オムニバス講義レポート問題（原の担当分）

(2003.1.17)

大変に遅くなりましたが，原の担当分のレポート問題を出します．以下の問の内，２問以上を目安にして解答してください（２問以上と言うのは目安だから，出来によっては一問でも可）．

締め切りなど：

締め切りは

- ４年生と修士２年生は 2003 年 1 月 27 日（月）の 17:00
- それ以外の学生は 2003 年 1 月 31 日（金）の 17:00

提出場所は多元数理事務室の中の提出箱（の原のレポート用のもの）
用紙はできうる限り A4 の紙を用い，左上を綴じること．
（B5 などの小さい紙は紛れてなくなる可能性あり）
とします．もちろん，上の「４年生」と「修士２年」には通称の「学部５年以上」や「修士３年以上」も含みます．

いくつかの注意，お願いなど：

- 毎度の事ながら，ミスプリなどが存在する可能性があるので，おかしいと思ったらメイルで（hara@math.nagoya-u.ac.jp）問い合わせてください．こちらで把握したミスは僕の web page（http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html）に随時，掲載します．もしかしたら更なるヒントも掲載するかもしれません．
- 友達と相談しても，本を調べても，何をやっても良いから，自分で理解した範囲を書いて下さい．その際，参考文献や議論した友達の名前も明記すること.（友達と議論したり本を見たりしたから悪い点をつける，などと言うことはしません．一番大事なのは自分でわかったところを表現することだから，それまでの過程で何をやっても問題ありません.）
- 問題の番外編として，今までの講義内容・講義形態についての感想，不満，文句，このように改善すべしとの意見などもできるだけ書いてください．過去の講義と比べても，今回うまく行かなかったことは十分に自覚しているのですが，原因がはっきり掴めていません（時間数に比べて材料が多すぎたのは確かですが，それだけが原因か？）．今後の参考にしたいので，よろしくお願いします.
- なお，講義ノートの簡略版は来週はじめ（1 月 20 日）までに作成して，僕の web page（http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html）に載せます．興味のある人はどうぞ.

（問題は以下に裏表にわたってあります.）

以下の問１，問２は割合簡単な，単位取得を意識した問題です.

問１.（易．講義中プリントの問 1.5.7） $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ と（非常に小さな）印が付けられた $(k+1)$ 個のコインが壺に入っている．これらは非常にいびつなコインで，i 番目のコインを投げたときに表が出る確率は i/k となるように調節されている．目隠しをしたままこの壺から一枚のコインを選んで実験をする．以下の問いに答えよ.

1. 取り出したコインを一回投げたところ，表が出た．このコインが i 番目のコインである確率はいくらか？($i = 0, 1, 2, \ldots, k$)
2. 取り出したコインを更に投げ続け，合計 n 回投げた．結果は全て表だった．このコインが i 番目のコインである確率はいくらか？($i = 0, 1, 2, \ldots, k$)
3. 取り出したコインを更にもう一回（つまり通算で $(n+1)$ 回目）投げる事にした．このとき，やはり表が出る確率はいくらか？
4. 上の小問 2, 3 の答はそれほど簡単にならなかったかも知れない．そこでこれらの確率が $k \to \infty$ の極限でどうなるか，求めてみよう．結果は直感と合うだろうか？

（注）この問では，コインは最初に一枚取り出したら，同じ物を使い続ける．コインを何回か投げるとき，一回ごとの結果は独立だとする．また，コインについている印は大変小さいので，取り出したコインがどれかは見ただけではわからないものとする.（そうでないと，小問 2, 3 が面白くない.）

問２.（易．講義中プリントの問 2.8.3） 何かの物理量を測定する実験を想定しよう．実験結果は色々な原因のために誤差を含むので，通常,「何回も測定して平均する」ことを行う — 平均した結果が真の値に近いだろうと期待して．この点を中心極限定理などを用いて考えてみよう．

全部で N 回の測定を行うこととし，i-回目の測定値を X_i とする．各測定値 X_i は互いに独立で，その分散は σ^2 であると仮定しよう（$\sigma > 0$）．この N 回の平均は

$$Y_N \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{1}$$

で，これが $N \to \infty$ で真の値（X_i の期待値）に近づくことは大数の法則によって保証されている．

そこで，Y_N と真の値 T の誤差を ϵ 以下にするには，どのくらいの回数 N だけ測定したらよいか，考えよう．勿論，いくら N を大きくしても，測定値の全てが T から大きくずれる確率もゼロではない．そこで，95% の信頼度で真の値からの誤差が ϵ 以下になるような，つまり

$$P[|Y_N - T| \le \epsilon] \ge 0.95 \qquad (T \text{ は真の値}) \tag{2}$$

となるような N の値を求めたい．

1. まず，チェビシェフの不等式によって，そのような N がどれくらい大きければ十分か，求めてみよ．
2. 次に中心極限定理を近似的に使って（注参照），そのような N がどれくらい大きければ十分か，求めてみよ．
3. （実際の数値を入れてみよう）$\sigma = 1$ の時に N はどのくらいか，$\epsilon = 0.1$ と $\epsilon = 1.0$ の場合について，それぞれ求めてみよ．

（注）中心極限定理を近似的に使う，とは以下の意味である．本来は

$$\lim_{N\to\infty} P\Big[a \le Z_N \le b\Big] = \int_a^b \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \tag{3}$$

であって．<u>極限 $N \to \infty$ の後</u>の量が右辺の積分である．しかしこの問題ではここをズルして，

$$P\Big[a \le Z_N \le b\Big] \approx \int_a^b \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \tag{4}$$

のように，極限をとる前でも大体等しいと思ってしまおう，と言うことである．

以下の問３以降は興味のある人のための問題です.

問３． $\mathbb{Z}^2$ を 2-次元の格子（座標が整数であるような $\mathbb{R}^2$ の点の集合）とし，$\mathbb{Z}^2$ の上の拡張されたランダムウォークを考える．すなわち，$\vec{X}_i$ を独立・同分布の（２次元ベクトルの値をとる）確率変数とするとき，ランダムウォークの n-歩目の位置 $\vec{S}_n$ は $\vec{S}_n = \vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \ldots + \vec{X}_n$ と表される．

講義では $\vec{X}_i$ の分布として，それぞれの座標軸方向に等確率で跳ぶ場合を主に考えたが，この問題ではもっと一般の跳び方を考える．すなわち，$\vec{X}_i$ は, ($\vec{x} \in \mathbb{Z}^2$)

$$\vec{X}_i = \vec{x} \quad \text{なる値を確率}\ p_{\vec{x}}\text{でとる} \tag{5}$$

ような独立・同分布の確率変数とする（つまり，ランダムウォークは一歩目に $\vec{x}$ まで，確率 $p_{\vec{x}}$ で跳ぶ；２歩目以降も同じように跳ぶ）．もちろん，全確率が 1 になるために，

$$\sum_{\vec{x} \in \mathbb{Z}^2} p_{\vec{x}} = 1 \tag{6}$$

であることは要求する．以下では $\langle \cdots \rangle_n$ は，原点を出発する全ての n-歩のランダムウォークについての期待値を表す.（同じ長さのウォークが同じ重みを持つわけではないことに注意.）

以下では簡単のため，$p_{\vec{x}} \ne 0$ なる $\vec{x}$ は有限個しかないとする（ランダムウォークの一歩は有限の距離しか跳ばない）．また，２次元のウォークが難しい場合は１次元の場合をともかく考えてみるのがヒントになるだろう．もちろん，小問の 3, 4 は１次元では意味がなくなってしまうけども．

1. まず，$\vec{S}_n$ そのものの期待値 $\langle \vec{S}_n \rangle_n$ をかんがえる．これがゼロベクトルになるような，$\vec{X}_1$ の分布についての条件（下の注１参照）を求めよ.（言うまでもないヒント：この問に答えるには，もちろん，$\langle \vec{S}_n \rangle_n$ を計算してみるのが一番）．
2. 小問 1 の条件が満たされていれば，Einstein の関係式（平均自乗距離 $\langle |\vec{S}_n|^2 \rangle_n$ が n に比例すること）は成り立つだろうか？ここでベクトル $\vec{S}$ に対して $|\vec{S}|$ はその長さを表す．つまり，$\vec{S} = (S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(d)})$ に対して，$|\vec{S}| \equiv \left(\sum_{j=1}^{d} (S^{(j)})^2 \right)^{1/2}$.
3. 今度は，$\vec{S}_n$ の回転対称性（下の注２を参照）について考えたい．講義で少しだけ触れたように，適当な条件の下では，n が非常に大きい場合，$\vec{S}_n$ の分布は大体，球対称になる．どのような条件の下で球対称になるのだろう？ この問に対する手がかりを得るために，$\vec{a}$ を $\mathbb{R}^2$ の長さ 1 のベクトルとし，期待値 $\langle (\vec{a} \cdot \vec{S}_n)^2 \rangle_n$ を考える（ここで $\vec{a} \cdot \vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す）．小問 1, 2 の条件をみたす $\vec{X}_1$ の分布に更にどのような条件をつける（下の注１参照）と，$\langle (\vec{a} \cdot \vec{S}_n)^2 \rangle_n$ がベクトル $\vec{a}$ の向きによらなくなるだろうか？期待値 $\langle (\vec{a} \cdot \vec{S}_n)^2 \rangle_n$ はベクトル $\vec{a}$ の方向には S_n がどのくらい延びているか，の目安になる量だから，これが $\vec{a}$ の向きによらないなら，$\vec{S}_n$ の分布が回転対称になる可能性が高い．

4. （これは難！）もちろん，小問 3 の $\langle(\vec{a}\cdot\vec{S}_n)^2\rangle_n$ が $\vec{a}$ によらないからと言って，$\vec{S}_n$ の分布が回転対称になるかどうか，断言は出来ない．どのような量を見たら回転対称性についてどのような結論が得られそうか，自由に研究して論ぜよ．この場合，計算しやすい $p_{\vec{x}}$ に限って論じても良い.（この問題はマトモに取り扱うと「局所中心極限定理」というものの証明をやることになって，かなり大変である．そこまで行くことは要求していない．出来る範囲でいろいろと試行錯誤をして欲しい，と言うことです.）
5. この問題では簡単のために２次元に話を限ったが，一般の $d \geq 3$ で同様の問を発することはできる．余力のある人は一般の d でどうなるかを考えてみよう．

（注１）「$\vec{X}_1$ の分布についての条件」とは，$\vec{X}_1$ の分布を決める確率 $p_{\vec{x}}$ の言葉で与えても良いし，$\vec{X}_1$ の期待値などについての条件で与えても良い．実のところ， $p_{\vec{x}}$ についての具体的な条件を与えるのは少し難しいかも知れないから，$\vec{X}_1$ の期待値などに関する条件でうまく書くのが良いだろう．
（注２）上の小問 3, 4 で回転対称と言っているのは，もちろん，確率的な意味においてである．つまり，$\vec{S}_n$ は大体 $\sqrt{n}$ くらいのオーダーの所に分布する確率が一番高いだろうから，この辺りをみたら回転対称になっているだろう（回転対称になっている条件は？），ということである．

問４（これは非常に難）. 講義では中心極限定理にかなりの時間を割いたが，その誤差評価は行わなかった．つまり，(4) の $\approx$ の部分がどのくらいの誤差があるのか，がわからないままであった．この点について，自由に考察してみよう.（この問題のためにいろいろとヒントを試行錯誤したが，良いものが出来なかった．これは正直，大学院レベルの問題とも言え，良い問題ではないが，ある程度苦労したので載せる．今回の講義が簡単で退屈だった人へのチャレンジの意味もある.）結果としては，例えば以下のようなものが知られている．

定理 1 $X_1, X_2, X_3, \ldots$ を独立・同分布な確率変数とし，X_j の期待値を μ，分散を σ^2 とする．更に，X_j の３次のモーメントを

$$\beta_3 \equiv E\Big[\, |X_1-\mu|^3 \Big] \tag{7}$$

と定義しておく．いつものように，$Z_n \equiv \dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\Big(X_j-\mu\Big)$ を定義すると，

$$\sup_{b\in\mathbb{R}}\left| P[Z_n \leq b] - \int_{-\infty}^{b}\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dz \right| \leq \frac{C\beta_3}{\sigma^3\sqrt{n}} \tag{8}$$

が成り立つ．ここで C は定数で，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ と 0.8 の間にあることがわかっている．

以上