

注意事項

- 使用した答案用紙に，氏名と学生番号を明記せよ．
- 大体は基本的な問題である．ともかく，全問に解答せよ（勿論，問2はどちらかを選択するのであるよ）．
- 答案用紙の裏も使用して良い．ただし，裏を使用する場合は「裏に続く」などと明記すること（答案用紙が足りなくなった場合は追加を渡すから，その旨言ってください）
- 解答に至るまでの道筋，理由等を説明すること．最終的な結果のみ書いた場合には，全く点がないこともあり得る．必要以上に神経質になる必要はないが，どのように説明するかも評価のうちとさせていただきたい．
- 問題文中， $1 + 2i$  などとある  $i$  は，もちろん虚数単位である．
- 講義中に予告したとおり，以下の要領で持ち込みを認めている．
  - － 持ち込めるものは A4 の大きさの紙の片側に自筆で書いたもの一枚のみ．裏側まで書いたり，コピーしたりしたものは無効である．
  - － 持ち込んだ紙には名前と学生番号を書いて，答案用紙と共に提出すること（持ち込み無しで試験を受けようと言う人も，白紙に名前と学生番号を書いて提出してください）
- 各問には配点の目安を記してある．これはあくまで目安であり，実際にはこれから 5 点以上増減することもあり得ると了解されたい（こちらが予想もしなかった皆さんの弱点が採点中に見つかることがある．これに対応するために配点をずらすのもやむを得ない）なお，目安点の合計が 105 になっているのは，ご愛敬（超えた 5 点はボーナス）．
- 問題は裏に，2 ページに渡ってある．

6月3日の講義の後，少しだけ問4を難しくした．そのため，採点基準は少し甘くするつもりであるから，決して焦らずに問題に取り組むこと．

問題は裏に

問 1：（大体 30 点）次の関数が複素関数として微分可能かどうか，判断せよ（理由付きで）．更に，微分可能なときは導関数を求めよ．

- $f(z) = z^4$
- $g(z) = (\operatorname{Re} z)^2$ （ $\operatorname{Re} z$  は  $z$  の実部を表す．）
- $h(z) = \frac{z}{1+z}$

以下の問 2a と 2b は，複素関数の微分可能性に関する，ホンの少しだけ高度な問題である．どちらか一問を選択して解答せよ（両方に解答した場合は，原則として出来の良い方をとる — 両方の得点の和をとることはしない — が，両方とも完璧に解答した場合は，ボーナスを上乗せするかも）

問 2a：（大体 20 点）Cauchy-Riemann の関係式が成り立っているにもかかわらず，複素関数としては微分可能でない関数はあるか？あるならば例を挙げ，ないならばその理由を述べよ．

問 2b：（大体 20 点）複素平面全体で微分可能な複素関数  $f(z)$  がある．複素数  $z$  の実部と虚部をそれぞれ  $x, y$  と書き ( $z = x + iy$ )， $f$  の実部と虚部をそれぞれ  $u(x, y), v(x, y)$  と書く [つまり， $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ] とき，

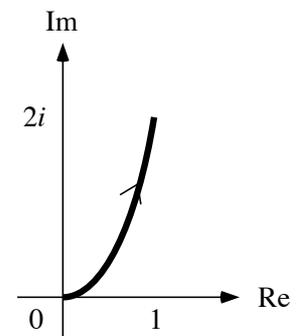
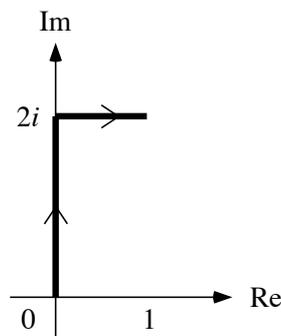
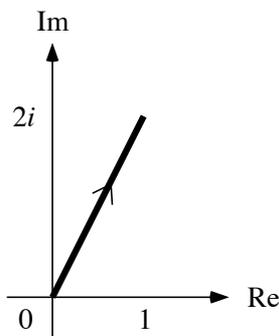
$$u(x, y) - 2v(x, y) = x^2 + 6xy + ay^2 \quad \text{かつ} \quad f(0) = 0$$

であるという ( $a$  は未知の定数)．以下の問に答えよ．

1.  $a$  の値を決定せよ．
2.  $u(x, y)$  と  $v(x, y)$  を  $x, y$  の関数として求めよ．
3. 更に  $f(z)$  を  $z$  の関数として表せ．

問 3：（大体 30 点）複素平面上の点 0 から  $1 + 2i$  へ行く曲線  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) を以下のように定める（図参照．左から  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ）．

- $\gamma_1$  は 0 から  $1 + 2i$  へまっすぐに行く線分，
- $\gamma_2$  は，まず 0 から  $2i$  へ行き，その後  $1 + 2i$  へ行く折れ線，
- $\gamma_3$  は放物線  $y = 2x^2$  に沿って行くもの（実部を  $x$ ，虚部を  $y$  と書いた）．



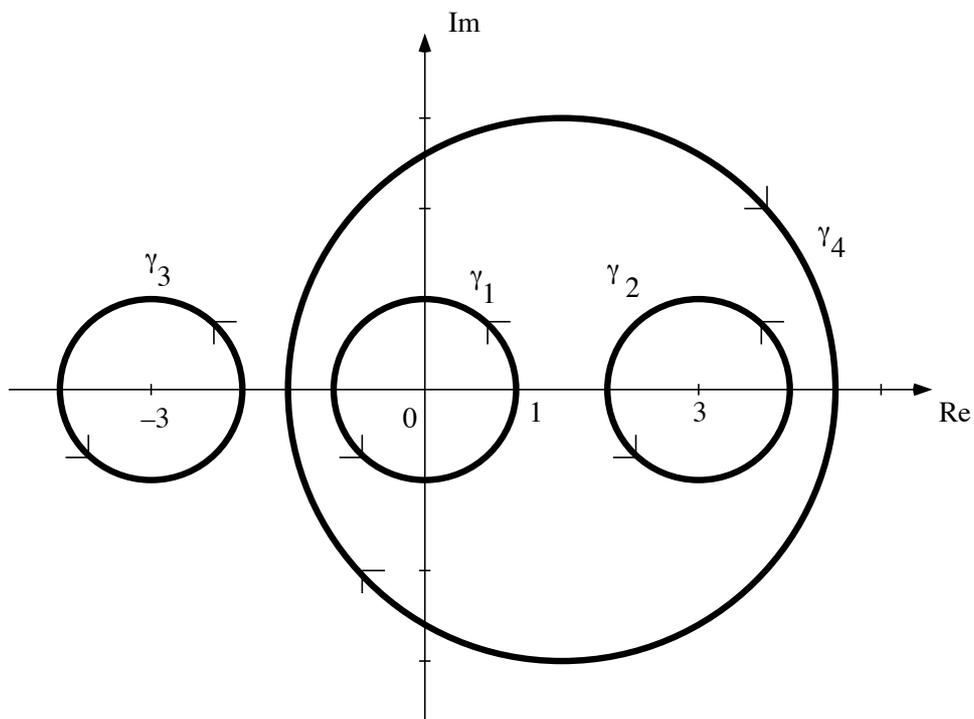
このとき，以下の問に答えよ．

- 線積分  $\int_{\gamma_j} (1+z^2)dz$  を  $j=2$  と  $j=3$  の場合について、線積分の定義に基づいて計算せよ（「線積分の定義に基づいて」とは言っても、「リーマン和のようなものの極限」の式にまで戻ることはない。問題にしている曲線についてはもっと簡単な式があったはずで、それを使えば十分。）なお、ここでは線積分の計算が出来るかどうかを問うているのだから、面倒でも  $j=2$  と  $j=3$  を別々にして下さい。
- 上の結果をもとにして、線積分  $\int_{\gamma_1} (1+z^2)dz$  の値を答えよ。

問4：（大体 25 点）複素平面上の曲線  $\gamma_j$  ( $j=1,2,3,4$ ) を以下のように定める。

- $\gamma_1$  は原点 0 を中心とする半径が 1 の円（反時計回り）、
- $\gamma_2$  は 3 を中心とする半径が 1 の円（反時計回り）、
- $\gamma_3$  は  $-3$  を中心とする半径が 1 の円（反時計回り）、
- $\gamma_4$  は  $\frac{3}{2}$  を中心とする半径が 3 の円（時計回り）、

（図を参照）。



このとき、線積分  $\int_{\gamma_j} \frac{1+z^2}{z^2(z-3)} dz$  の値を、 $j=1,2,3,4$  のそれぞれについて求めよ。

ヒント：直接に積分を計算するのは大変なので、Cauchy の積分定理や積分公式を利用する方が簡単である。色々な曲線があってややこしいと思うが、一つ一つ、ゆっくり考えていけば出来るはずである（ $\gamma_3$  や  $\gamma_2$  辺りが簡単か？）。なお、このような問題は「留数」というものを使って解くのが普通であるが、「留数」を使わなくても今までの知識で十分に解けるようになっている。

以上

### 中間テストの解答例

以下は主に自習用の略解である．特に断らない限り， $x, y$  は複素数  $z$  の実部と虚部， $u, v$  は複素関数  $f(z)$  などの実部と虚部を表す．

問 1： ともかく定義通りやっていくだけである．

$f(z)$  については

$$f'(\alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{z^4 - \alpha^4}{z - \alpha} = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z^3 + z^2\alpha + z\alpha^2 + \alpha^3) = 4\alpha^3$$

と計算できるので，どこでも微分可能で  $f'(z) = 4z^3$ ．

$h(z)$  についても同様で， $\alpha \neq -1$  では

$$h'(\alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{1}{z - \alpha} \left( \frac{1}{1 + z} - \frac{1}{1 + \alpha} \right) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{-1}{(1 + z)(1 + \alpha)} = -\frac{1}{(1 + \alpha)^2}$$

と計算できるので， $z \neq -1$  では微分可能で  $h'(z) = -(1 + z)^{-2}$ ．なお， $z = -1$  では関数自体が発散しているから微分不可能だ．

最後に  $g(z)$  であるが，上のようにニュートン商を作ってやると，うまく行かない（極限がない）感じがする．そこで Cauchy-Riemann の関係式を確かめると， $u = x^2, v = 0$  だから

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

となっているので， $x = 0$  のときのみ成り立つ可能性がある．Cauchy-Riemann の関係式はあくまで必要条件だから，ここまでで結論できるのは  $x \neq 0$  では微分不可能，ということ．

そこで  $\alpha = ib$  ( $b$  は実数) でのニュートン商を作って計算してみると，

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow b}} \frac{x^2 - 0^2}{x + iy - ib} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow b}} \frac{x^2}{x + iy - ib}$$

の極限が問題になる．さて， $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq |a|$  であることから

$$\left| \frac{x^2}{x + iy - ib} \right| = \frac{|x|^2}{|x + iy - ib|} \leq \frac{|x|^2}{|x|} = |x|$$

であるので，この極限は確かに存在して，ゼロに等しい．従って， $g(z)$  は  $\operatorname{Re} z = 0$  の時のみ微分可能で，その時の導関数はゼロ．

補足と註：

- あくまで Cauchy-Riemann は十分条件であることに注意しよう．だから，微分可能と言うときに Cauchy-Riemann だけをチェックするのは不十分である．
- ニュートン商の極限を正しく計算した後に Cauchy-Riemann をチェックしている人が何人かいた．検算のつもりなら大変に良いことだが，微分可能性の意味が良くわかっていないのなら問題なので，注意してください（ニュートン商の極限があればそれだけで十分である！）

問 3：

1. これも定義通りやる． $\gamma_3$  は， $\gamma_3(t) = t + 2it^2$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) と表されるから，

$$\int_{\gamma_3} (1 + z^2) dz = \int_0^1 \{1 + (t + 2it^2)^2\} (1 + 4it) dt = \text{展開して積分を計算} = -\frac{8}{3} + \frac{4i}{3}$$

$\gamma_2$  は， $2it$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) と  $2i + t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) の2つの曲線の和だから，

$$\int_{\gamma_2} (1 + z^2) dz = \int_0^1 \{1 + (2it)^2\} (2i) dt + \int_0^1 \{1 + (2i + t)^2\} (1) dt = -\frac{8}{3} + \frac{4i}{3}$$

2. 非積分関数は  $1+z^2$  で、複素平面全体で正則だから線積分の値は始点と終点のみにより、途中の経路にはよらない (Cauchy の積分定理の応用) . だから ,

$$\int_{\gamma_1} (1+z^2)dz = \int_{\gamma_2} (1+z^2)dz = -\frac{8}{3} + \frac{4i}{3}$$

である .

補足と註 :

- おおむね , 良くできていました . しかしそれでも ,  $\gamma_2$  の後半部分 (実軸に平行なところ) を  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) としてしまった人が何人かいました . 注意してください .
- $\gamma_j$  に関する積分の値が全部同じになるのはこれらで作られる閉曲線の内部と周囲で , 非積分関数が正則だからである . 本当はこのような理由まできちんと書いて欲しい .
- 相変わらず , 計算力の低下が気になる . 正しく線積分の定義を使って , 正しい積分の式を書いたのに , ショウモナイ積分の間違いをした人が何人かいた . 今回は甘くつけたが , 期末では計算間違いをもう少し厳しく採点するかも .

問 4 :

たくさん経路があって混乱したかも知れないが , 一つずつやれば (少なくとも  $\gamma_4$  以外は) できるはず .

まず ,  $\gamma_3$  について . 非積分関数  $\frac{1+z^2}{z^2(z-3)}$  は  $z=0, 3$  以外では正則である . 特に  $\gamma_3$  の 周囲と内部で正則であるから , Cauchy の積分定理から ,

$$\int_{\gamma_3} \frac{1+z^2}{z^2(z-3)} dz = 0.$$

次に  $\gamma_2$  については , 積分を  $\int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-3} dz$  ,  $f(z) = \frac{1+z^2}{z^2}$  と書いてみると ,  $f(z)$  自身は  $\gamma_2$  の 周囲と内部で正則だ . だから , Cauchy の積分公式から

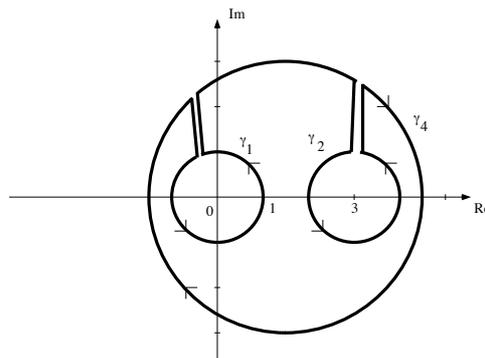
$$\int_{\gamma_2} \frac{1+z^2}{z^2(z-3)} dz = \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-3} dz = 2\pi i f(3) = \frac{20\pi i}{9}.$$

$\gamma_1$  については , 積分を  $\int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z^2} dz$  ,  $g(z) = \frac{1+z^2}{z-3}$  と書いてみると ,  $g(z)$  自身は  $\gamma_1$  の周囲と内部で正則だ . だから , Cauchy の積分公式 (と言うよりも Goursat の公式) から

$$\int_{\gamma_1} \frac{1+z^2}{z^2(z-3)} dz = \int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{z^2} dz = 2\pi i g'(0) = -\frac{2\pi i}{9},$$

ここで  $g'(0)$  は  $g(z)$  の微分 .

最後に  $\gamma_4$  であるが , これは出来なくても仕方ない .  $\gamma_4$  内には非積分関数が微分できないところが  $z=0, 3$  と 2 つもある . ので , 単純に Cauchy の積分公式などを使うわけにはいかない . しかし , そもそも Cauchy の積分公式を証明したときのように , 積分路を図のようにつないでやると , この新しい閉曲線の 周囲と内部では非積分関数は正則である .



従って Cauchy の積分定理から

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_4} \frac{1+z^2}{z^2(z-3)} dz = 0$$

であり、

$$\int_{\gamma_4} \frac{1+z^2}{z^2(z-3)} dz = - \int_{\gamma_1} \frac{1+z^2}{z^2(z-3)} dz - \int_{\gamma_2} \frac{1+z^2}{z^2(z-3)} dz = -2\pi i.$$

補足と註：

- ううむ、 $\gamma_3$  くらいは簡単だと思ったんだが、余り出来ていませんでしたね。むしろ  $\gamma_1$  の方が出来が良かったりして、ちょっと不思議... とமாகく、Cauchy の積分定理や積分公式の重要な成立条件「正則性」(どこで正則なら良いのか)について考え直す機会にして下さい。

問 2a：

Cauchy-Riemann の関係式はあくまで必要条件だから、これを満たしていても微分不可能なものはある。また、微分可能性の必要十分条件は「Cauchy-Riemann を満たし、かつ全微分可能」だったので、全微分不可能なものを作れば良いわけだ。具体的には、実軸、虚軸方向には微分できそうに見えるが、斜め 45 度では発散しているとか、そのようなものを目指す(以下、原点で Cauchy-Riemann を満たしているが微分不可能、なものを作る)。

例えば、原点での実軸方向、虚軸方向の微分がゼロになるように、

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^p} \quad (1/2 < p < 1 \text{ は定数})$$

と言う形のものを考えてみよう(ただし、 $f(0) = 0$  と定義する。じつのところ、 $p < 1$  の条件は、 $f$  が原点で連続にゼロになるように入れた。)

この場合、

$$u(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^p}, \quad v(x, y) \equiv 0, \quad \text{ただし } u(0, 0) = 0$$

である。従って、

(1) これは原点で Cauchy-Riemann の関係式を満たす。なぜなら、

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=y=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

などと、4 つの偏微分が全てゼロになるからである ( $v$  はもともとゼロだから、偏微分もゼロ)。

(2) しかし、これは原点で微分不可能である。なぜなら、 $x = y$  の方向での方向微分を考えると、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, h) - f(0, 0)}{\sqrt{2}h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}h} \frac{h^2}{h^{2p}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{h \rightarrow 0} h^{1-2p} = \infty$$

(最後の無限大は  $p > 1/2$  で)となり、この方向微分は存在しないから。

というわけで、上で作った  $f(x, y)$  が一つの例である。

問 2b： key になるのは Cauchy-Riemann である事は予想されよう。これをどう使うかですね。まず、Cauchy-Riemann から

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = A, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = B$$

が成り立っていることに注意する(あとの都合上、それぞれの微分を  $A, B$  とおいた。)

一方、 $u - 2v$  の値がわかっているのだから、これを  $x, y$  でそれぞれ微分すると、

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 6y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial v}{\partial y} = 6x + 2ay$$

を得る。従って、上の  $A, B$  に対して、

$$A + 2B = 2x + 6y, \quad B - 2A = 6x + 2ay$$

となるから、これを解いて、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = A = -2x + \frac{6-4a}{5}y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = B = 2x + \frac{12+2a}{5}y$$

が得られる。

さて、上の微分の式を積分しよう。ここで注意すべきは、積分したときの「積分定数」が  $x, y$  の関数になりうることである（ここで間違った人が何人かいた。残念！）。例えば、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2x + \frac{6-4a}{5}y$$

を  $x$  で積分すると、

$$u(x, y) = -x^2 + \frac{6-4a}{5}xy + C_1(y) \quad C_1(y) \text{ は } y \text{ の未知関数}$$

となる。同様に

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x + \frac{12+2a}{5}y \quad \implies \quad u(x, y) = 2xy + \frac{6+a}{5}y^2 + C_2(x)$$

が得られるが、この2つは等しいはずであるから、

$$C_2(x) = -x^2, \quad C_1(x) = \frac{6+a}{5}y^2, \quad \frac{6-4a}{5}xy = 2xy$$

となっているはずで、これから

$$a = -1, \quad u(x, y) = -x^2 + 2xy + y^2$$

が得られる。同様に  $v$  について解くと、

$$v(x, y) = -x^2 - 2xy + y^2$$

を得る。

最後に

$$f(z) = u + iv = (1+i)(-x^2 + y^2) + (1-i)2xy$$

を  $z = x + iy$  で書き直す。 $f(z)$  が正則なので絶対に  $z$  だけで書けるはずだと信じて

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

を代入してひたすら計算する。答は（予想通り  $\bar{z}$  が消えて）

$$f(z) = -(1+i)z^2$$

となる。

なお、 $a$  の値のみを先に求めるには、 $u, v$  が共に調和関数であること、つまり

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

であることを用いると簡単である（調和関数であることは講義でも説明したとおり、Cauchy-Riemann から出る）。すなわち、

$$0 = \frac{\partial^2 (u - 2v)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (u - 2v)}{\partial y^2} = 2 + 2a$$

が成り立つはずなので、 $a = -1$  が結論できる。

補足と註：

- 2a については全微分不可能なものを作ればよい、と言うところまで行った人は何人かいたが、流石に具体例まで出来た人はいなかった。
- 2b は 2 名ほど、完答していた。なかなか立派です。

注意事項

- 使用した答案用紙に，氏名と学生番号を明記せよ．
- 大体は基本的な問題である．とてかく，全問に解答せよ．問題数が多いと感じるかも知れないが，問4と問5は密接に関連したりするので，実質的にはそんなに多くないはず．
- 答案用紙の裏も使用して良い．ただし，裏を使用する場合は「裏に続く」などと明記すること（答案用紙が足りなくなった場合は追加を渡すから，その旨言ってください）
- 解答に至るまでの道筋，理由等を説明すること．最終的な結果のみ書いた場合には，全く点がないこともあり得る．必要以上に神経質になる必要はないが，どのように説明するかも評価のうちとと思っていただきたい．
- 問題文中， $1 + 2i$  などとある  $i$  は，もちろん虚数単位である．
- 講義中に予告したとおり，以下の要領で持ち込みを認めている．
  - － 持ち込めるものは A4 の大きさの紙の片側に自筆で書いたもの一枚のみ．裏側まで書いたり，コピーしたりしたものは無効である．
  - － 持ち込んだ紙には名前と学生番号を書いて，答案用紙と共に提出すること（持ち込み無しで試験を受けようと言う人も，白紙に名前と学生番号を書いて提出してください）
- 各問には配点の目安を記してある．これはあくまで目安であり，実際にはこれから5点以上増減することもあり得ると了解されたい（こちらが予想もしなかった皆さんの弱点が採点中に見つかることがある．これに対応するために配点をずらすのもやむを得ない）
- 問題は裏に，2ページに渡ってある．

なお，この期末テストは採点が済み次第，僕のオフィスで返却の予定（9月下旬以降）．返却できるようになったら僕の web page に掲示するので，返却希望者はいつもの僕の web page (<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html>) を参照してください．

問題は裏に

問1：（大体 20 点）次の関数が複素関数として微分可能かどうか，判断せよ（理由付きで）．  
更に，微分可能なときは導関数を求めよ．

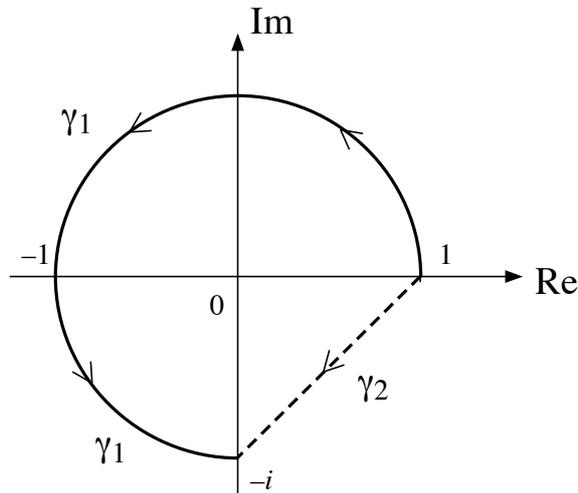
1.  $f(z) = |z|$  （ $|z|$  は  $z$  の絶対値を表す．）

2.  $g(z) = \frac{1}{1+z^2}$

3.  $h(z) = e^z$  （ $z$  の指数関数）

問2：（大体 20 点）複素平面上の点  $1$  から  $-i$  へ行く曲線  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2$ ) を以下のように定める（図参照． $\gamma_1$  は実線， $\gamma_2$  は点線）．

- $\gamma_1$  は  $1$  と  $-i$  を結ぶ，半径  $1$  の  $\frac{3}{4}$  円，
- $\gamma_2$  は  $1$  と  $-i$  を結ぶ線分．



このとき，線積分  $\int_{\gamma_j} \frac{1+z}{z^2} dz$  を  $j = 1$  と  $j = 2$  について求めよ（注意：どちらかの積分は，「定義に従って」やるとちょっと大変かも．）

問3：（大体 20 点）次の冪級数が絶対収束するような  $z$  の範囲をそれぞれ複素平面上で表せ．ただし，全ての複素数で絶対収束する場合はそのように言葉で書けばよい．

(i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{n(n+1)}$ ,      (ii)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (z-1)^n$       (iii)  $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n^2} (z+1)^n$

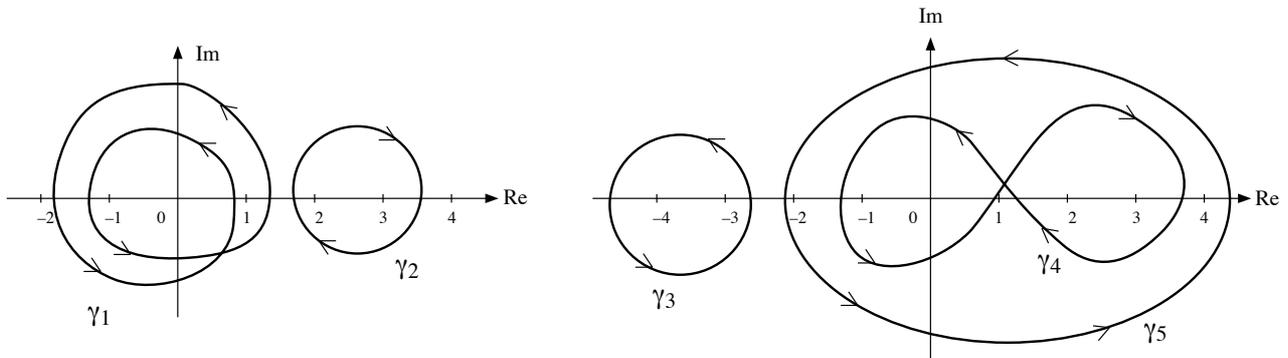
最後の  $3^{-n^2}$  は「 $3$  の  $(-n^2)$  乗」を表す．

問4：（大体 20 点）複素関数  $f(z) = \frac{1}{z(z-3)^2(z-4)}$  について，

1. 全ての極の位置，
2. それぞれの極が何位の極か，
3. それぞれの極での留数の値，

を答えよ（答は例えば、「 $z = 100$  が一位の極で，留数は  $\pi$ 」「 $z = 200$  は 51 位の極で，留数は 2002」「これ以外には極はない」と列挙しても良い．ただし，留数の求め方くらいは示してください．）

問5：（大体 20 点）複素平面上的の曲線  $\gamma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ) を下図のように定める（図がゴチャゴチャするのを避けるため，2 つに分けて示した．右の図では  $\gamma_4$  と  $\gamma_5$  が似たような所にあるが， $\gamma_4$  は内側の 8 の字で， $\gamma_5$  は外側の楕円形）．



このとき，線積分  $\int_{\gamma_j} \frac{1}{z(z-3)^2(z-4)} dz$  の値を， $j = 1, 2, \dots, 5$  のそれぞれについて求めよ．

ヒント：ここの非積分関数は問4の  $f(z)$  そのものだよ．見たらわかると思うが，5つの曲線は易しい順には並んでいないから，出来るものから落ち着いてやるように．

問題は以上

## 期末テストの解答例

以下は主に自習用の略解である．特に断らない限り， $x, y$  は複素数  $z$  の実部と虚部， $u, v$  は複素関数  $f(z)$  などの実部と虚部を表す．

問 1： ともかく定義通りやっていくだけである．

$g(z)$  については

$$g'(\alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{g(z) - g(\alpha)}{z - \alpha} = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{\frac{1}{1+z^2} - \frac{1}{1+\alpha^2}}{z - \alpha} = - \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{\alpha + z}{(1+z^2)(1+\alpha^2)} = - \frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}$$

と計算できるので， $\alpha \neq \pm i$  では微分可能で  $g'(\alpha) = -\frac{2\alpha}{(1+\alpha^2)^2}$  ．

$h(z)$  についても同様である．指数関数は級数で定義されているが，この級数は絶対かつ（有限領域では）一様に収束しているから，項別微分が出来る．実際にニュートン商を計算してみると

$$h'(\alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{z^n - \alpha^n}{z - \alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{z^n - \alpha^n}{z - \alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n\alpha^{n-1} = e^\alpha$$

と計算できるので，どこでも微分可能で  $h'(z) = e^z$  ．

最後に  $f(z)$  であるが，上のようにニュートン商を作ってやると，うまく行かない（極限がない）感じがする．そこで Cauchy-Riemann の関係式を確かめると， $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $v = 0$  だから

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

となっているので，少なくとも  $x^2 + y^2 \neq 0$  では Cauchy-Riemann の関係式がなりたたずに微分不可能． $x = y = 0$  でも微分不可能であるが，これは例えば，実軸方向と，虚軸方向の方向微分を比べてみればよい．よって， $f$  はいたるところで微分不可能．

問 2：

1.  $\gamma_1$  の方が計算しやすい． $\gamma_1(t) = e^{it}$  ( $0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ ) と表されるから，

$$\int_{\gamma_1} \frac{1+z}{z^2} dz = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+e^{it}}{e^{2it}} i e^{it} dt = i \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (e^{-it} + 1) dt = 1 - i + \frac{3\pi i}{2}$$

2.  $\gamma_2$  はなかなか厄介．一つの方法は（非積分関数は原点以外では正則なので）積分路を変形して，例えば，1 から  $-i$  へ時計回りに廻る 4 分の 1 円にすること．こうすると，

$$\int_{\gamma_2} \frac{1+z}{z^2} dz = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1+e^{it}}{e^{2it}} i e^{it} dt = i \int_0^{-\frac{\pi}{2}} (e^{-it} + 1) dt = 1 - i - \frac{\pi i}{2}$$

と求められる．

もう一つのやり方は，原点の周りを一週ぐるりと回って積分すると非積分関数の留数（ $\times 2\pi i$ ）になって，積分値は丁度  $2\pi i$ ． $\gamma_1$  の後に逆向きの  $\gamma_2$  を加えるとぐるりと一周になるから，つまりは

$$\int_{\gamma_1} \frac{1+z}{z^2} dz - \int_{\gamma_2} \frac{1+z}{z^2} dz = 2\pi i$$

ということだ．先に求めていた  $\gamma_1$  に関する積分値を用いると， $\gamma_2$  に対するものも求められる．

問3： 収束半径から求めるべし．Ratio test でも用いると，(i) の収束半径は 1，(ii) の収束半径は  $1/2$ ，(iii) の収束半径は無限大，とわかる．よって，絶対収束する範囲は，

- (i) なら  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z + 3| < 1\}$
- (ii) なら  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < \frac{1}{2}\}$
- (iii) は複素平面全体，

となる．後はこれを図示すればよい．

問4： 定義通り計算するとよい．まず特異点から探す．これは有理関数だから，分母がゼロになるところだけが危ない．要するに， $z = 0, 3, 4$  である．これらは全て極で，その次数は 1, 2, 1 である（理由については7月29日の「レポートになれなかった問題の解答」を見よ）．最後に留数を計算する．

$z = 0$  は一位の極だから，留数は

$$\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z-3)^2(z-4)} = -\frac{1}{36}.$$

同様に， $z = 4$  での留数は

$$\lim_{z \rightarrow 4} (z-4) f(z) = \lim_{z \rightarrow 4} \frac{1}{z(z-3)^2} = \frac{1}{4}.$$

最後に  $z = 3$  では

$$\lim_{z \rightarrow 3} \frac{d}{dz} \left[ (z-3)^2 f(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{z(z-4)} \right] = -\frac{2}{9}.$$

問5：

たくさん経路があって混乱したかも知れないが，一つずつやればできるはず．

まず， $\gamma_3$  について．非積分関数  $\frac{1}{z(z-3)^2(z-4)}$  は  $z = 0, 3, 4$  以外では正則である．特に  $\gamma_3$  の周囲と内部で正則であるから，Cauchy の積分定理から，

$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{z(z-3)^2(z-4)} dz = 0.$$

次に  $\gamma_2$  の内部と周囲では  $z = 3$  のみが特異点なので，この  $z = 3$  での留数を拾う．向きが反時計回りなのでマイナスがつくことに注意して

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z(z-3)^2(z-4)} dz = -2\pi i \times \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{4\pi i}{9}.$$

$\gamma_5$  は  $f(z)$  の3つの極全てを囲んでいるから，3つの極での留数を全部拾う．答は

$$\int_{\gamma_5} \frac{1}{z(z-3)^2(z-4)} dz = 2\pi i \times \left(-\frac{1}{36} - \frac{2}{9} + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

$\gamma_4$  は 0 を時計回り, 3 を反時計回りしているから,

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z(z-3)^2(z-4)} dz = 2\pi i \times \left[ -\frac{1}{36} - \left(-\frac{2}{9}\right) \right] = \frac{7\pi}{18}.$$

最後に  $\gamma_1$  だが, これは 0 の周りを 2 回廻っているから, 一回ごとに留数を拾って,

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z(z-3)^2(z-4)} dz = 2 \times 2\pi i \times \left[ -\frac{1}{36} \right] = -\frac{\pi}{9}.$$