数学基礎 V 中間テスト　問題用紙 (原：2131216) 2002.06.17 実施予定

注意事項

- 使用した答案用紙に，氏名と学生番号を明記せよ．
- 大体は基本的な問題である．ともかく，全問に解答せよ（勿論，問２はどちらかを選択するのであるよ）．
- 答案用紙の裏も使用して良い．ただし，裏を使用する場合は,「裏に続く」などと明記すること.（答案用紙が足りなくなった場合は追加を渡すから，その旨言ってください.）
- 解答に至るまでの道筋，理由等を説明すること．最終的な結果のみ書いた場合には，全く点がないこともあり得る．必要以上に神経質になる必要はないが，どのように説明するかも評価のうちと思っていただきたい．
- 問題文中，$1+2i$ などとある i は，もちろん虚数単位である．
- 講義中に予告したとおり，以下の要領で持ち込みを認めている．
  - 持ち込めるものは A4 の大きさの紙の片側に自筆で書いたもの一枚のみ．裏側まで書いたり，コピーしたりしたものは無効である．
  - 持ち込んだ紙には名前と学生番号を書いて，答案用紙と共に提出すること.（持ち込み無しで試験を受けようと言う人も，白紙に名前と学生番号を書いて提出してください.）
- 各問には配点の 目安 を記してある．これはあくまで目安であり，実際にはこれから 5 点以上増減することもあり得ると了解されたい.（こちらが予想もしなかった皆さんの弱点が採点中に見つかることがある．これに対応するために配点をずらすのもやむを得ない.）なお，目安点の合計が 105 になっているのは，ご愛敬（超えた 5 点はボーナス）．
- 問題は裏に，２ページに渡ってある．

６月３日の講義の後，少しだけ問４を難しくした．そのため，採点基準は少し甘くするつもりであるから，決して焦らずに問題に取り組むこと．

問題は裏に

問 1： （大体 30 点）次の関数が複素関数として微分可能かどうか，判断せよ（理由付きで）．更に，微分可能なときは導関数を求めよ．

- $f(z) = z^4$
- $g(z) = (\mathrm{Rez})^2$ 　（$\mathrm{Re}z$ は z の実部を表す.）
- $h(z) = \dfrac{z}{1+z}$

以下の問 2a と 2b は，複素函数の微分可能性に関する，ホンの少しだけ高度な問題である．どちらか一問を選択して解答せよ.（両方に解答した場合は，原則として出来の良い方をとる — 両方の得点の和をとることはしない — が，両方とも完璧に解答した場合は，ボーナスを上乗せするかも）

問 2a： （大体 20 点）Cauchy-Riemann の関係式が成り立っているにもかかわらず，複素関数としては微分可能でない関数はあるか？あるならば例を挙げ，ないならばその理由を述べよ．

問 2b： （大体 20 点）複素平面全体で微分可能な複素関数 $f(z)$ がある．複素数 z の実部と虚部をそれぞれ x, y と書き（$z = x + iy$），f の実部と虚部をそれぞれ $u(x, y), v(x, y)$ と書く［つまり，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ］とき，

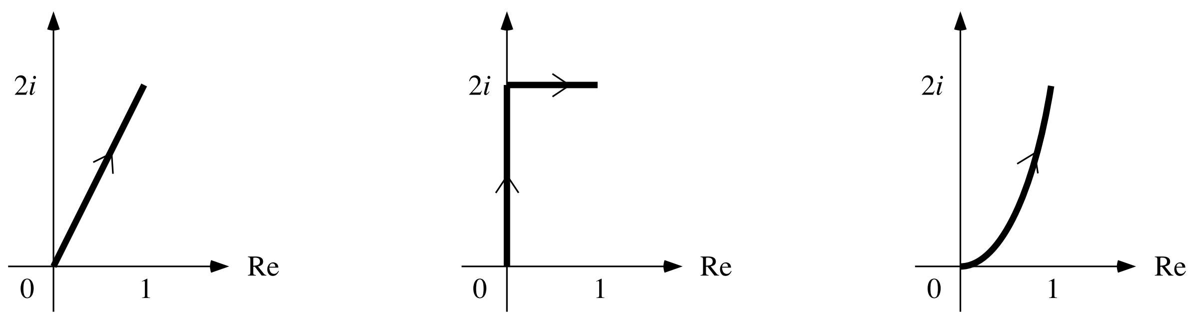
$$u(x, y) - 2v(x, y) = x^2 + 6xy + ay^2 \qquad \text{かつ} \qquad f(0) = 0$$

であるという（a は未知の定数）．以下の問に答えよ．

1. a の値を決定せよ．
2. $u(x, y)$ と $v(x, y)$ を x, y の関数として求めよ．
3. 更に $f(z)$ を z の関数として表せ．

問 3： （大体 30 点）複素平面上の点 0 から $1 + 2i$ へ行く曲線 γ_j （$j = 1, 2, 3$）を以下のように定める（図参照．左から $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$）．

- γ_1 は 0 から $1 + 2i$ へまっすぐに行く線分,
- γ_2 は，まず 0 から $2i$ へ行き，その後 $1 + 2i$ へ行く折れ線,
- γ_3 は放物線 $y = 2x^2$ に沿って行くもの（実部を x，虚部を y と書いた）．



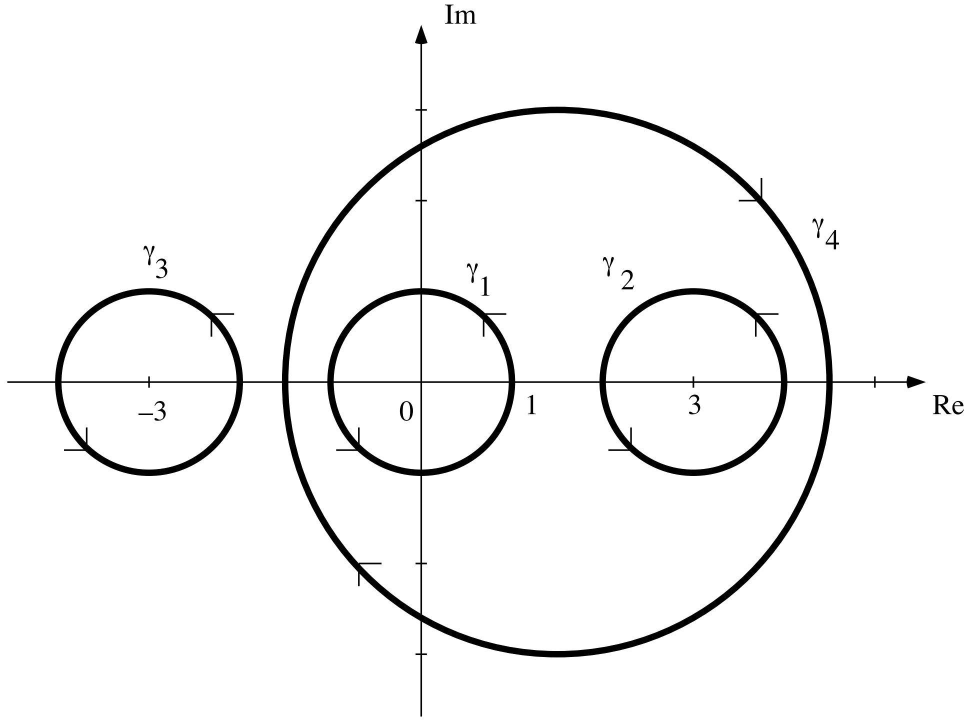
このとき，以下の問に答えよ．

1. 線積分 $\displaystyle\int_{\gamma_j}(1+z^2)dz$ を $j=2$ と $j=3$ の場合について，線積分の定義に基づいて計算せよ.（「線積分の定義に基づいて」とは言っても,「リーマン和のようなものの極限」の式にまで戻ることはない．問題にしている曲線についてはもっと簡単な式があったはずで，それを使えば十分.）なお，ここでは線積分の計算が出来るかどうかを問うているのだから，面倒でも $j=2$ と $j=3$ を別々にやって下さい.
2. 上の結果をもとにして，線積分 $\displaystyle\int_{\gamma_1}(1+z^2)dz$ の値を答えよ.

問 4：（大体 25 点）複素平面上の曲線 γ_j （$j=1,2,3,4$）を以下のように定める.

- γ_1 は原点 0 を中心とする半径が 1 の円（反時計回り），
- γ_2 は 3 を中心とする半径が 1 の円（反時計回り），
- γ_3 は -3 を中心とする半径が 1 の円（反時計回り），
- γ_4 は $\frac{3}{2}$ を中心とする半径が 3 の円（時計回り），

（図を参照）.



このとき，線積分 $\displaystyle\int_{\gamma_j}\frac{1+z^2}{z^2(z-3)}dz$ の値を，$j=1,2,3,4$ のそれぞれについて求めよ.

ヒント：直接に積分を計算するのは大変なので，Cauchy の積分定理や積分公式を利用する方が簡単である．色々な曲線があってヤヤコシイとは思うが，一つ一つ，ゆっくり考えていけば出来るはずである（γ_3 や γ_2 辺りが簡単か？）．なお，このような問題は「留数」というものを使って解くのが普通であるが,「留数」を使わなくても今までの知識で十分に解けるようになっている.

以上

中間テストの解答例

以下は主に自習用の略解である．特に断らない限り，x, y は複素数 z の実部と虚部，u, v は複素関数 $f(z)$ などの実部と虚部を表す．

問 1： ともかく定義通りやっていくだけである．

$f(z)$ については

$$f'(\alpha) = \lim_{z\to\alpha} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} = \lim_{z\to\alpha} \frac{z^4-\alpha^4}{z-\alpha} = \lim_{z\to\alpha} \bigl(z^3+z^2\alpha+z\alpha^2+\alpha^3\bigr) = 4\alpha^3$$

と計算できるので，どこでも微分可能で $f'(z) = 4z^3$．

$h(z)$ についても同様で，$\alpha \neq -1$ では

$$h'(\alpha) = \lim_{z\to\alpha} \frac{1}{z-\alpha}\Bigl(\frac{1}{1+z} - \frac{1}{1+\alpha}\Bigr) = \lim_{z\to\alpha} \frac{-1}{(1+z)(1+\alpha)} = -\frac{1}{(1+\alpha)^2}$$

と計算できるので，$z \neq -1$ では微分可能で $h'(z) = -(1+z)^{-2}$．なお，$z = -1$ では関数自体が発散しているから微分不可能だ．

最後に $g(z)$ であるが，上のようにニュートン商を作ってやると，うまく行かない（極限がない）感じがする．そこで Cauchy-Riemann の関係式を確かめると，$u = x^2, v = 0$ だから

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

となっているので，$x = 0$ のときのみ成り立つ可能性がある．Cauchy-Riemann の関係式はあくまで必要条件だから，ここまでで結論できるのは $x \neq 0$ では微分不可能，ということ．

そこで $\alpha = ib$ （b は実数）でのニュートン商を作って計算してみると，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to b}} \frac{x^2-0^2}{x+iy-ib} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to b}} \frac{x^2}{x+iy-ib}$$

の極限が問題になる．さて，$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} \geq |a|$ であることから

$$\Bigl|\frac{x^2}{x+iy-ib}\Bigr| = \frac{|x|^2}{|x+iy-ib|} \leq \frac{|x|^2}{|x|} = |x|$$

であるので，この極限は確かに存在して，ゼロに等しい．従って，$g(z)$ は $\mathrm{Re}\, z = 0$ の時のみ微分可能で，その時の導関数はゼロ．

補足と註：

- あくまで Cauchy-Riemann は十分条件であることに注意しよう．だから，微分可能と言うときに Cauchy-Riemann だけをチェックするのは不十分である．
- ニュートン商の極限を正しく計算した後に Cauchy-Riemann をチェックしている人が何人かいた．検算のつもりなら大変に良いことだが，微分可能性の意味が良くわかっていないのなら問題なので，注意してください．(ニュートン商の極限があればそれだけで十分である！)

問 3：

1. これも定義通りやる．γ_3 は，$\gamma_3(t) = t + 2it^2$ （$0 \leq t \leq 1$）と表されるから，

$$\int_{\gamma_3} (1+z^2)dz = \int_0^1 \bigl\{1+(t+2it^2)^2\bigr\}(1+4it)dt = \ \text{展開して積分を計算}\ = -\frac{8}{3} + \frac{4i}{3}$$

γ_2 は，$2it \quad (0 \leq t \leq 1)$ と $2i + t \quad (0 \leq t \leq 1)$ の 2 つの曲線の和だから，

$$\int_{\gamma_2} (1+z^2)dz = \int_0^1 \bigl\{1+(2it)^2\bigr\}(2i)dt + \int_0^1 \bigl\{1+(2i+t)^2\bigr\}(1)dt = -\frac{8}{3} + \frac{4i}{3}$$

2. 非積分関数は $1+z^2$ で，複素平面全体で正則だから線積分の値は始点と終点のみにより，途中の経路にはよらない（Cauchy の積分定理の応用）．だから，

$$\int_{\gamma_1}(1+z^2)dz = \int_{\gamma_2}(1+z^2)dz = -\frac{8}{3}+\frac{4i}{3}$$

である．

補足と註：

- おおむね，良くできていました．しかしそれでも，γ_2 の後半部分（実軸に平行なところ）を t $(0 \leq t \leq 1)$ としてしまった人が何人かいました．注意してくだされ．
- γ_j に関する積分の値が全部同じになるのはこれらで作られる閉曲線の内部と周囲で，非積分関数が正則だからである．本当はこのような理由まできちんと書いて欲しい．
- 相変わらず，計算力の低下が気になる．正しく線積分の定義を使って，正しい積分の式を書いたのに，ショウモナイ積分の間違いをした人が何人かいた．今回は甘くつけたが，期末では計算間違いをもう少し厳しく採点するかも．

問 4：

たくさん経路があって混乱したかも知れないが，一つずつやれば（少なくとも γ_4 以外は）できるはず．

まず，γ_3 について．非積分関数 $\dfrac{1+z^2}{z^2(z-3)}$ は $z=0,3$ 以外では正則である．特に γ_3 の周囲と内部で正則であるから，Cauchy の積分定理から，

$$\int_{\gamma_3}\frac{1+z^2}{z^2(z-3)}dz = 0.$$

次に γ_2 については，積分を $\displaystyle\int_{\gamma_j}\frac{f(z)}{z-3}dz$，$f(z)=\dfrac{1+z^2}{z^2}$ と書いてみると，$f(z)$ 自身は γ_2 の周囲と内部で正則だ．だから，Cauchy の積分公式から

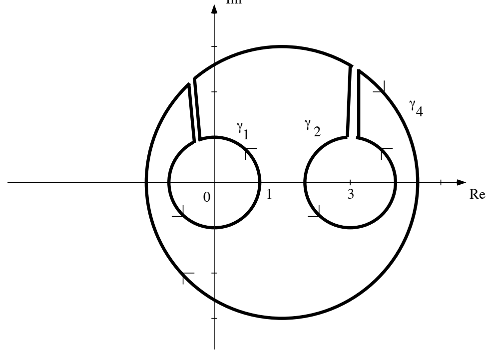
$$\int_{\gamma_2}\frac{1+z^2}{z^2(z-3)}dz = \int_{\gamma_2}\frac{f(z)}{z-3}dz = 2\pi i\, f(3) = \frac{20\pi i}{9}.$$

γ_1 については，積分を $\displaystyle\int_{\gamma_j}\frac{g(z)}{z^2}dz$，$g(z)=\dfrac{1+z^2}{z-3}$ と書いてみると，$g(z)$ 自身は γ_1 の周囲と内部で正則だ．だから，Cauchy の積分公式（と言うよりも Goursat の公式）から

$$\int_{\gamma_1}\frac{1+z^2}{z^2(z-3)}dz = \int_{\gamma_1}\frac{g(z)}{z^2}dz = 2\pi i\, g'(0) = -\frac{2\pi i}{9},$$

ここで $g'(0)$ は $g(z)$ の微分．

最後に γ_4 であるが，これは出来なくても仕方ない．γ_4 内には非積分関数が微分できないところが $z=0,3$ と２つもある．ので，単純に Cauchy の積分公式などを使うわけにはいかない．しかし，そもそも Cauchy の積分公式を証明したときのように，積分路を図のようにつないでやると，この新しい閉曲線の周囲と内部では非積分関数は正則である．



従って Cauchy の積分定理から

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_4} \frac{1+z^2}{z^2(z-3)}dz = 0$$

であり，

$$\int_{\gamma_4} \frac{1+z^2}{z^2(z-3)}dz = -\int_{\gamma_1} \frac{1+z^2}{z^2(z-3)}dz - \int_{\gamma_2} \frac{1+z^2}{z^2(z-3)}dz = -2\pi i\,.$$

補足と註：

- ううむ，γ_3 くらいは簡単だと思ったんだが，余り出来ていませんでしたね．むしろ γ_1 の方が出来が良かったりして，ちょっと不思議…　ともかく，Cauchy の積分定理や積分公式の重要な成立条件「正則性」（どこで正則なら良いのか）について考え直す機会にして下さい．

問 2a：

Cauchy-Riemann の関係式はあくまで必要条件だから，これを満たしていても微分不可能なものはある．また，微分可能性の必要十分条件は「Cauchy-Riemann を満たし，かつ全微分可能」だったので，全微分不可能なものを作れば良いわけだ．具体的には，実軸，虚軸方向には微分できそうに見えるが，斜め 45 度では発散しているとか，そのようなものを目指す.（以下，原点で Cauchy-Riemann を満たしているが微分不可能，なものを作る）.

例えば，原点での実軸方向，虚軸方向の微分がゼロになるように，

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^p} \qquad (1/2 < p < 1 \text{ は定数})$$

と言う形のものを考えてみよう.（ただし，$f(0)=0$ と定義する．じつのところ，$p<1$ の条件は，f が原点で連続にゼロになるように入れた.）

この場合，

$$u(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^p}, \quad v(x,y) \equiv 0, \qquad \text{ただし} \quad u(0,0)=0$$

である．従って，

（１）これは原点で Cauchy-Riemann の関係式を満たす．なぜなら，

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=y=0} = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0)-u(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

などと，４つの偏微分が全てゼロになるからである（v はもともとゼロだから，偏微分もゼロ）.

（２）しかし，これは原点で微分不可能である．なぜなら，$x=y$ の方向での方向微分を考えると，

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,h)-f(0,0)}{\sqrt{2}h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2}h}\frac{h^2}{h^{2p}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{h\to 0} h^{1-2p} = \infty$$

（最後の無限大は $p>1/2$ で）となり，この方向微分は存在しないから.

というわけで，上で作った $f(x,y)$ が一つの例である.

問 2b： key になるのは Cauchy-Riemann である事は予想されよう．これをどう使うかですね．まず，Cauchy-Riemann から

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = A, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = B$$

が成り立っていることに注意する.（あとの都合上，それぞれの微分を A, B とおいた.）

一方，$u-2v$ の値がわかっているので，これを x, y でそれぞれ微分すると，

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial x} = 2x+6y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial y} = 6x+2ay$$

を得る．従って，上の A, B に対して，

$$A+2B = 2x+6y, \quad B-2A = 6x+2ay$$

となるから，これを解いて，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=A=-2x+\frac{6-4a}{5}y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=B=2x+\frac{12+2a}{5}y$$

が得られる．

さて，上の微分の式を積分しよう．ここで注意すべきは，積分したときの「積分定数」が x, y の関数になりうることである（ここで間違った人が何人かいた．残念！）．例えば，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2x+\frac{6-4a}{5}y$$

を x で積分すると，

$$u(x,y)=-x^2+\frac{6-4a}{5}xy+C_1(y) \qquad C_1(y)\text{ は }y\text{ の未知関数}$$

となる．同様に

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x+\frac{12+2a}{5}y \qquad \Longrightarrow \qquad u(x,y)=2xy+\frac{6+a}{5}y^2+C_2(x)$$

が得られるが，この２つは等しいはずであるから，

$$C_2(x)=-x^2, \qquad C_1(x)=\frac{6+a}{5}y^2, \qquad \frac{6-4a}{5}xy=2xy$$

となっているはずで，これから

$$a=-1, \qquad u(x,y)=-x^2+2xy+y^2$$

が得られる．同様に v について解くと，

$$v(x,y)=-x^2-2xy+y^2$$

を得る．

最後に

$$f(z)=u+iv=(1+i)(-x^2+y^2)+(1-i)2xy$$

を $z=x+iy$ で書き直す．$f(z)$ が正則なので絶対に z だけで書けるはずだと信じて

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

を代入してひたすら計算する．答は（予想通り $\bar{z}$ が消えて）

$$f(z)=-(1+i)z^2$$

となる．

なお，a の値のみを先に求めるには，u, v が共に調和関数であること，つまり

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

であることを用いると簡単である（調和関数であることは講義でも説明したとおり，Cauchy-Riemann から出る）．すなわち，

$$0=\frac{\partial^2 (u-2v)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 (u-2v)}{\partial y^2}=2+2a$$

が成り立つはずなので，$a=-1$ が結論できる．

補足と註：

- 2a については全微分不可能なものを作ればよい，と言うところまで行った人は何人かいたが，流石に具体例まで出来た人はいなかった．
- 2b は２名ほど，完答していた．なかなか立派です．