の和集合であって,「$x_1=0$ の場合，$x_2=0$ の場合」と場合分けして良いものではない．

——————————以下，レジュメの続き ——————————

3.2 基底とベクトルの成分：なぜ，一般の線形空間が「数ベクトル空間」の親戚なのか？

関数の空間を例にとって，一般の線形空間がじつは数ベクトル空間と非常に近いものであることを説明しよう．

実のところ，線形代数が役に立つ場面では，ほとんど間違いなく，一般の線形空間を扱うことになるだろう．ところが，これから説明する「一般の線形空間と数ベクトル空間の近さ」のおかげで，一般の線形空間での問題を，数ベクトル空間での問題に焼き直すことができる．すなわち，数ベクトル空間を扱うことができれば，一般の線形空間の問題も扱えるのだ．この理由があるので，この講義では数ベクトル空間でのいろいろな問題をせっせとやっているのである．(そのぶん，面白くないわけだが...)

一般の線形空間と数ベクトル空間を関係づけるために，まず,「基底」を導入する．基本的にはいままでと同じだ．

> 線形空間 V の r 個のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は以下の 2 つの条件を満たすとき，V の基底と呼ばれる．
>
> - V のすべてのベクトルが，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ の一次結合で書ける（「V を生成する」と言う）．
> - $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立である．
>
> このとき，r を V の次元と言う．ただし，空間 V が非常に「大きい」場合は，r が無限大になることもある．

上の定義では，基底を構成するベクトル $\boldsymbol{v}_i$ は V の要素であることを強調しておこう．

部分空間のところで証明なしに宣言したのと同様に，一般に基底の取り方はいろいろあるが，どのようにとっても，基底を構成するベクトルの数 r は等しくなることが，後でわかる（と言っても，これを証明する暇はないだろうなあ）．

さて，この基底を使うと，数ベクトル空間との関係がつく．具体的には，以下で定義する「ベクトルの成分」を用いる．

> ベクトル空間 V とその基底 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ が与えられたとき，ベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ で展開
>
> $$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{v}_1 + x_2 \boldsymbol{v}_2 + x_3 \boldsymbol{v}_3 + \ldots + x_r \boldsymbol{v}_r$$
>
> したときの係数 $x_1, x_2, \ldots, x_r$ を,「ベクトル $\boldsymbol{x}$ の，基底 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r \rangle$ に関する成分」と言う．

さて，この定義によると，基底を一つ決めると，一般の線形空間の元 $\boldsymbol{x}$ に数ベクトル空間の元 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_r \end{bmatrix}$ を 1 対 1 対応させることができる．つまり，一般の線形空間を扱う場合，その要素 $\boldsymbol{x}$ （これはもはや，数ベクトルとは限らない）を直接扱う代わりに，$\boldsymbol{x}$ を基底で展開した成分から作った数ベクトル $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_r \end{bmatrix}$ を扱っても良い．この意味で，一般の線形空間は数ベクトル空間と意外に密接な関係を持っているのである．

註：

- 上で述べたベクトルの成分は,「どの基底に関して展開したか」で変わってくるので，どの基底に関して展開したかをいつも覚えておかないといけない．
- 「$\boldsymbol{x}$ の代わりにその成分の作る数ベクトルを扱っても良い」とは言っても，そうして良いかどうかは，どのような問題を扱うかに関わる．問題の性質によっては，もともとの $\boldsymbol{x}$ まで立ち戻って考える必要もでる．ただし，関数の作る線形空間と，その上での微分・積分に関しては,「数ベクトルと行列のかけ算」としてとらえることが可能だ．(詳しくは秋学期に少しだけ.)

少し例を見ていこう．

まず，例 3-1 について（一般の n は大変なので，$n=2$ で考える）：この空間の基底は何だろうか？一つの例は $\langle 1, x, x^2 \rangle$ で，この空間の次元は 3 である．実際，これが基底であることは（1）2 次以下の多項式はこれらの線形結合で書け（多項式の定義だ！），（2）これらが一次独立である（一次独立の定義にあわせてやってみる），ことからわかる．このとき，多項式 $P(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ のこの基底に関する成分は，$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ である．つまり，この多項式とベクトルを同じものと考えても良いのだ．

でも，別の基底の取り方もある．例えば，b を勝手な実数として，$\langle 1, x-b, (x-b)^2 \rangle$ を考えると，これも基底になっている．この場合，同じ $P(x)$ を展開した成分は当然，変わってくる．実際，$P(x)=a_2(x-b)^2+(2a_2b+a_1)(x-b)+(a_2b^2+a_1b+a_0)$ のように線形結合で書け，かつ $1, x-b, (x-b)^2$ は一次独立であるので，こちらの基底に関する $P(x)$ の成分は $\begin{bmatrix} a_2b^2+a_1b+a_0 \\ 2a_2b+a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ となる．

例 3-1 の一般の n の場合も同様であり，次元は $n+1$ であることがわかる．

例 3-4：閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数の全体を V とすると，V は線形空間である．この空間の基底と次元を考えたい（注意：この講義のレベルでは，完全な答えはでない）．

（まず，その前に，線形空間であることのチェック）やるべき事は線形空間の定義の I-1 から II-4 の条件をすべてチェックすることだ．$f,g \in V$ を 2 つの連続関数，k,l を勝手な実数とする．f,g の「和」として，新しい関数 $f+g$ と kf を

$$(f+g)(x) \equiv f(x)+g(x), \qquad (kf)(x) \equiv k\,f(x) \tag{3.2.1}$$

で定義する（この式の意味は，$f+g$ の x での値 $(f+g)(x)$ を，$f(x)$ と $g(x)$ の和で定義する，と言うこと）．すると例えば，I-2 は，各点の $x \in [a,b]$ ごとに，$(f+g)(x) \equiv f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x)$ となって，$f+g$ と $g+f$ の値がすべての x で一致するから満たされている．同様に,「すべての x でゼロ」なる関数を $\mathbf{0}$ と思うと，I-3 が成り立つ．また，逆ベクトルには $-f$ を用いると，I-4 も成り立つ．以下，このようにして一つずつチェックすると，ちゃんと条件が満たされていて，この V が線形空間であることがわかる．

（では，V の基底と次元だ）V の次元などを直接考えるのはちと難しいので，ここでは以下のように少し「逃げ」を打つことにする．V は $[a,b]$ 上の連続関数の全体であるから，特に，勝手な次数の多項式をすべて含んでいる.（多項式は，当然，連続関数だよね.）ところが例 3-1 で見たように，n-次以下の多項式の次元は $n+1$ なのだ（つまり，これらの多項式を線形結合で表すには，$(n+1)$ 本の基底ベクトルが必要と言うこと）．いま，V 中にはいくらでも高い次数の多項式が入っているのだから，これらの多項式を表すには，その次数より多いベクトルが必要である — つまり，この空間の<u>次元は無限大</u>だ．

通常は関数を「ベクトル」のようには思っていないが，その理由は上の例 3-4 にある．つまり，関数全体の空間は非常に大きくて次元が無限大なのだ．次元が無限大と言うことは一つのベクトルが無限個の成分を持っているので扱いにくく，むしろ今まで通りに扱った方が得と言うことになる．このために，今までは関数と線形代数の関係など全く出てこなかったのである．<u>しかしながら</u>，将来的には，ここで説明しているような「関数をベクトルと思う」ことが非常に効果的な場合も多々ある．その良い例は「フーリエ変換」と言うものである.（要するに，扱いたい問題にあった基底をうまくとると，無限成分のベクトルでも扱いやすくなる場合があるのだ．この点は秋学期にもう少し.）

中間試験対策を兼ねて，今まで習ったことのレジュメを自分で作ってみることをお奨めする．

６月９日：中間テストについては別紙で解説します.
今日のテーマ：逆行列の定義と求め方

第６回レポート問題：逆行列を求める練習です．毎度のことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．
問６： 以下の行列 A, B の逆行列をそれぞれ求めよ．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

６月 16 日（月）午後５時までに，原の部屋（理学部１号館５０８号室）の前の封筒に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ（最低限の礼儀だぞ）．また,「番外」の問題はもちろん，成績には一切関係ないので，自由に回答してくれると助かります．

————————————————————-以下，レジュメの続き ——————————————

4 逆行列

4.1 行列，その和と積

（高校でもある程度やったと思うので簡単に.）実数を縦に m 個，横に n 個，長方形に並べたものを $m \times n$-行列と言う.（行と列の定義は黒板で説明.）行列 A の i-行，j-列にある要素を $(A)_{ij} = a_{ij}$ と書く．

行と列の数が同じ行列を正方行列と言い，左上から右下への対角線上の成分を対角成分と言う．対角成分以外は全部ゼロ，の正方行列を対角行列と言う．対角成分がすべて 1 の対角行列を単位行列と呼ぶ．この講義（教科書）では $n \times n$ の単位行列を I_n と書く．最後に，すべての成分がゼロである行列をゼロ行列と言い，O と書く．

２つの行列 A, B はその行と列の数が等しく，かつ，対応するすべての成分が等しい時に限り，等しいといい，$A = B$ と書く．

２つの $m \times n$ 行列 A, B に対して，和 $A + B$ を定義することができる．$A + B$ も $m \times n$ 行列で，その i, j 成分は

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}, \qquad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n) \tag{4.1.1}$$

と定義する．つまり，対応する成分同士を足すのだ．

次に，$\ell \times m$ 行列 A と，$m \times n$ 行列 B に対しては，その積 AB を，

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (A)_{ik} (B)_{kj}, \qquad (1 \le i \le \ell,\ 1 \le j \le n) \tag{4.1.2}$$

なる成分を持つ $\ell \times n$ 行列として定義する．この定義から，行列の積はその順序による（つまり，一般に $AB \ne BA$）こと，および，AB が定義できても BA が定義できない場合もあること，に注意しておこう．

上の定義によれば，n 項列ベクトルは $n \times 1$ 行列とも考えられる（各自で納得）．

和と積について以下の法則が成り立つ（定義からすぐに出るから各自チェックすること）．ただし，以下の等式は両辺の演算が定義できているときのみ意味を持つ．

$$A(BC) = (AB)C, \qquad A(B+C) = AB + AC, \qquad (B+C)A = BA + CA, \tag{4.1.3}$$

$$I_m\, A = A\, I_n = A \qquad (A \text{ は } m \times n \text{ 行列}) \tag{4.1.4}$$

$$AO = OA = O \qquad (O \text{ はゼロ行列}) \tag{4.1.5}$$

4.2 逆行列

この節では，正方行列に話を限る．

> $n \times n$ 行列 A に対して，ある $n \times n$ 行列 X があって，$AX = XA = I_n$ となるとき，A は正則行列と言い，X を A の逆行列と呼ぶ．普通，A の逆行列は A^{-1} と書く．

註： 上では簡単のために XA と AX の両方が I_n に等しいことを要求したが，この片方が I_n に等しければ実は $AX = XA = I_n$ であることが証明できる．

註： 行列 A が正則の時，その逆行列は一意に決まることはすぐにわかる（証明は例えば，教科書の p.25 下半分）．

この小節の主な目的は逆行列の求め方を考えることである．例で説明する．$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよう．逆行列を $X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$ とおくと，X の満たすべき式は $AX = I_3$ である．これは行列の積を列ごとに分解して書くと，

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad A \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.2.1}$$

となるので，この 3 つの連立方程式を全部解けばよい．掃きだし法を使うと，これらの拡大係数行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 2 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \tag{4.2.2}$$

となっているので，左側の係数部分が $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ になるように基本変形をくり返せば良い．しかしよく見るとこの左半分の係数部分は 3 つとも共通だから，この 3 つをまとめて面倒見てやることも可能だ．つまり (4.2.2) の右半分をまとめて $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ と書いて，これに行の基本変形を行い，左半分を I_3 の形にするのだ．そのとき，右半分には $X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$ が出ているはずで，これが求める逆行列．この例では答えは $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ のはずである．

2×2 行列の時に以上をやってみて，高校の時にやった公式が出てくることを確かめよう．以上が腑に落ちない人はレポートなどをやってみて，納得しよう．

６月１８日：今日のテーマは逆行列を利用した連立方程式の解法，また行列の正則性の持つ意味など．

第７回レポート問題：逆行列を使って連立方程式を解きましょう．毎度のことですが，レポート問題は少な目に出しているから，足りないと思ったら各自，教科書の問題などで補ってください．

問７： 下の連立方程式を,（１）掃きだし法で,（２）逆行列を求めて $A^{-1}\boldsymbol{b}$ を計算する方法で，それぞれ解いてみよう．

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 - x_4 = b \\ x_1 + x_3 + x_4 = c \\ x_2 + x_3 + x_4 = d \end{cases}$$

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

６月 23 日（月）午後５時までに，原の部屋（理学部１号館５０８号室）の前の封筒に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ（最低限の礼儀だぞ）．また,「番外」の問題はもちろん，成績には一切関係ないので，自由に回答してくれると助かります．

——————————-先週のレポートの解答 ——————————

大体，良くできていましたが，何人か計算間違いをした人がいましたね．逆行列を求める問題は検算してみれば得られた答えが正しいかどうかわかるのだから，検算してくださいね．答えは

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

だ．解き方はどっちも一緒だから，A の場合だけ示す．掃きだし法で，左半分が単位行列になるように変形すればよい．

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

——————————-以下，レジュメの続き ——————————

4.3 逆行列と連立方程式

さて，せっかく逆行列をやったので，これを用いて連立方程式を解くことを考える．この方法は連立方程式が一意の解を持つときにしか使えないが，理論的にも興味深いので取り扱う．ついでに，基底などとの関係もつけておこう．

以前にも，連立方程式は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の形に書けることを注意した．ここでは特に，n 未知数，n 連立の方程式を考える．この場合，行列 A は $n\times n$ の正方行列．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{b}$ は n 項列ベクトルになる．

これらの連立方程式の簡単な解法は「掃きだし法」で，既にやったことである．であるが，少し別の見方をしてみよう．

今，係数行列 A が正則である（逆行列を持つ）場合を考える．$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の左から A^{-1} をかけると，

$$A\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{x}=A^{-1}\,A\,\boldsymbol{x}=A^{-1}\,\boldsymbol{b} \tag{4.3.1}$$

となる．つまり，未知数のベクトル $\boldsymbol{x}$ を A^{-1} を $\boldsymbol{b}$ にかける操作で計算することができるのだ．更にこの場合，解 $\boldsymbol{x}$ が一意に決まることも上で示された．（なぜなら，解 $\boldsymbol{x}$ は絶対に $A^{-1}\boldsymbol{b}$ で表されるが，この積は一意に決まるから．）

言うまでもなく，この方法は A が正則の時にしか使えない．また，連立方程式を一つ解くだけなら掃きだし法で解く方がよほど簡単である．しかしながら，右辺の $\boldsymbol{b}$ がいろいろ変わるような場合は，いったん A^{-1} を求めておけば，後は A^{-1} を $\boldsymbol{b}$ にかけることで答えが出るから，なかなか良いわけだ．また，この後で追々見ていくように，この解法には理論的な興味もある．

以上を基にして，行列 A を作っている列ベクトルと，$\mathbb{R}^n$ の基底の関係を考えてみよう．ここで言いたいのは

> $n\times n$ 行列 $A=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n]$ を考える．以下の 3 つは同値である．
>
> (1) A は正則行列である
>
> (2) n 本の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底をなす
>
> (3) 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は，任意の $\boldsymbol{b}$ に対して一意に定まる解を持つ

証明の概略は教科書の p.28〜29 に載っているが，以下にも述べる．

(1) ならば (3)：上で述べた（$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$）．

(3) ならば (2)：

まず，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ が一次独立である事を示す．$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ とした連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を考える．これはいつも，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ なる解を持つが，(3) の仮定の下ではこれ以外に解がない．ところが，この方程式は

$$x_1\,\boldsymbol{a}_1+x_2\,\boldsymbol{a}_2+\ldots+x_n\,\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0} \tag{4.3.2}$$

と言うことであって，この解が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ しかないと言うことは，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ が一次独立であることを意味する．

次に，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ が $\mathbb{R}^n$ を生成することを示す．でもこれは簡単．(3) によると，どんな $\boldsymbol{b}$ でも $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ の一次結合で書けることが保証されているから．

(2) ならば (1)：

逆行列を求めるために $AX=I_n$ を解くことを考える．X の列ごとにかんがえると，これは前回やったように，それぞれが $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の形の連立方程式に分解する．A を構成するベクトル $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ が $\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底をなすと言うことは，この連立方程式の解があると言うことだ．つまり，$AX=I_n$ なる行列 X の存在は保証された．

問題は $YA=I_n$ なる Y の存在を如何に示すかである（このとき $X=Y$ であることはすぐにわかる：$X=I_nX=YAX=YI_n=Y$）．これは前回も言ったように，それほど簡単ではないので，ここでは証明しない．しかし，一つの証明法が，3×3 の場合に，教科書の p.27 の下半分に説明されているので，これを参照してごまかすことにする． □

６月２５日：いよいよ春学期最後の題材「行列式」に入る．今日は定義部分に時間がかかるだろうから，レポート出題はない．

——————————-先週のレポートの解答 ——————————

レポートを出した人はほとんど良くできてました．ただし，３人ほど，計算間違いをした人がいます．不思議なことに，この人達は両方のやり方で同じ（間違った）答えになっている．謎だ... 　ともかく，どちらの方法でも検算できるんだから，検算を頑張ってください！

これらは単なる計算問題で，２０年前なら馬鹿にされたような問題です．ただ，昨今の学生さんには「最後の詰め」が甘い人が多い（計算ミスもその例）．日頃からの訓練を怠っていると，いざというときにも詰めが甘くなる可能性が高いので（数学に限らない），皆さんの注意をもう一度喚起しておきます.（こんな事を言ってるとイヤなオヤジそのものだが，それでも敢えて言っておく.）

この問題は今までの方法の復習みたいなもんだから，答えだけ載せます．A とその逆行列は

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

なので，連立方程式の答えは

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a+b+c \\ -a+b+d \\ 3a-2b-c-d \\ -2a+b+c+d \end{bmatrix}$$

もちろん，掃きだし法でやっても同じ事になる．なお，逆行列を求めるには，まず問題の連立方程式を掃きだし法で解いて，その結果に $a = 1, b = c = d = 0$ などを代入していって求めるやり方もある．

——————————-以下，レジュメの続き ——————————

5　行列式

この節では「行列式」について学ぶ．教科書では行列式に４節も使っているが，正直，そんなにたくさん使ってやるほどの題材ではない.（それより大事な概念はいっぱいある.）ただ，行列式の定義からはじめるとそれなりに時間をとられるので，春学期の残り４回で完成するように，適当に省略しながら進める．なお，この節の内容は概念的には難しいものではない（ハズだ）し，教科書にも詳しく載っているので，レジュメは簡単なものになる予定（これまでとは異なり，レジュメだけで十分とは思わないように.）

（本論にはいる前に：何のために行列式をやるのか？）

- 行列式にはいろいろな意味づけができるが，この講義にとって一番大事なのは,「正則行列＝行列式がゼロでない行列」と言うことだ．つまり，行列式を計算することで，その行列が正則か正則でないかがわかる．
- 「行列が正則か正則でないか」の判定は秋学期になると「行列の固有値と固有ベクトル」を求める上で不可欠になる．
- と言うわけで，行列式は秋学期になると重要になってくるので，その計算方法を知ることが重要なのである．

（少し進んだ注）

行列式の定義には大体，以下の３とおりがある.（以下では細かい用語などはわからなくても，大体の感じが伝わればよい.）これらは互いに同値で，どれかを定義にとって，残りの２つを証明することができる．

(a) 行列式の定義式を「置換」「互換」から陽に与える．
  – 長所：陽に定義式を与えているので安心できる．大方の教科書はこの方法であろう．
  – 短所：定義そのものが（置換・互換の定義から始めると）かなり長い．更に,「行列式の基本的性質」を導出した後では，このように苦労した定義はほとんど使わない．

(b) 「行列式の基本的性質」（定理 5.2.1) を満たすような多重線形汎関数として定義する．
  – 長所：一番大事な性質そのものを定義とするので，無駄がない．
  – 短所：そのような性質を満たすものが実際に存在するのか，存在するとして一意に定まるか（要するに定義がきちんとできているのか）の検証が案外と厄介で，結局，(a) の定義を導出することになる．

(c) $n \times n$ 行列の行列式を $(n-1) \times (n-1)$ 行列の行列式を用いて，帰納的に定義する．
  – 長所：2×2 行列の行列式は知っているから，定義そのものは明確.
  – 短所：帰納的に定義しているから,「行列式の基本的性質」などを導くのが厄介.

いろいろと考えたのだが，この講義では教科書通りに (a) の方針に従うことにする（この講義ノートの 5.1 節）．その後で，上の (b) の部分（講義ノートの 5.2 節），および (c) の部分（講義ノートの 5.3 節），の順番で進む.

5.1 行列式の定義

この節では行列式を定義する．2×2 または 3×3 行列の行列式は高校でもやったと思うが，この節では 4×4 以上でも成り立つ定義を与える．

5.1.1 置換と互換

しばらく定義が続くが，我慢して欲しい（教科書の該当部分は 4.1 節）．

n 個の数字 $1, 2, 3, \ldots, n$ を重複なしで並べたものを 1〜n の順列と言うのは高校でやったはずだ．ここではこれを発展させる．

順列を表すために，上の行に 1〜n，下の行にその順列の並び方（数字）を並べて行列のように書いてみよう．例えば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1.1}$$

（の下の行）はどれも 1〜5 の順列である．このように書くと，順列は上の行の 1〜n の数字のそれぞれに下の行の数字を対応させる変換（写像）と考えられる．そこで，この対応関係を置換と呼ぶ．置換には σ, τ のような記号を用いることが多い．また，置換 σ による数字 j の行き先（変換先）を $\sigma(j)$ と書く．(5.1.1) の真ん中の例なら $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 1$ などとなる．

（いくつかの注意）

1．「置換」と言うときは上の対応関係（つまり，1 に対応するのはどの数字か，2 に対応するのはどの数字か,...）のみに注目する．つまり，一行目を並べ替えても，それに応じて 2 行目も並べ替えておけば，両者は同じ置換とみなす．例：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{5.1.2}$$

2．(5.1.1) の最初の置換は，どの数字も変わっていない．これを恒等置換または単位置換と呼ぶ．教科書では単位置換を ϵ の記号で表している．

3．置換 σ の置き換えられた数字を元に戻す置換を σ の逆置換と呼び，σ^{-1} と書く．

4．2 つの置換 σ, τ が与えられたとき，その積を，この 2 つの置換を続けて行ったものとして定義する．つまり，数字 i を数字 $\tau(\sigma(i))$ に変える変換を $\tau\sigma$ と書き，σ と τ の積と定義するのである．

5．上の積の定義によると，逆置換は

$$\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \epsilon \text{（単位置換）} \tag{5.1.3}$$

を満たすものである，と言える．

2つの数字だけ入れ替え，残りの数字は変えないような置換を互換と呼ぶ．互換は勿論，置換の一種であるし，互換を重ねて行ったものは置換になっている．大事なのはその逆も成り立つことである：

- 任意の置換は，適当な互換の積として表せる．
- 一つの置換を互換の積として表す表し方は一通りではない．しかし，互換が偶数個必要か奇数個必要かは置換によって一意に決まる．

以上を認めて：

置換の符号を，その置換を互換の積で表したときに

- 偶数個の互換が必要ならば $+1$（このような置換を偶置換と言う），
- 奇数個の互換が必要ならば -1（このような置換を奇置換と言う），

と定義する．置換 σ の符号を $\mathrm{sgn}(\sigma)$ で表す．

5.1.2 行列式の定義

これでいよいよ行列式を定義することができる（教科書 4.2 節）．

$n \times n$ 行列 A の行列式 $\det A$ を，

$$\det A \equiv \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2}\, \ldots\, a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)}\, \ldots\, a_{n\sigma(n)} \tag{5.1.4}$$

によって定義する．上の和は $1 \sim n$ の置換全体についてとる．

注意：上の定義には式が二つ書いてあるから，この二つが同じものであることはもちろん，確かめないといけない．（どうやって確かめましょう？→ヒント：σ の代わりに σ^{-1} を用いる：答えは教科書 5.3 節）

（定義からすぐにわかる例）

- 2×2 行列の行列式は高校でやったよね．上の定義が高校でやったものに合致することを確かめよう．
- 対角行列の行列式は簡単だ．A が $n \times n$ の対角行列の場合，$\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ （対角成分の積）になる．
- 同じく，A が $n \times n$ の上半三角行列の場合，その行列式も $\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ （対角成分の積）になる．

高校で 3×3 の行列式（たすきがけ，またはサラスの方法）をやった人も多いだろう．しかし，このような簡単な方法は 4×4 以上ではなりたたないので注意 — 例年，この点を強調するが，それでもテストでたすきがけをする人がいる．なお，この講義ではサラスの方法は学習しない（ので，知らなくても良い）．

やる気のある人への問題：
適当な 4×4 行列（例えば，今日返却したレポートの A）の行列式を，上の定義に基づいて（24 個の項の和を計算することで）求めてみよ．一度でもこれをやっておくと，以下で習う方法のありがたみがよくわかる．

5.2 行列式の性質と計算法

前節では行列式を定義したが，この定義では行列の次数が高くなると非常に大変でやってられない.（$n \times n$ 行列なら $n!$ 個の置換があるわけで，そいつらについての和を計算するのは大変！）この節では行列式の満たす性質を調べることで，もっと簡単に行列式を計算することを考える.

5.2.1 行列式の性質

基本になるのは以下の定理である（教科書 5.1 節）.

定理 5.2.1 (教科書の定理 5.1 と 5.2) 以下の式では，対応する $\cdots$ のところは同じものと解釈する.（詳しくは講義で！）

- 行列の i 列と j 列を入れ替えると（$i \neq j$），行列式の符号は変わる：
$$\det[\cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots] = -\det[\cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots] \tag{5.2.1}$$
- 行列の一つの列を c 倍（c はスカラー）すると，行列式の値は c 倍になる：
$$\det[\cdots, c\boldsymbol{a}_i, \cdots] = c\det[\cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots] \tag{5.2.2}$$
- 一つの列をたすと，行列式も和になる：
$$\det[\cdots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i, \cdots] = \det[\cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots] + \det[\cdots, \boldsymbol{b}_i, \cdots] \tag{5.2.3}$$

（注意）

- (5.2.2) について：たった一つの列を c 倍するだけで行列式全体が c 倍になる．行列全体を c 倍すると，$n \times n$ 行列の行列式は c^n 倍になる.
- 上の定理は「列」について述べたが,「列」をすべて「行」に読み替えても定理は成立する.

これらの性質を使うと，行列式を効率よく計算することができる．その際に以下の性質も使うので掲げておく.

- ２つの列が等しい行列の行列式はゼロである.
- 一つの列のスカラー倍を他の列に加えても，行列式の値は変わらない.

（上の２つは「列」を「行」と読み替えても成立する.）

5.2.2 行列式の計算法

さて，行列式をどうやって計算するか，考えてみよう．大ざっぱな指針は，行（と列）の基本変形をくり返してできるだけ簡単な形（上半三角，または対角行列）に持っていくことである．ただし，連立方程式を解くのとは違って,「ある行をスカラー倍」したり「行を入れ替え」たりしたら，行列式の値が変わってくるから注意すること.（例を使って見せた方が速いので，講義で説明する．教科書では 5.2 節に詳しい説明がある.）

７月２日：今日は基本変形による行列式の計算法をやる（プリントは先週）．なお，先週は「置換と互換」による行列式の定義をやったのだが，何をやってるのかわかりにくかったようだ．もう一回，少しだけ講義で説明することにする．

第８回レポート問題：行列式の計算問題です．この辺り，単なる計算ではあるが，ある程度の練習は必要です．教科書の第４節，第５節の問題などは各自やっておくように．

問８： 次の行列の行列式を求めよ（a, b はスカラー）．A と D はよく似ているが，実際，D の行列式は A の行列式から簡単に計算できる．教科書 p.39 を参照のこと．

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

７月７日（月）午後５時までに，原の部屋（理学部１号館５０８号室）の前のポストに

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ（最低限の礼儀だぞ）．また,「番外」の問題はもちろん，成績には一切関係ないので，自由に回答してくれると助かります．

——————————以下，レジュメの続き ——————————

行列式の計算方法について．簡単にまとめると以下の通りである．

- 行の基本変形，または列の基本変形を用いて，行列式が簡単に計算できる形に変形する．その際，行列式の値が異なるかもしれないから注意する．
- 変形先は，すぐ下に掲げてあるどれかの形を目指す．

今までのところで既に証明でき，かつよく使う行列式の性質を列挙しておこう．簡単のため，教科書にもならって，行列式を $\det(A)$ の代わりに $|A|$ と書く．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn} \tag{5.2.4}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \tag{5.2.5}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \tag{5.2.6}$$

以上はすべて，行列式の定義から導かれるものである．

$n \times n$ 行列 A の行と列を入れ替えたもの，つまり (i,j) 成分が a_{ji} で与えられる行列を A の転置行列と言い，${}^tA$ と書く．(5.1.4) は以下を意味する．

定理 5.2.2 (教科書の定理 5.3) 転置行列の行列式は元の行列の行列式に等しい：

$$\det(A) = \det({}^tA) \tag{5.2.7}$$

（証明）要するに，(5.1.4) の右側の等号を証明すればよい．真ん中の $\sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2}\, \ldots\, a_{\sigma(n)n}$ から出発し，$\sigma^{-1} = \tau$ （逆置換）として和を書き直す．σ についての和と τ についての和は同じ事だから，

$$\sum_\sigma \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2}\, \ldots\, a_{\sigma(n)n} = \sum_\tau \mathrm{sgn}(\tau^{-1})\, a_{1\tau(1)}\, a_{2\tau(2)}\, \ldots\, a_{n\tau(n)} \tag{5.2.8}$$

となる（ここで右辺では a_{ij} の積を並べ替えている）．$\mathrm{sgn}(\tau^{-1}) = \mathrm{sgn}(\tau)$ に注意すると，(5.1.4) の右辺が得られる． $\square$

行列の積の行列式についても簡単に触れておく．この定理は教科書では 6.3 節にあるが，この位置に持ってきた方がつながりが良い．

定理 5.2.3 [教科書の定理 6.3] $n \times n$ 行列 A, B の積について，以下の等式が成り立つ．

$$\det(AB) = \det(A)\, \det(B) \tag{5.2.9}$$

要するに，積の行列式は行列式の積なのだ．

5.3 行列式の展開

（この小節の内容は教科書では 6.1 節と 定理 7.2）

さて，今までのところで一応，行列式は計算できるようになった．列と行，両方の基本変形を使えるので，連立方程式を解くより簡単である場合が多い．実際の計算法としてはこれで十分とも言える．しかし，理論的興味もあり，ここでは次数の高い行列の行列式を，より低い次数の行列の行列式に関連づける方法を学習する．

この節の主要な結論を書くために，まず,「余因子」を定義する．

> $n \times n$ 行列 A を考える．A の第 i 行と第 j 列を抜き取った行列を考える（これは $(n-1) \times (n-1)$ 行列）．この $(n-1) \times (n-1)$ 行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを 行列 A の (i,j) 余因子 と呼び，α_{ij} で表す．

（注意）教科書では α_{ij} から $(-1)^{i+j}$ を取り去ったもの（つまり，行列式そのもの）を A_{ij} と書いており，余因子は 7 節まででてこない．これは多分，$(-1)^{i+j}$ の因子を忘れる学生が多いことに手を焼いた著者達の工夫であろう．しかし，この書き方は標準的ではないので将来，皆さんが混乱する可能性が高い上に，$(-1)^{i+j}$ のあるのとないのと両方が出てくるのはイヤだ．そこで敢えて従来通りの記号法を初めから採用した．なお，余因子に α を使うと a との区別が付きにくいのではないかと思うが，教科書がこうなっているので従うことにした．(以下，次回)

7月9日．重要な訂正：先週のプリントの余因子の定義にミスプリあり．以下が正しい（先週のプリントは $(-1)^{i+j}$ であるべきところが $(-1)^{ij}$ になっていた）．
$n \times n$ 行列 A を考える．A の第 i 行と第 j 列を抜き取った行列を考える（これは $(n-1)\times(n-1)$ 行列）．この $(n-1)\times(n-1)$ 行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたものを行列 A の (i,j) 余因子と呼び，α_{ij} で表す．

期末テストについて： 期末テストは以下の要領で行います．

- 日時・場所は教務課の掲示に従う（多分，9 月 10 日の 2 限だと思うが，各自で確認すること．これが教務課の掲示と異なるときは，教務課の掲示を優先する）．
- 今回は，以下の条件で持ち込みを認める．持ち込めるものは A4 の紙一枚の片側だけに自分で書いた物のみ（ただし，予想問題の解答を丸写ししたようなものは減点の対象になるかも）．ワープロの出力でも構わないが，友達の持ち込み用紙のコピーは厳禁．この持ち込み用紙はテストの答案と一緒に提出してもらう．持ち込み用紙を使わない人は白紙を提出してください.（なお，持ち込みを認める主な目的は,「各自が持ち込み用紙をまとめることによって勉強する」ことにある．実際のところ，問題を解く上では持ち込んでも持ち込まなくてもそれほどの差はないだろう.）
- 範囲は春学期にやったところ．具体的には
  - 数ベクトル，一次結合，一次独立，基底
  - 連立方程式の解法
  - （部分空間）
  - 逆行列
  - 行列式

  などである．
- 上のうち，部分空間は鬼門であるようだから，ある程度の配慮をする．
- 中間テストは，全問が何の捻りもない問題だった．期末テストも大半は素直な（レポート問題のような）問題であるが，少しはちょっと進んだ問題が混じるかもしれない．

-レポート問題

第９回レポート問題：行列式の計算問題です．この辺り，単なる計算ではあるが，ある程度の練習は必要です．教科書の第４〜６節の問題などは各自やっておくように．

問 9： 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ の逆行列を，(1) 掃きだし法で，(2) 下の定理 5.3.3 を用いて，それぞれ求めよ．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．

レポート提出について：

上の問に解答し，

7 月 14 日（月）午後５時までに，原の部屋（理学部１号館５０８号室）の前のポストに

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ（最低限の礼儀だぞ）．また,「番外」の問題はもちろん，成績には一切関係ないので，自由に回答してくれると助かります．

先週のレポート問題，思ったよりも多くの人が苦戦していた．特に，行や列を入れ替えたときの行列式の符号の変化や，行や列を定数倍したときに行列式も定数倍されること，を忘れた（または誤解した）答案が目立った．これらは単なる計算ではあるが，今までのものよりも注意力を要する．各人，教科書の問題などをやり直してきちんと理解・練習すること．

——————————————————-以下，レジュメの続き ——————————————————

定理 5.3.1 $n \times n$ 行列 A について，以下の等式が成り立つ．

$$\text{任意の } 1 \le j \le n \text{ を固定した場合} \qquad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,\alpha_{ij} \tag{5.3.1}$$

$$\text{任意の } 1 \le i \le n \text{ を固定した場合} \qquad \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\alpha_{ij} \tag{5.3.2}$$

一つ目を第 j 列に関する余因子展開，２つ目を第 i 列に関する余因子展開，と呼ぶ．

しつこいが，Δ_{ij} は $(n-1)\times(n-1)$ 行列の行列式である．上の定理は $n \times n$ 行列の行列式を $(n-1)\times(n-1)$ 行列の行列式から帰納的に定義する式だとも思える．この意味で，この展開式はこの節の最初に述べた (c) の方法を与えているとも言える．

行列式の展開に関連しては，以下の定理が応用上も大事である：

定理 5.3.2 $n \times n$ 行列 A について，以下の等式が成り立つ．

$$\text{任意の } 1 \le j,k \le n \text{ を固定した場合} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,\alpha_{ij} = \delta_{kj}\ \det(A) \tag{5.3.3}$$

$$\text{任意の } 1 \le i,k \le n \text{ を固定した場合} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\,\alpha_{ij} = \delta_{ki}\ \det(A) \tag{5.3.4}$$

ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタで，

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{5.3.5}$$

という記号である．

註： 上の定理は，$k = j$ または $k = i$ の時には定理 5.3.1 で既に証明されている．この定理の新しさは，$k \neq j$ や $k \neq i$ の場合にある．

さて，上の定理を読み替えると以下の定理になる（教科書の定理 7.2）．

定理 5.3.3 $n \times n$ 行列 A の逆行列は（添え字の順序に注意）：

$$\left[A^{-1}\right]_{ij} = \frac{1}{\det(A)}\,\alpha_{ji} \tag{5.3.6}$$

で与えられる．つまり，A^{-1} は A の余因子行列を $\det(A)$ で割ったものになるのである[2]．

ついでに，以下を別の定理として掲げておく．

定理 5.3.4 $n \times n$ 行列 A について，以下が成り立つ．

$$A \text{ が正則である} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det A \neq 0 \tag{5.3.7}$$

[2] ここの部分が，配布プリントでは間違っていた；ここでは訂正済み

７月１６日：今学期最後の講義になりました．ほぼ予定通り消化したので，まあ，淡々とやります.（秋学期は多分，難しくなるぞい.）
期末試験は先週に宣言したとおりに行います．先週のプリントをもらい損ねた人は後で取りに来ること．
なお，期末試験では少しひねったことも訊く可能性はあるが（先週の宣言通り），大きな定理をゼロから証明するようなことは要求しない予定.

言葉遣いの訂正：

先週,「余因子」を定義した．a_{ij} の余因子とは,

行列 A から i 行と j 列を抜き取ったものの行列式に $(-1)^{i+j}$ をかけたもの

であった．また，これを用いて，A の逆行列が

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A}\,\alpha_{ji}$$

と書ける，こともやった.（ここまでは先週のママで正しい！）この後に，言葉遣いの間違いがあった.「逆行列は余因子行列を転置して $\det A$ で割ったもの」と書いたのだが，ここが間違い.
A の余因子行列とは，その ij 成分が α_{ji} で与えられる行列，つまり上の式の右辺にでている行列のことである.（要するに，余因子行列を定義する時点で転置が入っている.）従って，上の式は単純に「逆行列は余因子行列を $\det A$ で割ったもの」と書くべきだった.
実のところ，先週のプリントでは「余因子行列」そのものは定義しておらず，また数式そのものは正しいのだが，将来，混乱すると申し訳ないので，訂正しておく.

—————————————先週のレポートの講評 ————————————

前回と異なり，今回は（レポートを提出した人は）大体，できていました．かなりの人が求めた逆行列と A をかけて，結果が単位行列になることも確かめていたので，非常によいと思います.

ただ，出題後に気がついたのですが，この行列 A は対称行列なので，逆行列や余因子行列もみんな対称行列になります．だから，α_{ji} なのか α_{ij} なのかわからなかった人でも答えは合ってしまったわけです．この点，もう一度自分で見直してチェックしておいてください.

また繰り返しになりますが，先週のレポート問題の範囲（行列式の計算）は各自，教科書の問題や演習書でやっておいてくださいね.

—————————————以下，レジュメの続き ————————————

5.4 クラメールの公式

先週までで行列式に関してやりたいことは大体，終わった．今日は「クラメール[3]の公式」というものを紹介して，この学期を締めくくろう.

連立一次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{5.4.1}$$

を考える．ここで $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$ は $n \times n$ 行列，$\boldsymbol{b}$ は与えられた n 項列ベクトル，$\boldsymbol{x}$ は未知数の作る n 項列ベクトルである．以下では特に，A が正則行列の場合を考える．この場合，以前にも注意したように（レポート問題にもした），

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\,\boldsymbol{b} \tag{5.4.2}$$

[3] Cramér，先週までクラーメルと言っていたが，クラメールの方が原音に近い気がするので変更

と解くことができる（ここまでは復習）.
　この節ではこれを行列式を使って書く,「クラメールの公式」を考える.

定理 5.4.1 [クラメールの公式，教科書の定理 7.1]
A が正則の時，連立方程式 (5.4.1) の解 (5.4.2) は，以下の形に書ける：

$$x_j = \frac{1}{|A|}\ \det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n] = \frac{\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n]}{\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n]} \tag{5.4.3}$$

　要するに，x_j の表式は 2 つの行列式の比で与えられる．一つの行列式（分母）は，$\det(A)$ そのものである．一方，分子は分母にでてくる行列 A において，第 j 列を $\boldsymbol{b}$ で置き換えたものの行列式になっている.

（証明）
　(5.4.2) は

$$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n \tag{5.4.4}$$

と書けることに注意すると分子の行列式は

$$\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n] = \det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$$

となる．この右辺において行列式の性質をつかってやると

$$\begin{aligned} &= x_1 \det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n] + x_2 \det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n] \\ &\quad + \ldots + x_n \det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n] \end{aligned}$$

と変形できる．ところが，$\boldsymbol{a}_j$ が入っている項以外は（ 2 つの列が比例するので）ゼロになり，結局,

$$= x_j \det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n] = x_j\ \det A \tag{5.4.5}$$

となる．両辺を $\det A$ で割るとできあがり. □