

2002.10.10

## 数学基礎 II (2124404) 担当：原 隆 (多元数理科学研究科): 理 1 号館 508 号室, 内線 5392

(e-mail:hara@math.nagoya-u.ac.jp, <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hara/lectures/02/hoken02.html>)

Office hours: (暫定案) 毎週木曜の午後 1 時 ~ 2 時には office にいます。また, 講義終了後にも, もちろん質問を受け付けます。

**概要** : この講義の主な目的は「確率論と数理統計学」の初歩の初歩を学ぶことである。

皆さんは将来, 医療分野での様々な検査や調査にかかわることがあると思う。種々の病理検査の場合, 自分の行っていることがどのような意味を持っているのかを知っていることは (例え皆さんが直接の診断などを下さないにしても) 十分に意味のあることであろう。また, 疫学調査などを行った場合には, 得られたデータをどのように解釈するかが一番の要である。

このような観点から, この講義では将来皆さんの役に立ちそうなことを中心にして, 「確率論と数理統計学」を眺めてみる。ただし「このようなデータはこのように処理する」といったマニュアル的な扱いだけでは, 皆さんが実際のデータを扱う際に役に立つとは思われない (生兵法は大怪我のもと)。従って, 講義のある程度の部分は小手先の技術よりは第一原理を理解することにおく予定である。

なお, 「90 分講義ばかり」ではつらいだろうし, 講義だけではなかなかわかりにくいと思うので, 適当に休憩, または演習を挟みながら進める予定。

**内容予定** : (実は「数学基礎 I」でやるはずの微分積分学が残っているということなので, これをどこに入れるか, 思案中である。以下の内容予定は順不同だと思っただきたい。)

### 0. 初めに

1. この講義の概要：確率や統計はどのように役に立つのか？

#### ● 微分積分学の復習 (どこに入れるか未定)

1. 1 変数関数の微分
2. テイラー展開
3. 1 変数関数の積分
4. 偏微分と多重積分

#### ● 確率の基礎 (考え方) とベイズ推定

1. 確率とは (母集団と確率測度)
2. 条件付き確率とは？
3. ベイズの推定とは？

#### ● 統計の基礎に向けて：中心極限定理

1. 「独立」な確率変数
2. 2 項分布
3. 中心極限定理

#### ● 推定と検定

1. 推定・検定の基本的な考え方
2. 母平均の推定
3. 区間推定
4. 仮説の検定
5. 更に進んだ話題 (余裕があれば)

**教科書** : かなり迷ったのだが, 前期とのつながりも考えて,

- 小寺平治著：教養数学ポブリー (裳華房) を微分積分学の部分の教科書に,

- 小寺平治著：新統計入門（裳華房）を確率・統計の部分の教科書に，

それぞれ定める．これらの教科書は正直，ちょっと簡単で，「馬鹿にするな！」と言う人もいるかも知れない．そのような余力のある人は下の参考書をどうぞ．

### 参考書：

小針あき宏（「あき」は「日」へんに「見」）「確率・統計入門」（岩波書店）．これは確率と統計の初歩を丁寧に  
かみ砕いて書いたもので，根性のある人には上の教科書よりもこちらを勧める．

### 評価方法：

講義の際に何回か小レポートを課し，その結果と中間試験・最終試験の結果を総合してつけます．小レポートな  
どの具体的な実施日時，また「これらの成績をどのように総合して評価するか」に関しては追って講義中に通知  
します．

### 担当教官から一言：

講義の目的でも触れたように，この科目の内容は，将来，皆さんの役に立つ可能性があります．小手先の技術に  
とらわれず，出来るだけ原理を理解するようにして下さい．大学を出たら，どっちにしろ小手先の技術なんて忘  
れてしまう．第一原理を理解していれば，後々の財産になる．

（余談）「大学時代の成績なんて将来に関係ない」と言うのは「小手先の技術はどうしても良い」部分のみにお  
いて正しいわけで，「第一原理まで理解していない」のでは話にならない．僕はここの区別は非常に大事だと思  
うのだが，そう思っていない人も世の中には多いようである．

### この科目に関するルール：

最近の世相の移り変わりは激しく，学生気質も僕の頃とはかなり異なっているようです．後でお互いに不快な  
思いをすることがない様，この科目に関して，以下のルールを定めます（こんなこと言うまでもないとは思  
うのだが，念のため）

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強することであると確認する（少なくとも，講義にでている間は  
そうである）
- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室・退室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合  
は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケ  
ットです．
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義，掲示板および原の web page  
（<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures.html>）を通して行う．
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う．
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.nagoya-u.ac.jp）．ただ，回答までには数日の余裕  
を見込んで下さい．直接質問したい人のアポ取りにも使ってください．

**中間テスト：**期末の一発勝負はいやだろうから，中間，または小テストなどを考えています．予定が確定し  
たら講義と web page を通してお知らせしますので，頭の隅に留めておいて下さい．

**配布プリントについて：**講義のレジュメを配布することがあります．これはあくまでレジュメであ  
って，要点しか書いていません．足りないところは各自，教科書や参考書で補って下さい．要点しか書かない理由  
は，一つには僕の時間が足りないためですが，もう一つには要点を書き出すことで集中して学習すべき事を浮き  
彫りにする効果を狙っていることもあります．

なお，これらのプリントにもミスプリなどがあると思うので，ある程度直した時点で僕の web page に掲載す  
ることを考えています．

## 0 前口上

### 0.1 この講義はどのように役に立ちそうか？

以下はこの講義で考える問題の例である．理想的には今学期の最後には，以下のような問題に対してどのように考えていったらよいか，糸口が掴めるはずである．

問 0.1 (データを特徴づける量: 平均や分散) これはずっと昔々，日本がもっと貧しかった頃のお話．町中の小学生と田舎の小学生の体格に差があるのではないかという話が出たため，それぞれの小学校の児童の身長や体重のデータを送ってもらった．これらのデータをどのように処理すれば上の推定に対する答が見やすくなるだろうか？

問 0.2 (確率論の計算問題) この部屋に  $n$  人の人がいる．この内，どの二人をとっても誕生日が同じでない確率はいくらか？特に，この「同じでない」確率が  $1/2$  より小さくなるには  $n$  はどのくらい大きければ良いか？(閏年に生まれた人は無いものとする．)

問 0.3 (ベイズ推定) ある病気をテストする血液検査を考える．大抵の血液検査には誤差がつきもので，このテストも

- 病気の人をテストすると 95% の確率で「病気だ」と正しく判定するが，残りの 5% は見逃してしまう
- 健康な人をテストすると 99% の確率で「健康だ」と正しく判定するが，残りの 1% では(健康なのに)「病気だ」と言ってしまう

となっている．さて，独立な疫学的調査からこの町の人口の 0.5% の人が病気を持っているだろう事がわかっていのだが，僕のテスト結果は陽性だった．僕が本当にこの病気にかかっている確率はいくらだろうか？

問 0.4 (大数の法則，中心極限定理) 硬貨を投げ，表なら +1 点，裏なら -1 点もらえたとする． $N$  回投げた時，僕の点数はどんな感じで分布しているだろうか？

問 0.5 (平均値の推定・区間推定) 名古屋市の高校 1 年生の体格を調べるため「無作為に」100 人の高校 1 年生を選んで身長を測ったら，その平均値は 170 cm だった．名古屋市の高校一年生の身長の平均はいくらくらいでしょう？170 cm からはどのくらいずれているだろうか？(もし，100 人でなく，500 人の平均をとったら？)

問 0.6 (仮説検定) コインを 10 回投げたら，10 回とも表が出た．どう見てもこのコインはイカサマであるように思えるが，どのように議論したらよいか？(もし 200 回もコインを投げたのにみんな表だったらどうかな？)

問 0.7 (イカサマ度の推定) 10 回投げたら 10 回とも表が出たコインについて，このコインが表を出す確率を推定せよ(この確率の  $\frac{1}{2}$  からのズレはこのコインのイカサマ度みたいなもの．)

問 0.8 (問 0.6 の進んだ応用) 新薬が役に立つのがどうかを確かめるため，30 人の病人を 15 人ずつに分け，新薬を与えたグループとそうでないグループを作った．新薬を与えた人のうち 12 人は病気が治り，与えなかった方は 10 人が治った．この新薬は効果があるだろうか？(人道的見地から，この後に別の特效薬で全員，健康になったとしておこう．)

上ではわざと問題を曖昧に書いた部分もある(実際，問題に与えられている条件だけでは答えられないものもある)．その曖昧な部分も含め，問題をどのように定式化すれば数学になるか，どのような仮定を足すと答がき

まるのか、またその結果をどのように解釈して元々の問題の答を引き出すか、といったことの原理を理解してもらえように講義したい。

## 0.2 キーになる考え方

確率や統計の考え方が有効になる場面はおおざっぱに、「我々の知識が不足しているため、不確定要素が入ってくる場合」や「対象にするものの数が多すぎて、その平均的なふるまいを知りたい場合」とまとめられる。このような状況の取り扱いはいくつも日常からやっていることであるが、かなりの部分、変な「直感」ですましていることが多いのではないだろうか？この講義ではその辺りを「このような考えに基づいてこのように考えると良いのではないか？」と言う枠組みを与えることで明確にしたい。

僕は学生時代に「統計」の講義をとったが、正直、さっぱりわからなかった。その原因のほとんどは僕自身にあることは明白である（公式な見解）。しかし、当時の講義があまりに枝葉末節に入りすぎて、基本原理がぼやけてしまった部分もなかったとは言い切れない。この経験に立ち、この講義では基本の考え方を大切にしたい。

どこに力点を置くべきかの理解を助けるため、基本になる要素を3つ挙げる。

### 1. 確率の基礎概念、特に条件付き確率の考え方。

「条件付き確率」に関連した話題は、よく常識には反した答が出るので（教科書にはないが）敢えて取り上げたい。上の問0.3はその典型例である。この問題では血液検査の結果についてある種「驚き」の結果が得られるので、全ての医療関係者に知ってもらいたい。

### 2. 大数の法則と中心極限定理、言い換えれば「たくさんのデータの平均はどのように分布すべきか？」

このように書くと仰々しいが、これは日常生活でも使っていることである。例えば、何かの実験で「測定誤差をなくすためには何回も測定して平均をとる」ことは中学校以来、やって来たのだと思うが、その背後（なぜ平均をとると良いのか）にはこの中心極限定理がある。

更に、この中心極限定理がわかっておれば、後の「推定・検定」もきちんと理解できる。この意味で中心極限定理はこの講義の要とも言えるので、出来るだけわかりやすく説明したい。何とか名前に怯えず、理解していただきたい。

### 3. 推定や検定の基礎概念

これはある意味で上の2つの概念（特に中心極限定理）の応用である。具体例としては問0.5~0.8などがある。ここで普通はいろいろな分布（ $\chi^2$ -分布、 $F$ -分布、 $t$ -分布など）が出てきて混乱するのだが、これらはみんな、中心極限定理を理解していれば理解できるものである（学生時代の僕の混乱は、この辺りの原理がわかっていなかったことに尽きる。）この講義では出来るだけ混乱を起こさないよう、出来るだけ元に戻って説明していきたい。

10月17日の連絡：先週以降考えて、評価方法は大幅に変えることにした。以下はまだ暫定案である。

- 期末の一発勝負をやめる意味で、小テストを何回かやる形式に切り替える。一回の小テストは大体、講義1～3回分で、小テストの日時は少なくとも一週間前の講義時には予告する。
- 成績はこれらの小テストの平均でつける。
- ただし、「小テストなんてかったるい。僕は私は期末の一発勝負の方が良い！」という人がいるなら、期末をやる可能性も考えている（たとえ期末をやるにしても、「小テストの平均」と「期末の成績」の良い方で成績をつけるから、日頃の小テストだけで合格の人は期末は受けなくてもよい。）
- 厳選した材料を良くわかってもらいたい、という意味で「微分積分学の復習」は必要に応じて復習することにした。

## 1 確率論の基礎

この節はこの講義の基礎の基礎だから、頑張ってついてきて欲しい。

### 1.1 確率論の舞台 — 事象と標本空間

現実の問題の「確からしさ」を議論するのはなかなか大変である。そこで、数学ではまず、現実から少し切り離した形で、考えやすい舞台を設定する（確率そのものはもう少し後で導入）。

考えたいのは、ある種の「実験」である。「実験」と言っても物理や化学の実験とは限らない。ある集団から何かの試料を取り出し、その試料がある性質を満たすか満たさないかを問題にするようなのをすべて「実験」と呼ぶことにする。

例 1.A：簡単のためにこのクラスは A, B, C, D の 4 人の学生さんからできているとする。この 4 人から学生さんを一人選び、選んだ学生さんの性質（名古屋に住んでるかなど）を問題にする。これは立派な「実験」である。

例 1.B：上の例のクラスから一度に 2 人の学生を選び、選んだ学生さんの性質を問題にする。これも立派な「実験」である。

定義 1.1 「実験」をやる場合、可能な結果の全体からなる集合を標本空間 (sample space)  $S$  と言う。標本空間の元（つまり、一回の「実験」の結果になりうるもの）を根元事象と言う。

上の例 1.A では「選んだ学生が A さんであった」「選んだ学生が B さんであった」「選んだ学生が C さんであった」「選んだ学生が D さんであった」がそれぞれ根元事象。また、選んだ学生さんの全体、つまり「A さんと B さんと C さんと D さん」が、標本空間。

例 1.B では、「A と B を選んだ」「A と C を選んだ」「A と D」「B と C」「B と D」「C と D」の 6 つが根元事象だ。標本空間はこの 6 つからなる集合。このように、標本空間と元々考えていた集団とは別物になることも多い。

標本空間が有限でない場合はいろいろとややこしいことが起こるが、この講義では標本空間が有限の場合（および有限からのアナロジーで理解できる場合）に話を限る。

定義 1.2 事象とは実験の結果が持っている性質のこと。数学的に厳密に言うと、事象とは単に標本空間の部分集合、つまり「根元事象の集まり」のことである。なお、事象には空集合（起こり得ないこと）、および標本空間全体も含めて考える。

「部分集合」と言うと大げさだが、上の学生さんの例 1.A で説明していく。説明のため、それぞれのプロフィールは以下の通りとしよう：

- A：数学は好き．愛知県に住んでいる．
- B：数学は嫌い．愛知県に住んでいる．
- C：数学は好き．三重県に住んでいる．
- D：数学は嫌い．岐阜県に住んでいる．

すると、「選んだ学生が愛知県に住んでいる」と言うのは「A さんか B さんが選ばれた」と言う事象だ．同様に「選んだ学生は数学が好き」なら「A さんか C さんが選ばれた」ということだ．逆に「B さんか D さんが選ばれた」というのは「数学嫌いが選ばれた」とも言える．このように標本空間の部分集合というのは、普通の言葉で言うところの「 $\quad$  の条件を満たす人」と言うことになっているわけなので、日常言語での解釈にあったものになっている．

(お約束)  $E, F$  を事象とするとき,  $E \cup F$  は「 $E$  または  $F$  が起こる」を表す (和事象).  $E \cap F = EF$  は「 $E$  も  $F$  も起こる」(積事象)．

(問) 例 1.B での事象の例を考えてみよう．

## 1.2 数学における確率

このところは以前のノートを大幅に書き直したが、それでも少し難しくなってしまったようだ．数学的に厳密にやろうとするとどうしてもこうなってしまう (職業病や)．講義ではいろいろと例を出して説明するつもりだから、良く聴いてください．

今までは単に確率をやる舞台を設定したにすぎない．これからいよいよ、「確率」を割り振っていこう．

数学ではある意味で「天下一に」確率を定める．本当のところを言うと、確率の定め方そのものは数学の仕事ではなく、実験の行い方に即して物理学・化学・心理学... などに基いて決めるべきものだ．しかし、通常は確率を定めるところから始めることになる．

例えば例 1.A の場合にどのように確率を考えるのが良いだろうか? 「4 人の学生が平等に選ばれる」と考えるのが普通だから、4 つの根元事象の確率はそれぞれ  $\frac{1}{4}$  と思われる：

$$P[A \text{ が選ばれる}] = P[B \text{ が選ばれる}] = P[C \text{ が選ばれる}] = P[D \text{ が選ばれる}] = \frac{1}{4} \quad (1.1)$$

しかし、僕がえこひいきをして (注：実際の講義ではもちろん、えこひいきなんてやりません！為念) 数学好きを選ぼうとしたら、A, C さんが選ばれる可能性は高くなるだろう．極端な話、

$$P[A \text{ が選ばれる}] = P[C \text{ が選ばれる}] = \frac{1}{2}, \quad P[B \text{ が選ばれる}] = P[D \text{ が選ばれる}] = 0 \quad (1.2)$$

と言う可能性もある．これらは数学としては (またそれ以外でも) 可能な確率だが、実際の問題を解くには現実とよりよくあう方をとるのが良いだろう (例：えこひいき無しで 4 人とも確率  $\frac{1}{4}$  にする)．

今までの話を、標本空間が  $S = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  になる実験について一般化しておく ( $e_j$  が根元事象)．上で見たように、数学的に確率を決めるというのは、それぞれの根元事象の確率 (起こり易さ)  $p_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) を与えることである．それでこの根元事象の起こり易さ (確率) は現実をできるだけ反映するように決めるのだった．

しかし、この根元事象の確率  $p_j$  はいくつかの性質を満たすべきである．まず、これは確率だから 0 と 1 の間にはないといけない．更に、 $S$  そのものというのは全事象だから (いつでも起こる) この確率は 1 であるべし．要するに

$$0 \leq p_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^N p_j = 1 \quad (1.3)$$

であればよい, ということになる. そして, 根元でない事象  $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$  については,

$$(E \text{ の確率}) = \sum_{j=1}^m p_j \tag{1.4}$$

となるはずである. と言うのも,  $E$  とは「 $e_1$  か,  $e_2$  か,  $\dots$ ,  $e_m$  のどれかが起こる」事象だから, それぞれの事象の確率の和になるのが自然.

これが数学での確率論の出発点である. 要するに

- 標本空間  $S$  上に根元事象の確率  $p_j$  を (1.3) を満たす形で与え,
- 根元事象でない一般の事象  $E$  の確率を (1.4) で計算する.

それで, このルールを満たすものを全て確率と認めるのである (しつこいが, どのように  $p_j$  を選ぶか, は個々の問題に応じてうまく決める.)

さて, 上のように決めた「それぞれの事象の確率」はどんな性質を満たしているだろうか? 上では根元事象から確率を決めたが, そうでない場合 — つまり, 根元事象の和事象である色々な事象の確率から決めた方が楽な場合 — も (後で) 出てくる. そのために (根元事象から出発しない) 抽象的な確率の性質を公理としてまとめておく.

**定義 1.3 (確率の公理)** 標本空間  $S$  が与えられたとき,  $S$  上の確率 (または確率測度) とは, 以下を満たす  $P$  のこと:  $S$  の部分集合 (事象)  $E$  のそれぞれについて値  $P[E]$  が定まり, かつ

1. 全ての  $E \subset S$  に対して  $0 \leq P[E] \leq 1$  (確率は  $E$  を超えない)
2.  $P(S) = 1$  (全確率は  $E$ )
3.  $E_1, E_2$  が排反, つまり「 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ 」, のとき,  $P[E_1 \cup E_2] = P[E_1] + P[E_2]$

なお, 標本空間  $S$  とその上の確率測度  $P$  をあわせて確率空間と言う.

上の性質を満たしている  $P$  なら何でも確率と認めてしまおう, と言うわけ.

「高校の確率でなぜ等確率とするのかわからない」などの声をきいたことがあるので, 少ししつこく説明した. 実はこれ以降は, 自然な確率の与え方のあるもの (例 1.A なら僕がえこひいきをしないで学生を選ぶ) を主に考える. であるから, それぞれの根元事象にどのような確率を与えるかは割合簡単にわかる. でもこれで話が終わるわけではない. 根元事象の確率と我々の知りたい確率とは一般に別物だから, 前者から後者をどう計算するかが問題だ. さらに「条件付き確率」のような一件ヤヤコシイものを考える必要も出てくる.

この確率の性質については以下が成り立つ (ベン図を書いて意味を説明する).

**命題 1.4**

$$P[E^c] = 1 - P[E] \quad (E^c \text{ は } E \text{ が起こらない事象のこと}) \tag{1.5}$$

$$E \subset F \implies P[E] \leq P[F] \tag{1.6}$$

$$P[E \cup F] = P[E] + P[F] - P[EF] \tag{1.7}$$

ここにも例を一杯入れる.

### 1.3 数の数え方の復習

(始めに) 以下のようなことは頭から覚え込むのではなく, 自分で納得して理解するようにすべし. また, この節の内容はそんなに使わないから, 余り神経質にならないように. まず記号を導入する.

定義 1.5 •  $n > 0$  に対して,  $n! \equiv n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ , また  $0! = 1$  と定義する.

•  $0 \leq k \leq n$  に対して,  $\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}$  と定義し, 「二項係数」と呼ぶ.

•  $0 \leq n_i (i = 1, 2, \dots, r)$ ,  $\sum_{i=1}^r n_i = n$  のとき,  $\binom{n}{n_1 n_2 n_3 \cdots n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \cdots n_r!}$  を多項係数と言う.

さて, 上の記号は何に使うかということ: 1 から  $n$  までの数字を書いた  $n$  枚のカードがあって, これから  $k$  枚を取り出す場合を考える. 取り出し方 (戻し方) に応じて, 大体 3 とおりある.

Case 1:  $n$  枚のカードから繰り返しを許して  $k$  枚とり, その結果を並べる場合. この場合の結果は  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  という列になる ( $a_j$  は  $j$  番目に出たカードの目). ここでそれぞれの  $a_j$  は勝手に 1 から  $n$  の値をとれるので, 結果の総数 (場合の数) は

$$n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k \tag{1.8}$$

となる.

Case 2:  $n$  枚のカードから繰り返しを許さないで  $k$  枚とり, その結果を並べる場合. やはり結果は  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  の形になるが, 今回は  $a_j$  は全て別のものにならざるを得ない.  $a_1$  は  $n$  通り,  $a_2$  は  $a_1$  をよけるから  $(n-1)$  通り, と考えて行くと, 結果は

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{1.9}$$

となる.

Case 3:  $n$  枚のカードから繰り返しを許さないで  $k$  枚とるが, その順序は気にしない場合. やはり結果は case 2 のように  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  の形になるが, 今は  $a_j$  の順序を気にしない (順序が異なっても同じものと見なす). 従って場合の数は Case 2 のものを 「 $k$  個の数字を並べる並べ方」  $k!$  で割ったものになる:

$$\frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{1}{k!} = \binom{n}{k} \tag{1.10}$$

(以下はおまけだ. 無視しても良い) 1 つだけ, これらの応用例を挙げておく. この証明は帰納法でもできるし, Case 3 の数え方を使う方法もある.

命題 1.6 (二項定理, 高校でやったかな)  $1 \leq n$  では,  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ .

Case 4. なお, 補足的に Case 3 の一般化を考えておく.  $n$  枚のカードを, それぞれ  $n_1, n_2, \dots, n_r$  枚のカードからなる  $r$  個のグループに分ける場合 ( $\sum_{i=1}^r n_i = n$ ). この場合はまず  $n$  枚から  $n_1$  枚を取り出し, 次に  $n-n_1$  枚から  $n_2$  枚を取り出し, 次に  $n-n_1-n_2$  枚から  $n_3$  枚を取り出し ... と考えて

$$\binom{n}{n_1} \times \binom{n-n_1}{n_2} \times \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \times \cdots \times 1 = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \cdots n_r!} = \binom{n}{n_1 n_2 n_3 \cdots n_r} \tag{1.11}$$

となることがわかる.



10月24日の連絡：前回はいまいちノリが悪かったので、復習から始める。  
 第一回の小テストは再来週(11月7日)に行います。

## 2 条件付き確率とベイズ推定

### 2.1 条件付き確率

今回は確率を考える舞台(標本空間)とその上の確率の満たすべき性質,を導入した。これだけでは簡単すぎて何をやりたいのが混乱した人もいだろうから,もう少し自明でないものに進むことにする。ここでは「条件付き確率」の概念を導入する。

定義 2.1 (独立な事象) 確率空間  $(S, P)$  中の事象  $E, F$  が,

$$P[E \cap F] = P[E]P[F] \quad (E \text{ と } F \text{ が起こる確率は } E, F \text{ それぞれが起こる確率の積}) \quad (2.1)$$

を満たすとき,  $F$  と  $E$  は独立な事象 であると言う。

日常言語で言えば,  $E$  と  $F$  が独立とは,  $E$  と  $F$  の起こり方が無関係 ( $F$  が起こっても起こらなくても,  $E$  の起こり方には影響がない) と言う場合に当たる。

$E, F$  が独立でない場合は  $F$  の起こり方が  $E$  の起こり方に影響しているわけだ。影響の度合いを測るため,「条件付き確率」を導入する。

定義 2.2 (条件付き確率) 確率空間  $(S, P)$  中の事象  $E, F$  を考える。  $P[F] \neq 0$  の場合に,

$$P[E|F] \equiv \frac{P[E \cap F]}{P[F]} \quad (2.2)$$

を  $F$  の下で  $E$  が起こる条件付き確率 と言う (ベン図で感じをつかもう!)

註 2.3  $E$  と  $F$  が独立の場合はもちろん,  $P[E|F] = P[E]$  となる。

$P[E]$  そのものよりも  $P[E|F]$  と  $P[F]$  の方が良くわかる場合が往々にしてある。この場合

$$P[E] = P[E|F]P[F] + P[E|F^c]P[F^c] \quad (2.3)$$

として  $P[E]$  を計算することができる。条件付き確率そのものに興味がある場合もあるが,このような計算や後述のベイズ推定において,条件付き確率を計算の中間段階として利用する場合も非常に多い(詳しくは講義で)。

例 2.A: 袋の中に赤玉が10個,白玉が3個,黒玉が4個入っている。目をつぶって1つ取り出すとき:

1. 白が出る確率は?
2. 「出た玉は赤ではない」ことがわかった場合,白が出ている確率は?

例 2.B: 男と女の生まれる確率は  $\frac{1}{2}$  ずつとする。Aさんには子供が二人いる。

1. 二人とも男の子である確率は?
2. 「少なくとも一人が男の子だとわかっている」場合,二人とも男の子である確率は?

例 2.C: 袋の中に赤サイコロが一個, 白のサイコロが 2 個入っている. 白の方は普通の 1 ~ 6 が書かれたサイコロだが, 赤の方は 1, 2, 3 が 2 つずつ書かれている変態である. この袋から目をつぶってサイコロを一つ取り出して転がした. 1 の目が出る確率を求めよ.

例 2.D: (これはあくまで例. 深読みはしないように). 僕はある大学で 200 人の学生に物理を教えているが, そのうちの 4 割は高校で物理を履修しており, 残りの 6 割は未履修である. 過去の経験から, 僕の物理の講義に受かる確率は「高校での物理既習者では 0.9, 物理未修者では 0.3」と予測される. 以上から, 僕の物理の講義に受かる学生は 200 人中何人くらいと考えられるか?

## 2.2 ベイズの公式と推定

ここは次回の予告のつもり. 次回の講義には忘れずに持ってきてくれよ.

ここでは条件付き期待値の, 今までとは少し違った解釈を学ぼう. すなわち  $P[F|E]$  は「 $E$  が起こったと言う条件の下で  $F$  が起こる確率」なのだが, 解釈としては「 $E$  という情報を知った後で  $F$  の確率をどのように設定するのがよいか」を示す式とも考えられる. この節では, このような解釈に基づく推論も考える.

命題 2.4 (Bayes の公式) 確率空間  $(S, P)$  を考える. まず,  $E, F \subset S$  に対して

$$P[F|E] = \frac{P[F \cap E]}{P[E]} = \frac{P[E|F]P[F]}{P[E|F]P[F] + P[E|F^c]P[F^c]} \quad (2.4)$$

が成立. 一般化すると, 事象  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) が互いに排反 ( $F_i \cap F_j = \emptyset$  for  $i \neq j$ ), かつ  $\bigcup_{i=1}^k F_i = S$  を満たすときは,

$$P[F_j|E] = \frac{P[F_j \cap E]}{P[E]} = \frac{P[E|F_j]P[F_j]}{\sum_{i=1}^k P[E|F_i]P[F_i]} \quad (2.5)$$

が成立.

上の式は単に条件付き確率の定義

$$P[F|E] = \frac{P[F \cap E]}{P[E]} \quad (2.6)$$

と (2.3) の一般化

$$P[E] = \sum_{i=1}^k P[E|F_i]P[F_i] \quad (2.7)$$

を組み合わせただけのものであるから無理に暗記しない方がよい.  $P[E]$  の計算に (2.7) が不可欠な事例が多々あるから, 応用上は非常に役立つ. また, 解釈としても, 左辺は  $E$  で条件づけているのに, 右辺は  $F_i$  で条件付けていて, 条件付けの立場が逆転しているように見えるのも面白い.

10月31日の連絡: 小テストを来週(11月7日)の講義の最初に行います。体育で遅れてくる人のことも考え、開始は午後3時の予定で、テストそのものは45分くらいかな?  
 (言わずもがなの注意) この講義では確率・統計の考え方を解説していくが、時に問題を単純化しすぎていと感じることがあると思う(例: 下の問 2.6)。この批判は的を射ているわけで、現実問題には、余りに安易な統計手法の適用は慎むべきである。以下の問題はあくまで考えやすいように単純化したものであることは強調しておく。

レジュメ部分は先週までに配ったので、今日のプリントでは問題をいくつか載せましょう(小テストでは似たような問題を出題することになる。)

まずは条件付き確率を使った全確率の計算

問 2.5 (例 2.D のもう少し複雑なやつ)。僕はある大学で 200 人の学生に物理を教えている。学生の

- 4 割 ( $= r_1$ ) は高校で物理 I, II を履修
- 2 割 ( $= r_2$ ) は高校で物理 I のみを履修
- 残りの 4 割 ( $= r_0$ ) は物理を未履修

である。過去の経験から、僕の物理の講義に受かる確率は、

- 物理 I, II の既習者では  $0.9 (= p_1)$ ,
- 物理 I のみの既習者では  $0.6 (= p_2)$ ,
- 未修者では  $0.3 (= p_0)$

と予測される。以上から、僕の物理の講義に受かる学生は 200 人中何人くらいと考えられるか?

つづいてベイズ型の推定について

問 2.6 前回のプリントの例 2.D や上の問 2.5 と同じ状況を考える。僕のクラスの A 君は健闘むなしく、僕の物理の単位が取れなかった。A 君は高校で物理 (I まで, II まで?) を履修してきたのだろうか?

言うまでもないことであるが、上のような問いかけは余りにも安易である。単位が取れる — より正確には講義内容が身につく — かどうかは多分に本人のやる気や努力によるわけで、高校時代にどれくらいやったかで単純に推し量ることはできない。この問では非常な単純化を行っていることには注意されたい(将来、実際にこのような手法を用いる際にはくれぐれも単純化のしすぎに注意!)

上の 2 問が典型的な問題である。以下では数学的には同じ構造であるが応用としては異なった場面を述べる。

問 2.7 (血液検査の牛バージョン) 牛の病気をテストする検査を考える。この検査の誤差は

- 病気の牛をテストすると  $(1-p)$  の確率で「病気だ」と正しく判定するが、残りの  $p$  の確率で見逃してしまう
- 健康な牛をテストすると  $(1-q)$  の確率で「健康だ」と正しく判定するが、残りの  $q$  では(健康なのに)「病気だ」と言ってしまう

となっている。さて、独立な疫学的調査から病気の牛の割合は  $r$  であるだろうとわかっているとしよう ( $p, q, r$  はすべてゼロに近いがゼロではない)。

1. 一頭の牛を検査したとき、これが「病気だ」と判定される確率を求めよ。

2. 一頭の牛を検査したところ, 結果は陽性 (病気) だった. この牛が本当に病気である確率, 健康なのに間違っ  
て病気と判断された確率, をそれぞれ求めよ.
3. 一頭の牛を検査したところ, 結果は陰性 (健康) だった. この牛が本当に健康である確率, 病気なのに間違  
違って健康と判断された確率, をそれぞれ求めよ.
4. 以上の結果を解釈せよ.  $p, q, r$  の値によっては誤差が異常に大きくなる事に注意しよう.

下の問は本質的に上の問題と同じであるので, 答えも同じである. ただ, 正直に言って, 僕にとっては下の問  
の答えの方が直感と合わないように感じる (間違っ「病気だ」って言われる確率は  $p$  ですご〜〜〜小さいん  
だよ, と言われたらどうします?).

問 2.8 (問 2.7 の人間バージョン, 再録) かなり稀な病気の血液テストを考える. このテストの誤差の入り方は,

- この病気にかかっている人をテストすると  $(1-p)$  の確率で「病気だ」と正しく判定するが, 残りの  $p$  の  
確率で見逃してしまう
- 健康な人をテストすると  $(1-q)$  の確率で「健康だ」と正しく判定するが, 残りの  $q$  では (健康なのに)「病  
気だ」と言ってしまう

となっている. さて, 独立な疫学的調査から病気の人割合は  $r$  であるだろうとわかっている ( $p, q, r$  はすべて  
ゼロに近いがゼロではない).

僕の検査結果は陽性 (病気だ) だった. 僕が本当に病気である確率, 健康なのに間違っ「病気と診断された確  
率, をそれぞれ求めよ.

問 2.9 科目の期末試験は (数学ではあり得ないことに)  $\times$  式の問題で, 各問は  $m$  個の選択肢から一つ正  
解を選ぶ形になっています. A 君はかなり怠けていたので, 実力で (つまり, まぐれ無しで) 正しく答えられる  
確率は各問毎に  $p$  であると思われます ( $P < 1/2$ ). 答を正しく知っているときは勿論, A 君はその正解を答え  
ますが, 答がわからないときはヤケクソで  $m$  個の答から等確率で 1 個を選びます. さて,

1. ある一問に対して (まぐれであれ何であれ) A 君が正解を答える確率はいくらでしょう?
2. ある一問をテストしてみたところ, A 君は正解を答えました. このとき, A 君が実際に答を知っていた (ま  
ぐれ当たりではない) 確率はいくらでしょう?
3. 以上の結果を解釈せよ. どのような  $p, m$  の値の場合に「マグレ当たり」が多くなるか, 考えてみよう.

問 2.10 行方不明の飛行機を捜索中である. 現在, 墜落した可能性のあるのは 1, 2, 3 の 3 地区に限ること, お  
よびこれらの 3 地区に墜ちている確率は等しい (つまり  $1/3$ ) こと, までは絞り込んだ. これから捜索に入るが,  
厳しい気象条件のため, 確実に見つけられる保証はない — 実際に  $i$ -地区に墜ちていたとしても, 確率  $p_i$  で見逃  
すだろうと思われる ( $p_i \ll 1$ ).

まず 1-地区を捜索したところ, 飛行機は見つからなかった. この事実から,  $i$ -地区に墜ちている確率を推定せ  
よ ( $i = 1, 2, 3$ ).

(自習用の答え)

問 2.9. 1 は  $p + \frac{1-p}{m}$ , 2 は  $\frac{1-p}{mp+1-p}$

問 2.10. 1-地区に落ちた確率は  $\frac{p_1}{p_1+2}$ , 2, 3-地区はそれぞれ  $\frac{1}{p_1+2}$

1 1月14日の連絡：先週の小テスト，問1と問2は基本的には良くできていました．ただ，問1の小問2など，間違っただ人が思ったより多かったので，少し考えてみてください（先週解説したのではあるが）．なお，この講義では小テストの点の合計が半分くらいとれていれば合格とする方針です．今日の確率変数についてのレジュメは意識的に少々えーかげんな書き方をしています（離散と連続など，無限の絡むところをきちんと書くとかえってややこしくなると思ったので）

### 3 確率変数と期待値

中心極限定理に入る準備として，「確率変数」についての基本事項をまとめておこう．

#### 3.1 確率変数

今まではランダムな事象を考えてきた（例：このクラスの学生から一人選んだら男であった，とか）．事象はそれが起こるか起こらないかの2通りしかない．しかし，実際には選ばれた標本の数値的な性質を問題にすることも多い（例：選んだ学生の身長はいくらか）．

このような問題では（我々の注目する）実験の結果が数値で表されている．つまり，実験の結果としてランダムな数値が出てくるわけだ．そこで，このようにランダムに値がきまる数値のことを確率変数と呼ぶことにする（ちょっとえーかげん）．

確率変数には「離散的な確率変数」と「連続な確率変数」がある．「離散的な確率変数」とはとびとびの（有限個の）値しかとらないもので<sup>1</sup>，例は以下の通り．例 3.1.A：サイコロを一回振る実験を考える． $X$  を出た目の数とすると， $X$  のとりうる値は 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 通り．また，それぞれの値をとる確率は（マトモなサイコロなら）

$$P[X = 1] = P[X = 2] = \dots = P[X = 6] = \frac{1}{6} \quad (3.1)$$

と考えるのが自然だろう．また， $Y$  を「出た目が4以下なら 0，出た目が5以上なら 10」である確率変数とすると， $Y$  のとりうる値は 0, 10 で，その確率は

$$P[Y = 0] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P[Y = 10] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad (3.2)$$

例 3.1.B：サイコロを2個振る実験を考える． $Z$  を出た目の和とすると， $Z$  のとりうる値は 2, 3, 4, ..., 12 の 11 通り．また，それぞれの値をとる確率は（マトモなサイコロなら）

$$P[Z = 2] = \frac{1}{36}, \quad P[Z = 3] = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, \quad (\text{場合が多すぎて書ききれない}) \quad (3.3)$$

などとなる．

上の例でもわかるように，離散的な確率変数を記述するには「確率変数のとりうる値」と「それぞれの値をとる確率」を全て与えれば良い．つまり， $x_1, x_2, \dots, x_n$  の値をとる場合， $P[X = x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を与えればよいわけだ．

「連続的な確率変数」とは文字通り，連続な値をとる確率変数だ．例を見るのが良いだろう．

例 3.1.C： $X$  は区間  $[0, 1]$  内の全ての値を，同じ確率でとりうる確率変数である．

例 3.1.D： $Y$  このクラスの学生を一人選んだ場合の学生の身長である．

例 3.1.E： $Z$  は本山の駅で，名古屋方面の地下鉄に乗る場合の待ち時間（ただし，時間を計る場合にいくらかも細かく測定するものとする）である．

<sup>1</sup>とびとびの値しかとらないけど，全体としては無限個の値をとる例もある．が，話を簡単にするため，ここはごまかした

例 3.1.C では,  $X$  のとりうる値は連続無限個あり, これらの確率は同じと仮定しているから,  $X$  が特定の値 (例:  $X = \frac{1}{2}$ ) をとる確率はゼロだ (ゼロでなかったら, 全確率が無限大になってしまう!)

このように, 連続な確率変数を記述するには, 離散的な確率変数のような  $P[X = x_i]$  を与えるやり方は使えない. 仕方がないので,  $P[X = x_i]$  に相当するものとして,

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x) dx \quad (3.4)$$

のように, 確率密度関数  $f(x)$  を用いて積分の形で表すことにする.

例 3.1.C の場合は  $f(x) = 1$  である. 例 3.1.D や例 3.1.E の分布関数は厳密にはわかりそうにないが, 大体の感じは書けそうだ.

### 3.2 期待値と分散

では, 確率変数が与えられたとき, この確率変数の分布をどのように特徴づけたらよいか, 考えていこう. もちろん, 完全に特徴づけるには,  $P[X = x_i]$  や  $f(x)$  を与えないといけない. ここではそうではなくて, もっと少ない情報量で分布の特徴を捉えることを考えたいのだ.

**定義 3.1** 離散的な確率変数  $X$  が  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の値をとり, その確率が

$$P[X = x_i] = p_i \quad \left( \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right) \quad (3.5)$$

と与えられているとする. このとき,  $X$  の期待値 を

$$E[X] \equiv \langle X \rangle \equiv \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (3.6)$$

により定義する (数学では  $E[X]$  の記号を, 物理などでは  $\langle X \rangle$  の記号を用いることが多い.) また,  $X$  の分散 を

$$\text{Var}[X] \equiv E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle \quad (3.7)$$

により定義する.

連続な確率変数 (その確率密度関数は  $f(x)$ ) の場合は, (3.6) の代わりに

$$E[X] \equiv \langle X \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3.8)$$

とする (その後は全く同じ).

期待値とは, 要するに平均値のことであり, 確率変数の分布の「中心」を表す (どのような意味で中心かは要注意).

分散とは平均からのズレ (の 2 乗) の平均だから, 分散の平方根が分布の「拡がり」を表す.

1月28日の連絡：先週は配布プリントなしで失礼しました。今日から漸く第2部のメイン、大数の法則と中心極限定理に入ります。

前回の補足：前回、確率変数の「分散」 $\text{Var}[X]$  を定義したが、その平方根も実用上大事である。そこで、その平方根

$$\sigma \equiv \sqrt{\text{Var}[X]} \quad (\text{これによると } \text{Var}[X] = \sigma^2 \text{ となる})$$

を  $X$  の標準偏差と呼ぶことにする。

### 3.3 チェビシェフの不等式とその仲間

(ここは前回配るはずだったところ；講義で説明した以上のことが書いてあるが、最低限、チェビシェフの不等式がわかれば問題ない)

今までにも、「分散は確率変数のばらつきの目安を与える」と言ったが<sup>2</sup>、ここではもう少し定量的な議論を行う。ここでも確率空間  $(S, P)$  上の確率変数  $X$  を考える。

まず、 $A \in \mathbb{R}$  について

$$P[a \leq X \leq b] = \langle I[a \leq X \leq b] \rangle \tag{3.9}$$

であることに注意しておこう。ここで  $I[\dots]$  とは、カッコの中の  $\dots$  が満たされているときに 1、満たされていないときに 0 である関数である。

命題 3.2 (マルコフの不等式) 正の値のみをとる確率変数  $X$  と任意の正の数  $a$  に対して、

$$P[X \geq a] \leq \frac{\langle X \rangle}{a} \tag{3.10}$$

が成立 (勿論、右辺の期待値が存在しないときは右辺には意味がないけど。)

命題 3.3 (チェビシェフの不等式) 確率変数  $X$  の期待値を  $\mu$ 、分散を  $\text{Var}[X]$  と書くと、任意の正の数  $a$  に対して、

$$P[|X - \mu| \geq a] \leq \frac{\text{Var}[X]}{a^2} \tag{3.11}$$

が成立 (勿論、右辺の分散が存在しないときは右辺には意味がないけど。)

これらの不等式は勿論、右辺の期待値が存在しなければ意味がないが、存在する場合には (特に  $a \rightarrow \infty$  について) 強力なものになる。実際の応用については後述。

(証明の概略；前回説明したのを式にただけ。無理に憶える必要は無い!) これらの不等式は (3.9) を用いると簡単に証明される。マルコフの不等式なら

$$\langle X \rangle \geq \langle X I[X \geq a] \rangle \geq \langle a I[X \geq a] \rangle = a \langle I[X \geq a] \rangle = a P[X \geq a]. \tag{3.12}$$

チェビシェフの不等式なら

$$\text{Var}[X] = \langle |X - \mu|^2 \rangle \geq \langle |X - \mu|^2, I[X \geq a] \rangle \geq \langle a^2 I[X \geq a] \rangle = a^2 \langle I[X \geq a] \rangle = a^2 P[X \geq a]. \tag{3.13}$$

□

(以下はおまけ) 調子に乗って似たような不等式を作ることもしける。例えば、

$$P[|X - \mu| \geq a] \leq \frac{\langle |X - \mu|^n \rangle}{a^n} \quad (a > 0, n \text{ は任意の正の整数}) \tag{3.14}$$

<sup>2</sup>ここはもっと正確には「標準偏差は確率変数のばらつきの目安を与える」と言うべきだった

同様に, 任意の  $a, b > 0$  に対して

$$P[|X - \mu| \geq a] \leq \frac{\langle e^{b|X-\mu|} \rangle}{e^{ab}}. \quad (3.15)$$

また, マルコフの不等式の仲間として ( $X$  が非負の値しかとらないとき)

$$P[X \geq a] \leq \frac{\langle e^{bX} \rangle}{e^{ab}} \quad (3.16)$$

など.

## 4 大数の法則と中心極限定理

推定や検定の基本となる「大数の法則」「中心極限定理」について学ぶ. ここでは以下のような典型的な問題を考える.

問 4.A: マトモ (表と裏が  $\frac{1}{2}$  の確率で出る) な硬貨を 10000 回投げたとしよう. 表は何回くらい出るだろうか? もちろん, 答は 0 回から 10000 回まで, どれでもアリだけど, このうちのどの答が一番ありそうだろうか? また, そのありそうな答えになる確率はどうか?

この節では上のような問題を主に考える. 上では硬貨の例を取り上げたが, もっと一般に「独立な」実験の結果を扱う. 次の第 3 部ではこのような問題の逆に相当する, 以下の問題を考える.

問 4.B: ある硬貨を 10000 回投げたら, 表が 4500 回出た. この硬貨が表を出す確率  $p$  はどのくらいと考えられるか?

問 4.C: ある硬貨を 10000 回投げたら, 表が 1000 回だけ出た. この硬貨はマトモ (表・裏とも確率  $\frac{1}{2}$  で出る) であると思って良いか?

これらの問題に共通するのは 独立な確率変数の和 の振る舞いを見ようとしていることである. 以下に用語の意味も含めて説明していこう.

### 4.1 大数の法則

問 4.A を考える. 我々は直感的に「表は 5000 回」と言いたくなるが, 既に断ったように, 5000 回きちんと出るとは言えない. 言えるのはあくまで「 $n$  回以上が表になる確率はこのくらい小さい」「出る回数は 5000 回を中心にこのくらいでばらつく」などという確率評価である.

少しだけ抽象的になるが, 定理の形で書いておく. まず, 考える対象 (独立な確率変数の和) を導入する. 考えるのは  $X_1, X_2, X_3, \dots$  という確率変数の列で, 特にその和  $S_n \equiv \sum_{i=1}^n X_i$  を考える. 硬貨を投げる例では,  $X_i$  は  $i$  回目に投げた硬貨の結果 (表なら  $X_i = 1$ , 裏なら  $X_i = 0$  と決める) で, この場合  $S_n$  は「硬貨を  $n$  回投げたときに表の出た回数」を表す.

更にここで, 確率変数  $X_1, X_2, \dots$  は「独立」かつ「同分布」だと仮定する.

確率変数  $X_1, X_2, \dots$  が独立であるとは,  $X_1$  の結果と  $X_2$  の結果と,  $X_3$  の結果と ... が全く無関係であることをいう. 硬貨の例では, 一回目の結果によって, 2 回目以降の結果が左右されない, などのことを言う. 一応正確な定義を書くと, 確率変数  $X$  が値  $x_i$  を確率  $p_i$  で, 確率変数  $Y$  が値  $y_j$  を確率  $q_j$  でとる時 ( $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ ),  $X, Y$  が独立であるとは,

$$P[X = x_i \text{ かつ } Y = y_j] = P[X = x_i] P[Y = y_j] \quad (\text{確率が積になる})$$

ことを言う.

確率変数  $X_1, X_2, \dots$  が同分布であるとは,  $X_i$  がとりうる値とその確率が  $i$  によらず同じであることを言う.



上のようによく書くとややこしいが、要するに硬貨やサイコロを何回も投げる場合の  $i$  回目の結果が  $X_i$  だと思えばよい。

このとき、大数の法則は以下ようになる。

**Theorem 4.1 (大数の弱法則)**

独立・同分布な確率変数の列  $X_1, X_2, \dots$  と  $S_n \equiv \sum_{i=1}^n X_i$  を考える。  $X_i$  の期待値を  $\mu$ ,  $X_i$  の分散を  $\text{Var}[X_1]$  と書くと、

$$\text{Var}[X_1] < \infty \text{ ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\frac{S_n}{n} \neq \mu\right] = 0 \tag{4.1}$$

が成り立つ (上のはちょっとえーかげんな書き方)。より正確にはどんな正の数  $\epsilon > 0$  に対しても

$$P\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right] \leq \frac{\text{Var}[X_1]}{n\epsilon^2} \tag{4.2}$$

が成り立つ。

定理の形にするとややこしいが、要するに  $\frac{S_n}{n}$  は  $n \rightarrow \infty$  で  $\mu$  に収束する と主張しているわけだ。これは我々の直感を支持するものである。例えばマトモな硬貨を何回も投げると、大体半分くらいが表になるだろう。上の定理は「硬貨を無限回 (!) 投げると、その半分くらいは表だよ」と主張していることになる。

(対数の弱法則の証明の“説明”)

先週やったチェビシェフの不等式を確率変数  $\frac{S_n}{n}$  に応用するだけなのだが、それには  $\frac{S_n}{n}$  の期待値と分散を計算しないとイケない。そこで、確率変数  $X_1, X_2, \dots$  の和である  $S_n$  について、その期待値や分散がどうなるか、考えてみよう。重要なので命題の形にまとめると：

**命題 4.2** 確率空間  $(S, P)$  における確率変数  $X, Y$  と実定数  $a > 0$  に対しては以下が成り立つ：

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y], \quad E[aX] = aE[X] \tag{4.3}$$

$$\text{Var}[aX] = a^2 \text{Var}[X] \tag{4.4}$$

また、 $X, Y$  が独立である場合には以下が成り立つ：

$$\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]. \tag{4.5}$$

これを認めて対数の弱法則を証明しよう。上の線形性から

$$E[S_n] = \sum_{i=1}^n E[X_i] = n\mu, \quad E\left[\frac{S_n}{n}\right] = \mu \tag{4.6}$$

および

$$\text{Var}[S_n] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] = n\text{Var}[X_1], \quad \text{Var}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2} \text{Var}[S_n] = \frac{1}{n} \text{Var}[X_1] \tag{4.7}$$

を得る。よってチェビシェフの不等式に代入して

$$P\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right] \leq \frac{1}{\epsilon^2} \text{Var}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{\text{Var}[X_1]}{n\epsilon^2} \tag{4.8}$$

(大数の弱法則の証明の説明終わり)

上の要点は、 $S_n$  の分散が  $n$  に比例してしか増えない (よって  $S_n/n$  の分散は  $1/n$  に比例して  $n \rightarrow \infty$  でゼロに行く) ことである。分散 (の平方根) というのは確率変数のばらつきの程度を表すから、分散がゼロになると言うことは  $S_n/n$  がその平均値からばらつかない、ことを意味する。これが上の証明とチェビシェフの不等式の意味だった。

(命題 4.2 の証明; 興味のある人だけ見ればよい)  $X$  のとりうる値を  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ),  $Y$  のとりうる値を  $y_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ), それぞれの値をとる確率を  $P[X = x_i \text{ かつ } Y = y_j] = p_{ij}$  とおく. すると,

$$E[X + Y] = \sum_{ij} p_{ij}(x_i + y_j) = \sum_{ij} p_{ij}x_i + \sum_{ij} p_{ij}y_j \quad (4.9)$$

であるが,  $\sum_{j=1}^M p_{ij} = P[X = x_i \text{ かつ } Y \text{ は何でも良い}] = P[X = x_i]$  であるので,

$$\sum_{ij} p_{ij}x_i = \sum_{i=1}^N x_i \left( \sum_{j=1}^M p_{ij} \right) = \sum_{i=1}^N x_i P[X = x_i] = E[X] \quad (4.10)$$

が成り立つ. 同様に

$$\sum_{ij} p_{ij}y_j = E[Y] \quad (4.11)$$

なので,  $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$  が証明された.

次に,  $E[aX]$  については,

$$E[aX] = \sum_{i=1}^N P[X = x_i](ax_i) = a \sum_{i=1}^N P[X = x_i] x_i = a E[X]. \quad (4.12)$$

また,  $\text{Var}[aX]$  については  $E[(aX)^2] = E[a^2X^2] = a^2E[X^2]$  であることと線形性から

$$\text{Var}[aX] = E[(aX)^2] - (E[aX])^2 = a^2 E[X^2] - (aE[X])^2 = a^2 E[X^2] - a^2 (E[X])^2 = a^2 \text{Var}[X]. \quad (4.13)$$

(4.5) の証明はスペースの都合で略. □

硬貨投げの例に戻って考えよう. この場合,  $E[X_i] = \frac{1}{2}$ ,  $\text{Var}[X_i] = \frac{1}{4}$  であるので, 大数の弱法則から

$$P\left[ \left| \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \right| > \epsilon \right] \leq \frac{1}{4n\epsilon^2} \quad (4.14)$$

が得られる.

(練習問題)

問 4.1 マトモな (どの面も同じ確率で出る) サイコロを何回も投げることを考え,  $i$  回目に出た目を  $X_i$  で表す.

- $X_i$  の期待値と分散, 標準偏差を求めよ.
- $S_n \equiv \sum_{i=1}^n X_i$  とするとき,  $\frac{S_n}{n}$  の期待値と標準偏差を求めよ.
- 対数の弱法則を用いて,  $n \rightarrow \infty$  の時に  $\frac{S_n}{n}$  がどのような値になりそうか, 議論せよ.

問 4.2 (少しムズイかも: 来週へのつなぎ) 3つの小問からなるテストがある. それぞれの小問は4つの選択肢から1つの正解を選ぶ選択式である. 全く勉強していない学生達が当てずっぽうでテスト問題に答えることを考える.

- 一人の学生が当てずっぽうでこれらの問題に答えた場合, 正解した小問の数を  $X$  で表そう.  $X$  の期待値と分散, 標準偏差を求めよ.
- $N$  人の学生がこのテストを受けた場合の正解された小問の総数を  $S_N$  と書く.  $S_N$  の期待値と分散, 標準偏差を求めよ (ヒント:  $i$  番目の学生が正解した小問の数を  $X_i$  で表すと,  $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$  とかける.)
- 対数の弱法則を用いて,  $n \rightarrow \infty$  の時に  $\frac{S_n}{n}$  がどのような値になりそうか (要するにこれらの学生達の平均点はどのくらいか), 議論せよ.

(上の問題では学生は互いに答案を見せあったりしないものとする — これは数学の言葉で何の条件を満たさせるためかわかるかな?)

1 2 月 5 日の連絡 : 今日を中心極限定理です . 再来週 ( 1 2 月 1 9 日 ) に 2 回目の小テストを行います . 実施要領は第一回と同じような感じです ( 今日は風邪で調子が非常に悪い . 大声が出ないのでよろしく )

## 4.2 正規分布と中心極限定理

先週は大数の法則をやった . これは要約すると ,

分散が有界な独立・同分布な確率変数  $X_1, X_2, \dots$  の和を考え ( $X_i$  の期待値を  $\mu$ ) ,  $S_N \equiv \sum_{i=1}^N X_i$  とすると ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} P\left[\frac{1}{N}S_N = \mu\right] = 1$  が成り立つ

と言うものだった . 更にその証明 ( チェビシェフの不等式を使った ) によると ,  $S_N$  がその平均値の周り  $\sqrt{N}$  くらいのところ集中していった . そこで , 集中していく様子を持って細かく見たい , と言うのが中心極限定理である . この定理はこれからの検定・推定の議論の基礎になる , 非常に重要なものなので , なんとか理解して欲しい .

定理 4.3  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) を独立 , かつ同分布な確率変数とし , その平均と , 標準偏差をそれぞれ

$$\mu \equiv E[X_i], \quad \sigma \equiv \sqrt{\text{Var}[X_i]} \tag{4.15}$$

とする . このとき ,

$$S_N \equiv \sum_{i=1}^N X_i, \quad Z_N \equiv \frac{1}{\sigma \sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu) = \frac{S_N - \langle S_N \rangle}{\sigma \sqrt{N}} \tag{4.16}$$

を定義すると , 任意の  $a < b$  に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left[a \leq Z_N \leq b\right] = \int_a^b \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \tag{4.17}$$

が成り立つ .

右辺に出てきた分布を「正規分布」( normal distribution ) と言う . Normal と言うのは , この分布が非常に良く出てくるもので , ほとんど「普通」の分布だからである . 通常

$$\Phi(x) \equiv \int_{-\infty}^x \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \tag{4.18}$$

と書く . 以下に  $1 - \Phi(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy$  のいくつかの値を載せておく :

$x$	0	1	1.645	1.960	2	2.326	2.576	3	4
$1 - \Phi(x)$	$\frac{1}{2}$	0.1587	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	0.02275	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{200}$	$1.350 \times 10^{-3}$	$3.167 \times 10^{-5}$

上の定理の主張をもう少し述べておく .  $S_N$  や  $S_N - N\mu$  自身は  $N$  個のものの和だから ,  $N$  が大きくなると ( 普通は ) 大きくなる . けれども ,  $S_N - N\mu$  の大きくなり方は  $N$  に比例するのではなく ,  $\sqrt{N}$  に比例する , と言うのが前節までの話だった . そこで上の定理では  $S_N - N\mu$  を  $\sqrt{N}$  で割ることによって  $Z_N$  を定義した . こうすることで ,  $N \rightarrow \infty$  でも ( 大抵は ) 有限にとどまるような量を定義したわけである . それで , 定理は , この  $Z_N$  が「正規分布」に近づいていくことを主張している .

正規分布について

正規分布とは一般に

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx \quad (4.19)$$

を満たすような分布のことを言う (これは  $N(\mu, \sigma^2)$  と書かれる.) 中心極限定理に出てきたものは「標準正規分布」と呼ばれ,  $\mu = 0, \sigma = 1$  の場合に相当している.

さて, 積分の変数変換を用いると, 一般の正規分布の確率を標準正規分布の分布確率から求めることができる. つまり,  $X$  が  $N(\mu, \sigma^2)$  に従うときに,

$$Z \equiv \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (4.20)$$

を定義すると  $Z$  が標準正規分布になることが容易にわかる. もちろん, この場合  $X$  と  $Z$  のズレを考慮して

$$P[a \leq X \leq b] = P\left[\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right] \quad (4.21)$$

とやる必要はあるが.

ともかく, このようなわけで, いろいろある正規分布は, 標準正規分布になおして計算できるので, この講義でも主に標準正規分布を扱う.

本来ならばここで中心極限定理の証明をすべきだが, これはこの講義のレベルを遙かに超えている. 代わりに実例を挙げる.

### 二項分布

中心極限定理の一番簡単な例として, 前回と同じく, コインを何回も投げることを考えよう (ただし, 一回投げたときに表の出る確率は  $p$  とする.)  $i$  回目に表が出れば 1, 裏が出れば 0 となる確率変数を  $X_i$  と書くと,  $S_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$  は  $N$  回のうちで表が出た回数である.  $N$  回のうち, 丁度  $m$  回だけ表になる確率は

$$P[S_N = m] = \binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m}, \quad \binom{N}{m} \equiv {}_N C_m \equiv \frac{N!}{m!(N-m)!} \quad (4.22)$$

と計算できる. 上の分布を (パラメーターが  $p$  の) 「二項分布」と言う (ここで上の導出を説明).

さて, 上の二項分布について平均と分散を計算してみよう. 定義通りに行うと ( $q \equiv 1 - p$ ),

$$\langle X_1 \rangle = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p, \quad \text{Var} X_1 = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) = p(1-p) = pq \quad (4.23)$$

であるので, 中心極限定理に出てくる  $Z_N$  は

$$Z_N \equiv \frac{S_N - Np}{\sqrt{pqN}} \quad (4.24)$$

となるはずである. 実際に  $N \rightarrow \infty$  に従って  $Z_N$  が正規分布に近づいていく様子は次ページに載せてある (標語的には「二項分布は  $N$  が大きいときに正規分布に近づく」と言える.)

### 問 4.3 :

問 4.1 と同じく, マトモな硬貨を  $N$  回投げる. 表の出る回数が投げた回数の 49% から 51% に入る確率を, 中心極限定理を用いて考えたい.  $N = 100, 1000, 10000$  に対して, この確率がどのような積分で表されるか, 求めよ (注: 積分そのものの値は計算できないと思うので, やらなくて良い.)

### 問 4.4 :

問 4.3 の続き. 今度は「表の出る回数が投げた回数の 49% から 51% にほとんど確実にに入る」ような  $N$  を求めたい. 「ほとんど確実に」と言うのはいい加減な書き方だから, 具体的に「表の出る回数が投げた回数の 49% から 51% に入る確率が 0.95 以上になる」ような, そんな  $N$  を求めよ.

12月12日の連絡: 来週(12月19日)に2回目の小テストを行います。第一回と同じく、午後3時から始めて、30分~45分。

なお、期末テストをやってくれと言う希望が全くないので、このままで行くとやらない可能性が高い。その代わりに、期末テストの時間に第3回の小テストを行うことを考えています(3学期になっての講義が3回しかなく、このうちの1回をテストにするのはキツイので。)これについて意見があれば早めにどうぞ。

中心極限定理の使い方について、前回の続き(以下はかなり急いで作ったので、ミスプリを含む可能性が大。講義を聴いて、細かい所よりも流れを重視してください。おかしいと思ったら遠慮なく質問して!)

問 4.1. (今、気がついた!「対数の弱法則」とあるのは「大数の弱法則」の間違い。問 4.2 も同様)。これはやるだけ、ね。

$X_i$  は 1 から 6 までの値を確率  $\frac{1}{6}$  ずつでとるから、

$$\langle X_i \rangle = \frac{1}{6} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}, \quad \langle (X_i)^2 \rangle = \frac{1}{6} \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6}, \quad (4.25)$$

$$\text{Var}[X_i] = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{35}{12}} \quad (4.26)$$

で、 $X_i$  が独立であるから

$$\left\langle \frac{S_n}{n} \right\rangle = \langle X_1 \rangle = \frac{7}{2}, \quad \text{Var}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n} \text{Var}[X_1] = \frac{1}{n} \frac{35}{12} \quad (4.27)$$

大数の弱法則から

$$P\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{7}{2}\right| > \epsilon\right] \leq \frac{35}{12} \times \frac{1}{\epsilon^2 n} \quad (4.28)$$

である。つまり、 $\frac{S_n}{n}$  は  $\frac{7}{2}$  に近づく。

問 4.2. これは二項分布になる。4項目から1つを当てずっぽうで選択する、のだから、小問の一つ一つに正解する確率は  $\frac{1}{4}$  と考えられる。各小問の結果が独立であると仮定すると、正解の数が  $i$  である確率は ( $i = 0, 1, 2, 3$ )

$$P[X = i] = \binom{3}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{3-i} \quad (4.29)$$

である。これから定義通りに計算して、

$$\langle X \rangle = \frac{3}{4}, \quad \text{Var}[X] = \frac{9}{16}, \quad \sigma = \frac{3}{4} \quad (4.30)$$

$X$  の独立性から、

$$\langle S_N \rangle = N \langle X \rangle = \frac{3}{4}N, \quad \text{Var}[S_N] = N \text{Var}[X] = \frac{9}{16}N. \quad (4.31)$$

大数の弱法則から平均の正解数は  $\frac{3}{4}$ 。

問 4.3. 中心極限定理を使うには、まず  $Z_N$  を作らないといけない。 $i$  回目に表が出れば  $X_i = 1$ 、裏が出れば  $X_i = 0$  とすると、 $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$  と書けるから、今までに考えてきた形である。さて、

$$\langle X_i \rangle = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}X_i = \frac{1}{4}, \quad \sigma = \frac{1}{2} \quad (4.32)$$

であるから、中心極限定理にでてくる  $Z_N$  は

$$Z_N = \frac{S_N - \frac{N}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}N}} = \frac{2S_N - N}{\sqrt{N}} \quad (4.33)$$

となっている。さて、表が 49% から 51% 出る、と言うことは

$$0.49 \leq \frac{S_N}{N} \leq 0.51 \iff \left| \frac{S_N}{N} - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{100} \iff |Z_N| \leq \frac{\sqrt{N}}{50} \quad (4.34)$$

と言うことだ。だから、中心極限定理を少しええ加減に使うと、この確率は

$$P\left[0.49 \leq \frac{S_N}{N} \leq 0.51\right] = P\left[|Z_N| \leq \frac{\sqrt{N}}{50}\right] \approx \int_{-\frac{\sqrt{N}}{50}}^{\frac{\sqrt{N}}{50}} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.35)$$

となるわけだ (ヤヤコシイが、積分の上下は  $\frac{\sqrt{N}}{50}$ .)  $N$  に具体的な数を入れると、

$$N = 100 \text{ なら } \int_{-1/5}^{1/5} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.1585, \quad (4.36)$$

$$N = 1000 \text{ なら } \int_{-\sqrt{10}/5}^{\sqrt{10}/5} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4729, \quad (4.37)$$

$$N = 10000 \text{ なら } \int_{-2}^2 e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.9545, \quad (4.38)$$

(最後の積分の値は数値的に出したもので、皆さんに対しては要求しない.)

問 4.4. 今度は

$$\int_{-\frac{\sqrt{N}}{50}}^{\frac{\sqrt{N}}{50}} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \geq 0.95 \quad (4.39)$$

となるような  $N$  を求めればよい。この積分は手計算ではできないから、この前のプリントにあった  $\Phi$  で書き直し、表を使うしかない。定義から

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.40)$$

であった。(4.39) の積分を上  $\Phi$  で表すには、一般に (講義で説明)

$$\int_a^b e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^b e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} - \int_{-\infty}^a e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (4.41)$$

とするのが良い。特に  $a < 0$  の場合は、対称性から

$$\int_{-\infty}^a e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-a}^{\infty} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = 1 - \Phi(-a) \quad (4.42)$$

を使う。結局、

$$\int_{-\frac{\sqrt{N}}{50}}^{\frac{\sqrt{N}}{50}} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = \Phi\left(\frac{\sqrt{N}}{50}\right) - \left\{1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{N}}{50}\right)\right\} = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{N}}{50}\right) - 1 \quad (4.43)$$

となる。よって、(4.39) の条件は

$$2\Phi\left(\frac{\sqrt{N}}{50}\right) - 1 \geq 0.95 \iff 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{N}}{50}\right) \leq 0.025 = \frac{1}{40} \quad (4.44)$$

となる。前回のプリントの表を見ると、こうなるには

$$\frac{\sqrt{N}}{50} \geq 1.960 \implies N \geq (50 \times 1.960)^2 = 9604 \quad (4.45)$$

となる。まあ、余り細かいことを言っても仕方ないので、 $N \geq 9600$  ぐらい、と言うのが答え。

1月9日の連絡：期末テストなどについて。

前回の小テストの際、期末テストがあった方が良く、との意見も少しありましたので、以下のような折衷案を考えました。これが多分、今までの方針とも適合する上に、講義時間も十分にとれて良いと思う。

1. 正規の期末テストの時間中に、「第3回小テスト、および、期末テスト」を行う。ただし、問題に重なりがあるので、少しヤヤコシイ。以下に詳しく説明する。
2. 問題は大問が3つ（便宜上、A, B, C と呼ぶ）である。この内の2つ（A, B）は今までの2回の小テストの範囲から出題し、第3問（C）はこれからやる範囲から出題する。
3. 「第3回小テスト」は上のCだけで成立する。つまり、上のCだけを解答すれば第3回小テストを受けたものとみなし、今まで通りの計算法で成績を出す（要するに全3回の小テストの合計が合格点なら。合格点の基準は来週、公表する）。
4. いろいろな理由から「期末テストで一発逆転」を計りたい人は、A, B, C の3問全部に解答する。この場合は（Cを受けているのだから）「第3回小テスト」と「期末テスト」の両方を受験したものとみなす。成績は「全3回の小テストの合計」と「期末の成績」の良い方でつける。
5. 本来、混乱を避けるために、「Cをやる第3回小テストの部分」と「A, Bをやる期末の部分」の2段階に分けて実施すべきであるが、こうするとそれぞれに割ける時間が限られてくる（特に、「第3回小テスト」だけをたくさんの時間をかけてやりたい人が困る）。ので、どうするか（3問まとめてやるか、途中で分けるか）は思案中。

強調しておくが、これまでの方針通り、「小テストの成績」と「期末の成績」の良い方で採点することには変わらない。また、僕は相対評価はしないから、今までの小テストの結果が割合に良い人は上のCだけを解けば十分である — 要するに「他の人がみんな期末を受けて、みんな合格しちゃったら相対的に自分が落ちるのではないか、だから自分も期末を受けないといけない」と言うことは全くない。

なお、今日は間に合わないが、第2回的小テストも来週までには採点して返却する。また、合格点の目安も発表するから、参考にして欲しい（場合によっては過去2回的小テストだけで合格になってしまう人も何人かいると思われるが、そんな人も、まあ、第3回小テストは一応、受けて下さい。）

## 5 推定と検定

漸くこれで準備が整った。この講義のもう一つのテーマである「推定と検定」に入ろう。

### 5.1 基本的な考え方

以下の問題群を考えてみる。

問 5.1. コインを10回投げたところ、10回も表が出た。どう見たってこのコインはイカサマ（表が出やすい）と思うが、これは本当か？

正直この間には確実には答えることが出来ない。マトモなコインを投げても、たまたま全部おもてになることもあるから、確実にイカサマだとは結論できない。でも、常識的に考えて、ほとんど間違いなくイカサマだと思うよね。どのくらいの確率でイカサマだと言えるか（言えないか）、を考えるのが「仮説検定」の問題である。

問 5.2. 上と同じ問題（10回中10回とも表が出た）で、コインを一回投げて表が出る確率  $p$  はどのくらいと考えるのが自然か？

イカサマかどうか、の定性的な問だけでなく、どのくらいイカサマか、を問うのが上の問題である。この場合、 $p$  の値をぴったりこれくらい、と言うことは出来ないだろう。出来るのはせいぜい、「 $p$  は大体 以上、 $\times \times$  以下と考えられる」という感じの、 $p$  の存在範囲（存在区間）を与える事である。これが「区間推定」の問題である。

この第3部ではこのような2つの問題を主に考える。もちろん、もっと複雑な状況を考えもするが、基本的なところはこれで尽きている。今日はその基本的な考えを説明しよう。

### 5.1.1 仮説検定の基本的な考え方

上の問 5.1 を考える。このコインがマトモかどうかを問題にしているのだから、マトモだと仮定して 10 回表になる確率を計算してみよう。まともなコインを 10 回投げて 10 回とも表になる確率は、言うまでもなく

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 9.77 \times 10^{-4} \quad (5.1)$$

である。でも問 5.1 では、こんなに小さい確率で起こるはずの事象が起こったと主張している。この場合、2通りの可能性がある。

- a. コインはマトモなのだが、 $9.77 \times 10^{-4}$  というような、小さな確率でしか起こらない事象が、たまたま起こった。
- b. いやいや、コインはそもそもかなりいびつで、表が出やすくできていた。そのために 10 回とも表になったのだ。

しつこいが、確実にどちらかとは言い切れない。どちらも起こり得て、前者の確率が非常に小さいと言うだけである。しかしそうは言っても、a の立場をとるのは心情的にもかなり困難である。

仮説検定ではこの心情的な見方の通りに判断し、上の立場 a は認めず、立場 b を採用する。つまり、

1.  $9.77 \times 10^{-4}$  なんて確率で起こるはずの事象は非常に起こりにくい。
2. でもそいつが実際に起こったんだ。
3. 実際に起こった事象に対して  $9.77 \times 10^{-4}$  などと言う確率を与えた確率計算は間違っている！
4. だから、その確率計算の元になった仮説「コインがマトモ」が、そもそもおかしい、

と考えるのだ。

ここで少し言葉を導入しておく。

- 上での本音は「このコインはイカサマだ」を主張することだった。この本音の主張を対立仮説と言う。
- しかし、上ではこの対立仮説そのものは扱わず、その否定命題の「このコインはマトモだ」に基づいているいと計算した（その結果「コインはマトモ」の仮説がおかしいと結論）。このように対立仮説の否定命題（結果的に「その仮説はおかしい」と結論したいもの）を帰無仮説と言う。こう呼ぶのは上で見たとおり、結果的に「この仮説はおかしい」と否定される（無に帰する）はずの命題だから。
- 帰無仮説を疑う際に使ったのは「(この仮説で計算すると) 起こった事象の確率がこんなに小さくなるから、元の仮説は許せない」という考えだった。この場合「どのくらい小さい確率の事象は起こるはずがないと判断するか」の境目を決めておく必要があり、この境目の値を危険率と言う。通常、これは 0.05 または 0.01 くらいにとる。つまり、確率 5% または 1% くらいの事象は「あり得ない、起こるはずがない」と判断し、その確率計算の元になった仮説を疑いにかかるのである。

仮説検定についての、非常に重要な注意：

上の例では「コインはマトモ」という仮説が最終的に否定されたので、めでたしめでたしだった。つまり、この場合、帰無仮説が否定（無に帰する）されたので、対立仮説が復活し、「このコインはイカサマ」と結論できたわけである。では、帰無仮説が否定できない場合はどうなるのだろうか？

例として、「コインを 10 回投げると、6 回が表、4 回が裏であった」場合に、やはりイカサマかどうか考えてみよう。今までのように、「コインはマトモ」を帰無仮説として計算してみると、「6 回が表、4 回が裏」の確率は

$$\binom{10}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{210}{2^{10}} \approx 0.2051 \quad (5.2)$$



となる。確率 0.2 と言うのはまあ、5 回に 1 回と言うことだから、そんなに珍しいことでもないわけで、これではもう、「コインはマトモ」を否定する訳にもいかないだろう。では何が結論できるのか？

この場合、何も結論できない。もっと正確には、「『コインはマトモ』の仮説を否定することは出来ない」が結論である。しかししかし（官僚の答弁ではないが）、否定することは出来ないと言うのはほとんど何も言っていない。「コインはマトモ」を否定してやろうと思って計算したが、結果としては証拠不十分で結論が出なかった、と言う感じである。特に、積極的に「コインはマトモ」であると主張しているのでは決していない。

このように「帰無仮説が否定できない」場合は「何も結論できない」と考えるのが正しい。決して「帰無仮説が採用できる」のではない、ことをしつこく強調しておく。

しつこいけど、もう一つ注意。

上でも繰り返し強調したように、帰無仮説を否定した場合（上の「10 回とも表ならマトモではない」）でも、この結論が間違っている可能性はある。まともな硬貨だって、 $9.77 \times 10^{-4}$  の確率では「10 回とも表」が出るわけだから、これだけの確率で間違っ「イカサマ」の烙印を押してしまうわけだ。上での「危険率」という呼び名は、正にこれを指している。つまり、「帰無仮説が正しいのにも関わらず否定してしまう」確率の目安が危険率なのだ。

### 5.1.2 区間推定の基本的な考え方

では問 5.2 に進もう。ここでも基本的な考え方は同じである。 $p = \frac{1}{2}$  だとしたらあり得ないほど確率が小さくなったのは上で見た。ので、別の  $p$  の値をいろいろ設定し、「10 回とも表」の確率が危険率を超えるような  $p$  の範囲を求めればよい。答は当然、危険率の設定によるわけだが、ともかくまず、いろいろな  $p$  の値に対して、「10 回とも表」の確率を計算してみよう。

$p$ の値	0.5	0.6	0.6309574	0.7	0.7411345	0.8	0.9	1.0
「10 回とも表」の確率	0.000977	0.00605	0.010000025	0.0282	0.050000034	0.107	0.349	1.0

これを見ると、もちろん、 $p$  が大きい方が「10 回とも表」が起こりやすくなっている（極めつけは  $p = 1$  で、この場合は絶対に「10 回とも表」だ。）であるけども、 $p = \frac{1}{2}$  を含め、 $p$  が余り小さいと「10 回とも表」の確率はかなり小さく、ほとんど起こり得ない。そこで危険率と相談しながら、「起こりうる確率」になるような  $p$  の値を求めていく。

確率 0.01 とはかなり小さいが、ひとまずこれを危険率に設定しよう。要するに、0.01 以上の確率を持つ事象は起こっても良い、と判断するわけだ。表を見ると、 $p \geq 0.6309574$  ぐらいでは「10 回とも表」の確率が 0.01 を超えており、ここでは確率 0.01 以上で「10 回とも表」になりうる。つまり、「10 回とも表」になったのはあり得る事象で、従って元にした仮説  $p \geq 0.6309574$  は許される。結果としてあり得る  $p$  の範囲は

$$\text{危険率 1\% では } p \geq 0.6309574$$

になることがわかる。同様に、

$$\text{危険率 5\% では } p \geq 0.7411345$$

となることもわかる。

これが区間推定の基本的な考え方である。要するに、起こった事象（問の場合は「10 回とも表」）が「あり得る事象」になるような（つまり、その事象の確率が危険率を超えるような）パラメータの範囲を求めればよい（コインの例をもっと簡単に解く方法はあとで詳しく説明する。ここでは基本的な考えをわかればよい。）

註：しつこいけども、もう一回強調しておく。上で推定された区間はあくまで「 $p$  がこの範囲なら『10 回とも表』の結果と矛盾はない」ということで、それ以上ではない。

### 5.1.3 いくつかの例題

以下の問の内, 問 5.3 と 問 5.4 は来週までに各自やってくること (レポートでは無いが, これに類似の問題が「第 3 回小テスト」で出るかも.) 来週, 解答を示します.

問 5.3. コインを  $N$  回投げたとき,  $N$  回とも表が出た. このコインがイカサマである, と結論できるような  $N$  の範囲を, 危険率 5% および 1% のそれぞれの場合について求めよ (対立仮説, 帰無仮説を明示して議論すること).

問 5.4. コインを 10 回投げたら  $n$  回表が出たという. このコインがイカサマであると結論できるような  $n$  の範囲を, 危険率 5% および 1% のそれぞれの場合について求めよ (対立仮説, 帰無仮説を明示して議論すること).

以下は来週によく考える問題で, これだけの情報では解けない. ある集団全体の平均などを問題にしたいのだが, 集団全体を計ることは出来ないでその一部分 (標本集団と言う) のみを計る. 標本集団の平均から元の平均を推測しようと言うわけで, これも「区間推定」の問題である.

問 5.5. 名古屋の高校一年生 (男子) の平均身長を求めたいが, 全員を計るのは大変なので, 名駅前で 100 人を捕まえて計ったところ, 平均が 170 cm だった. 名古屋の高校一年生 (男子) の平均身長はどのくらいと考えられるか?

(補足)

表が出る確率が  $p$  のコインを  $N$  回投げたときに表が  $\ell$  回出る確率は

$$\binom{N}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{N-\ell} \tag{5.3}$$

である (2 項分布).

(来週以降の予告) 基本的な考え方は今日やったことで尽きている. ただし, 以下の 2 つの方向での拡張を考えていく.

- 上の問 5.4 など, 投げたのが 10 回だから何とかなるが, これが 1000 回, とかになると計算が大変である. よって, 「中心極限定理」を用いて簡単に計算する手法を考える.
- 上の問 5.5 は (予告したとおり) これだけでは解けない. と言うのは, 「分散」がわかっていないから. この場合にどうするか, などと考えていく.

教科書で言うと, 9 節 ~ 12 節をやる予定である (と言っても, 9 節は中心極限定理で, 既にやってある. 10 節と 11 節の基本的な所は上で既に説明した.)

1月16日：先週の予告通り，期末テストの時間に期末テスト + 第3回小テストを行いますので，よろしく．成績は宣言通り「小テストの合計 または 期末の成績」の良い方で判断します．

小テストの合格点の目安は以下の通り：

- 全3回の小テストの合計が115点以上は無条件に合格．この場合，第3回小テストが0点でも構わない．
- 「全3回の小テストの合計が100点前後」が本当のボーダーである．小テストの合計が100点前後の人は，第3回の頑張りなどで判断する（合計100点でも第3回がゼロ点の場合は，多分，落ちるだろう．逆に99点でも第3回小テストが良かったり，期末テストを頑張れば，通るだろう．）

## 5.2 仮説検定についての補足

推定や検定の基本的な考えは先週の通りである．なんだけど，注意すべき事が多いので，しつこくまとめておく．

### 5.2.1 片側検定，両側検定

先週の例題の解答から始めよう．

問5.3の場合，対立仮説（本音）は「コインはイカサマ」，帰無仮説は「コインはマトモ」であるが，この「イカサマ」の意味が問題だ．想定しているのは「表が沢山出たから，このコインは表が出やすく作ってあるのでは？」と言うような場合である．つまり，この場合の対立仮説は単に「イカサマ」と言うよりは「表が出やすい」または「裏が出やすい」のどちらかと思った方がよい（教科書 p. 94） — この意味で対立仮説は厳密には帰無仮説の否定にはなっていない．これは問5.4で問題になる．

帰無仮説の「コインはマトモ」を仮定して計算すると， $N$ 回のうちで $N$ 回とも表になる確率は $2^{-N}$ である．これが0.05より小さくなるのは $N \geq 5$ の時で，この場合は危険率5%で「イカサマ」と結論できる．同様に， $N \geq 7$ なら危険率1%で「イカサマ」と結論できる． □

問5.4には非常に注意すべき所がある．その前に， $X$ を表が何回出たか，の変数として，確率を計算しておく

$$P[X = 0] = P[X = 10] = \frac{1}{1024}, \quad P[X = 1] = P[X = 9] = \frac{10}{1024}, \quad P[X = 2] = P[X = 8] = \frac{45}{1024}, \quad (5.4)$$

$$P[X = 3] = P[X = 7] = \frac{120}{1024}, \quad P[X = 4] = P[X = 6] = \frac{210}{1024}, \quad P[X = 5] = \frac{252}{1024} \quad (5.5)$$

である．

さて，対立仮説（本音）「コインはイカサマ」，帰無仮説「コインはマトモ」の持っている意味は問5.3と同じだが，これが重要である（教科書 p. 94）．

例として， $n = 9$ だったとしてみよう．「9回表」となる確率だけを考えると，これは1%より小さいから棄却できるように見える．しかし， $n = 9$ の場合に棄却するのなら， $n = 10$ が出ても，当然棄却すべきだろう．と言うわけで，この場合に問題になるのは

$$P[X \geq 9] = \frac{11}{1024} \approx 0.0107 \quad (5.6)$$

なのだ．これは0.01より大きいから，この場合「コインがマトモ」は棄却できないのだ！

このように考えると，危険率1%で「イカサマ」と判断できるのは $n = 0, 10$ の時のみである．また，危険率5%の場合は， $n = 0, 1, 9, 10$ の時のみ「イカサマ」と判断できる（ $n = 2, 8$ の場合は上と同じ理由で棄却できない）

上で「9回表」の確率だけを考えず「9回以上表」とした理由については，コインを10000回投げることを考えると納得しやすい．この場合，投げた回数が非常に多いため，それぞれ特定の回数だけ表が出る確率は非常に

小さくなる．例えば，5000 回表，の確率は 0.00798 くらいであって，1% より小さい．ちょっと考えると「コインはマトモ」を棄却してしまいたくなるが，投げた回数丁度半分しか表が出ていないのだから，このコインをイカサマと判断するのはおかしい．この場合，問題になるのは個々の確率の値ではなく，結果（表の回数）がこの区間に入っていればおかしい（イカサマ）と言う区間（棄却域）の設定である．

問 5.3 も同じ問題であるが，この場合，全部表だったので，問題が表面化することはなかった．

言葉：

上の問のように，対立仮説がある区間の片側に出てくるような場合を片側検定と言う．両側に出る場合を両側検定と言う．後者の例としては対立仮説が左右対称になっている場合，たとえば工場の製品が規格にあっていないかどうかの検定などが挙げられる．

### 5.2.2 中心極限定理との連携

以下の例題を考える（問 5.4 の 1000 回バージョン）．

問 5.6 . コインを 10000 回投げたら  $n$  回表が出たという．このコインがイカサマであると結論できるような  $n$  の範囲を，危険率 5% および 1% のそれぞれの場合について求めよ（対立仮説，帰無仮説を明示して議論すること）．

この問題，10000 回も投げて一つ一つの  $n$  について確率を計算していると大変だから，中心極限定理を使う．今回も  $n = 5000$  を中心に片側の確率を考えて（以下， $n < 5000$  とする） ，

$$P[X \leq n] < 0.01 \quad (\text{危険率}) \tag{5.7}$$

などとなるような  $n$  を求めたいわけだ．

さて，中心極限定理を使おう．コインがマトモだとすると，

$$Z_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \left( n - \frac{N}{2} \right) = \frac{n - 5000}{50} \tag{5.8}$$

が中心極限定理に出てくる  $Z_N$  だ（ $N = 10000$  だよ）．従って，中心極限定理のズルをすると

$$\begin{aligned} P[X \leq n] &\approx \int_{-\infty}^{(n-5000)/50} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{(5000-n)/50}^{\infty} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = 1 - \Phi\left(\frac{5000-n}{50}\right). \end{aligned} \tag{5.9}$$

$1 - \Phi(x)$  の表から，危険率 1% の時には

$$\frac{5000-n}{50} \geq 2.326 \quad \implies \quad n \leq 4880 \tag{5.10}$$

なら「イカサマ」と判断できることがわかる（実は  $n = 5000$  の両側であるから  $n \geq 5120$  くらいでもイカサマと判断できる）

同様に危険率 5% ならば

$$\frac{5000-n}{50} \geq 1.645 \quad \implies \quad n \leq 4920 \tag{5.11}$$

または  $n \geq 5080$  くらいでイカサマ，と判断される．

問 5.7. 6面あるサイコロを 10000 回投げたら 1 の目が 2000 回も出た．このサイコロはイカサマと結論できるだろうか？

1月23日：とうとう、最後の講義になりました。今日はこれまでのまとめと、「分散がわからない場合にどうするか」をやります。2週間前に宣言したように、期末テスト期間中に「第3回小テスト」および「期末テスト」を行います。くりかえしになりますが要領は以下の通り：

1. 正規の期末テストの時間中に、「第3回小テスト、および、期末テスト」を行う。ただし、問題に重なりがあるので、少しヤヤコシイ。以下に詳しく説明する。
2. 問題は大問が3つ（便宜上、A, B, C と呼ぶ）である。この内の2つ（A, B）は今までの2回の小テストの範囲から出題し、第3問（C）はこれからやる範囲から出題する。
3. 「第3回小テスト」は上のCだけで成立する。つまり、上のCだけを解答すれば第3回小テストを受けたものとみなし、今まで通りの計算法で成績を出す（要するに全3回の小テストの合計が合格点なら。合格点の基準は下に公表してある）。
4. いろいろな理由から「期末テストで一発逆転」を計りたい人は、A, B, C の3問全部に解答する。この場合は（Cを受けているのだから）「第3回小テスト」と「期末テスト」の両方を受験したものとみなす。成績は「全3回の小テストの合計」と「期末の成績」の良い方でつける。
5. 本来、混乱を避けるために、「Cをやる第3回小テストの部分」と「A, Bをやる期末の部分」の2段階に分けて実施すべきであるが、こうするとそれぞれに割ける時間が限られてくる（特に、「第3回小テスト」だけをたくさんの時間をかけてやりたい人が困る）。よって3問まとめてやる可能性が大きいので、どの問いを解くかに注意。

強調しておくが、これまでの方針通り、「小テストの成績」と「期末の成績」の良い方で採点することには変わらない。また、僕は相対評価はしないから、今までの小テストの結果が割合に良い人は上のCだけを解けば十分である。

小テストの合格点の目安は以下の通り：

- 全3回の小テストの合計が115点以上は無条件に合格。この場合、第3回小テストが0点でも（第3回を受験しなくても）構わない。
- 「全3回の小テストの合計が100点前後」が本当のボーダーである。小テストの合計が100点前後の人は、第3回の頑張りなどで判断する（合計100点でも第3回がゼロ点の場合は、多分、落ちるだろう。逆に99点でも第3回小テストが良かったり、期末テストを頑張れば、通るだろう。）

次に前回のプリントの訂正。講義中に気がついて訂正したとおりであるが、もう一度正しいものを載せる。訂正箇所は「両側検定」を行っている部分をすべて「片側検定」にしたところである。

以下の例題を考える（問5.4の1000回バージョン）。

問5.6. コインを10000回投げたら  $n$  回表が出たという。このコインがイカサマであると結論できるような  $n$  の範囲を、危険率5% および1% のそれぞれの場合について求めよ（対立仮説、帰無仮説を明示して議論すること）。

この問題、10000回も投げて一つ一つの  $n$  について確率を計算していると大変だから、中心極限定理を使う。今回も  $n = 5000$  を中心に片側の確率を考えて（以下、 $n < 5000$  とする）,

$$P[X \leq n] < 0.01 \quad (\text{危険率}) \tag{5.12}$$

などとなるような  $n$  を求めたいわけだ。

さて、中心極限定理を使おう。コインがマトモだとすると、

$$Z_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \left( n - \frac{N}{2} \right) = \frac{n - 5000}{50} \tag{5.13}$$

が中心極限定理に出てくる  $Z_N$  だ ( $N = 10000$  だよ). 従って, 中心極限定理のズルをすると

$$P[X \leq n] \approx \int_{-\infty}^{(n-5000)/50} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = \int_{(5000-n)/50}^{\infty} e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = 1 - \Phi\left(\frac{5000-n}{50}\right). \quad (5.14)$$

$1 - \Phi(x)$  の表から, 危険率 1% の時には

$$\frac{5000-n}{50} \geq 2.326 \quad \implies \quad n \leq 4880 \quad (5.15)$$

なら「イカサマ」と判断できることがわかる (実は  $n = 5000$  の両側であるから  $n \geq 5120$  くらいでもイカサマと判断できる.)

同様に危険率 5% ならば

$$\frac{5000-n}{50} \geq 1.645 \quad \implies \quad n \leq 4920 \quad (5.16)$$

または  $n \geq 5080$  くらいでイカサマ, と判断される.

### 5.3 分散がわからない場合, など

問 5.5. 名古屋の高校一年生 (男子) の平均身長を求めたいが, 全員を計るのは大変なので, 名駅前で 100 人を捕まえて計ったところ, 平均が 170 cm だった. 名古屋の高校一年生 (男子) の平均身長はどのくらいと考えられるか?

前に宣言したように, この問はそのままで解けない. というのは元になる分布 (高校生の身長分布) の分散がわからないからである. 実のところ, このままのデータではお手上げなのだが, 100 人の個々のデータを持っていれば  $t$ -分布というものを使って何とかなる. 他にも有用な分布があるので, まとめて書いておこう.

まず, 中心極限定理の主張は,  $X_i$  が独立・同分布で各  $X_i$  の期待値が  $\mu$ , 分散が  $\sigma^2$  なら,

$$Z_N \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu) \quad (5.17)$$

は ( $N \rightarrow \infty$  で) 正規分布に従う, ことだった. さてここで上の  $Z_N$  に似ているけども少しだけ違う,

$$Y_N \equiv \frac{1}{U\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu) = \frac{\sqrt{N}}{U} (\bar{\mu} - \mu), \quad \bar{\mu} \equiv \sum_{i=1}^N X_i, \quad U^2 \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{\mu})^2 \quad (5.18)$$

を考える. ここで  $U$  は不偏分散と呼ばれる量である. すると非常に都合の良いことに (元々の  $X_i$  が独立・同分布で, 何かの正規分布に従うならば),  $Y_N$  は 自由度  $N-1$  の  $t$ -分布 と呼ばれる分布に従うことがわかる.  $t$ -分布が具体的にどんな分布かは教科書や参考書を見てもらうことにして, ここでは  $t$ -分布の利点だけを強調しておく.

(5.17) を見ると, 右辺には未知の量が 2 つ ( $\mu$  と  $\sigma$ ) 入っている. 高校生の問題では  $\mu$  を求めたかったのだが,  $\sigma$  (高校生全体の標準偏差) がわからない限り手が出せない. ところがところが (!) (5.18) の右辺には, 未知の量は  $\mu$  一つしか出ていない!  $\sigma$  の代わりに  $U$  という量が出ているが, これは  $\bar{\mu}$  同様, 標本 (100 人の高校生) から計算できる量である.

つまり,  $t$ -分布のウリは,  $\sigma$  がわからなくても何とかなる, ところにあるわけだ. 実際の応用では個々の  $X_i$  は正規分布に従わない場合がほとんどだが, そこは中心極限定理と同じノリで,  $N$  が大きければ  $Y_N$  が  $t$ -分布に従うとみなしても良いわけだ.

## 目次

0	前口上	3
0.1	この講義はどのように役に立ちそうか？	3
0.2	キーになる考え方	4
1	確率論の基礎	5
1.1	確率論の舞台 — 事象と標本空間	5
1.2	数学における確率	6
1.3	数の数え方の復習	7
2	条件付き確率とベイズ推定	9
2.1	条件付き確率	9
2.2	ベイズの公式と推定	10
3	確率変数と期待値	13
3.1	確率変数	13
3.2	期待値と分散	14
3.3	チェビシェフの不等式とその仲間	15
4	大数の法則と中心極限定理	16
4.1	大数の法則	16
4.2	正規分布と中心極限定理	19
5	推定と検定	25
5.1	基本的な考え方	25
5.1.1	仮説検定の基本的な考え方	26
5.1.2	区間推定の基本的な考え方	27
5.1.3	いくつかの例題	28
5.2	仮説検定についての補足	29
5.2.1	片側検定, 両側検定	29
5.2.2	中心極限定理との連携	30
5.3	分散がわからない場合, など	32