2000.04.15

数学基礎 V (2131216)　担当：原　隆（多元数理科学研究科）：理 1 号館 508 号室，内線 5392

(e-mail:hara@math.nagoya-u.ac.jp, http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hara/lectures/CA02.html)

Office hours: TA の中井さんが office hours を設けて下さることになりました．毎週　　曜日

概要：主に実数関数を取り扱って来た数学基礎 I と III の続きとして，複素関数論の基礎を学ぶ．

内容予定：（この講義は 2 回目だが，前回の反省もあって，細部は変更される可能性もある — 特に冪級数の扱いをどこで扱うかは未だに思案中．また，以下の内容はちょっと多すぎると思われるので，適当に省く予定.）

I. 初めに

1. この講義の概要：複素関数論はなぜ面白いのか？
2. 複素数について

II. 正則関数

1. 複素関数とは：複素平面における極限の意味
2. 微分可能性と Cauchy-Riemann の関係式

III. Cauchy の積分定理

1. 複素平面上での線積分
2. ホモトピーと単連結性（やらないかも）
3. 原始関数の存在と積分定理（やらない？）
4. Cauchy の積分定理の証明

IV. Cauchy の積分公式

1. Cauchy の積分公式
2. 一致の定理
3. 最大値の原理
4. 一様収束極限（やらない？）
5. 調和関数（やらない？）

V. 冪級数

1. 冪級数の一般論
2. 正則関数の冪級数への展開可能性

VI. 有理型関数

1. Laurent 展開
2. 孤立特異点
3. 有理型関数
4. 留数計算

VII. 初等関数と解析接続

1. 初等関数
2. 解析接続と Riemann 面（基本的な考え方のみ）

教科書：「複素解析」（高橋礼司著，東大出版会）を一応の教科書としたが，少し難しいかも知れない．その場合は以下に掲げる参考書のどれでも良いから手にとって学習して欲しい．

参考書：

「複素解析学 I」（志賀啓成著，培風館）
「Complex Analysis」（Ahlfors，McGrow-Hill 邦訳あり）
「解析概論」（高木貞治，岩波書店）の第５章
「複素関数論」（岸・藤本著，学術図書）

評価方法： 講義の際に何回か小レポートを課し，その結果と中間試験・最終試験の結果を総合してつけます．小レポートなどの具体的な実施日時，また「これらの成績をどのように総合して評価するか」に関しては追って講義中に通知します．

なお，この大学では基礎科目を一旦落とすと回復は非常に難しいようなので，単位を希望する人はその点，注意してやって下さい．

担当教官から一言：

複素解析学は初等解析学の中でも非常に美しいものの一つです．独立変数を複素数に拡張して微分可能性を要求するだけでここまで見通しが良くなるのは驚異です.（我々の直感がある程度まで複素正則関数の性質を仮定していることを意味します.）また，複素関数論は物理などへの応用においても強力な武器になります．

この講義は工学部の人を対象にしていますが，単なるテクニックとしてではなく，複素関数論の美しさを少しでも伝えられる様，努力します．証明や論理の厳密性はある程度犠牲にしてでも基本的な考えをつかんでもらえるように心がけます．

この科目に関するルール：

最近の世相の移り変わりは激しく，学生気質も僕の頃とはかなり異なっているようです．後でお互いに不快な思いをすることがない様，この科目に関して，以下のルールを定めます.（こんなこと言うまでもないとは思うのだが，念のため.）

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強することであると確認する.（少なくとも，講義にでている間はそうである.）
- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室・退室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケットです．
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義，掲示板および原の web page （http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hara/lectures/CA02.html）を通して行う．
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う．
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.nagoya-u.ac.jp）．ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい．

中間テストまたは休講予告： 原の国際会議出席のため 6 月 10,17 日ぐらいに中間テスト（と休講？）が入る可能性があります．予定が確定したら講義と web page を通してお知らせしますので，頭の隅に留めておいて下さい．

配布プリントについて： 次ページから講義のレジュメが始まります．これはあくまでレジュメであって，要点しか書いていません．足りないところは各自，教科書や参考書で補って下さい．要点しか書かない理由は，一つには僕の時間が足りないためですが，もう一つには要点を書き出すことで集中して学習すべき事を浮き彫りにする効果を狙っていることもあります．なお，以下の節や定理で「高橋の○○節，志賀の○○節」などとあるのは，上に上げた教科書・参考書を指しています．

なお，これらのプリントにもミスプリなどがあると思うので，ある程度直した時点で僕の web page に掲載することを考えています．

1　初めに

1.1　複素関数論とは

手短かに言って，複素関数論とは，関数 $f(z)$ の色々な性質を調べて行くものである．ただし，ここで z は一般の複素数で $f(z)$ の値自身も複素数である場合を考える．

独立変数 z の範囲を複素数にしただけでどれほどの違いがあるのか，すぐには予想できないだろう．実際，これ以上の条件をつけなければそんなに面白いことは起こらない．大体，実数関数を適当に複素数に拡張することはできるから，ここまでは何も新しいことはない．

ところが，関数の「微分可能性」を要求すると，事態は一変する．実関数の場合には思いもよらなかったことが起こるのである．この点を予告するため，以下の問題を考えてみよう．

問 1.1： 数列 $\{a_n\}$ の初めの数項が $0, 1, 2, 3, 4, 5$ と与えられている時，この後を予想せよ．

答 1.1： もちろん，上の問いは典型的な悪問である．「自然」な解としてはもちろん $6, 7, 8, 9, \ldots$ と続くのだろうが，問題文を見る限りこれに限る必要は毛頭ない．

では，次のはどうだろうか？

問 1.2： 実数全体で定義された関数 $f(x)$ があって，その $0 \le x \le 1$ での値は $f(x) = x$ であることがわかっている．この時， $0 \le x \le 1$ 以外での $f(x)$ の形を予想せよ．

答 1.2： またもや，問題の方が失格である．問題文の限りでは $0 \le x \le 1$ 以外での $f(x)$ は何でもあり，である．

仕方ないので，少しアプローチを変えてみよう．上の問 2 では $f(x)$ に課した条件が緩すぎて話にならない．そこで：

問 1.3： 上の問 2 の $f(x)$ に何とか条件をつけて， $0 \le x \le 1$ 以外での $f(x)$ が一意的に決まるようにせよ．

どんな条件をつければいいだろうか？$f(x)$ はもちろん，連続でないと困る．でもこれだけでは $x = 1$ などで折れ曲がることも可能だ．微分可能性も要求したい．これで十分だろうか？

実数軸の上で考えている限り，いくら微分可能性などを要求しても $f(x)$ は一意には決まらない．例：

$$f(x) = \begin{cases} x + e^{1/x} & (x < 0) \\ x & (0 \le x \le 1) \\ x - 2e^{-1/(x-1)^2} & (x > 1) \end{cases} \tag{1.1}$$

ところが，x を複素数まで拡張し，そこでも微分可能性を要求すると，$f(x)$ は見事に一意に定まる．（結果はもちろん， $f(z) = z$ と言うもの．）一般に，複素数を引数とする関数（つまり複素関数）が微分可能である場合，小さい領域での関数の振る舞いから複素平面全体での振る舞いが自動的に定まってしまう．

これが微分可能な複素関数の大きな特徴である．ある意味で「複素関数としての微分可能性」を要求すると，「自然に」関数が定まるのである．

微分可能な複素関数にはこれ以外にも大きな特徴がある．（もちろん，互いに関係している．）著しいものを挙げると：

- 一致の定理（一部の領域での情報から全体が決まる）．
- 一回微分可能なら実は無限回微分可能．
- Cauchy の積分定理，積分公式（関数のある点での値を，他の部分での積分であらわすことができる）．
- いつでも冪級数展開ができる．
- 極限の交換が容易（$f_n \to f$ が一様収束なら，f_n の高階導関数も f の高階導関数に収束．則ち，極限と微分の順序を入れ替えられる）．

つまり，微分可能な関数（正確には正則関数）の世界では「基礎数学 I」などで脅かされた「変な例」がないのである！物理などで出会う関数にはこの手のものが多いが，それは数学的には「関数の正則性」を仮定するものとも考えられる．また，そうであるからこそ，限られた実験データから本来の関数の形を推測したりすることも許されてくるのである．この点で解析関数は大変に自然であり，これが複素関数論を勉強する大きな理由である．

1.2 複素数と複素平面

高校でも少しはやったように，複素数とは $x+iy$（x,y は実数，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位）の形の数のことである．このとき，x を実部，y を虚部と言う．この講義では（また，大抵の数学の本でも）複素数の全体を $\mathbb{C}$ で表す：

$$\mathbb{C} \equiv \{x+iy \,|\, x,y \text{ は実数，} i \text{ は虚数単位}\} \tag{1.2}$$

この節の残りの部分では x,y,a,b,c,d は実数，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位を表す．

複素数 $z=x+iy$ に対し，$\overline{z}\equiv x-iy$ を z の複素共役と言う．また，$|z|\equiv\sqrt{x^2+y^2}$ を z の絶対値と言う．

複素数の演算を簡単に復習しておく：

- 加法と減法： $z_1=a+ib, z_2=c+id$ に対して，複合同順で $z_1\pm z_2=(a\pm c)+i(b\pm d)$.
- 乗法：$z_1=a+ib, z_2=c+id$ に対して，積 $z_1z_2\equiv(ac-bd)+i(bc+ad)$.
- 除法：$z_1=a+ib, z_2=c+id$ に対して，商 $\dfrac{z_1}{z_2}\equiv\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}=\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$

まあ，このようなことは高校でやりましたよね．

さて，人間は直感の動物であるから，扱う対象を図にできれば良いことがあると思われる．実数の集合については数直線がそれであった．これを真似て複素数の集合を表すとどうなるだろうか？一般の複素数は $z=x+iy$ の形として実数 (x,y) の組で表されている．だからこれを図示するには横軸に x，縦軸に y をとって 2 次元平面上に表すのが良いだろう．

こうすればそれぞれの複素数と 2 次元平面上の各点が一対一対応をすることになる．この，複素数を表す平面の事を複素平面と呼ぶ．また，以下ではしばしば，複素数を複素平面上の点として考えていく．

1.3 複素数の位相（題名は大仰だが中身は簡単）；高橋の 1.4 節，志賀の 2.1.1 節

そんなに神経質になる必要はない．ただ，ある程度やっとかないと話が進まない．大体の感じでとらえてもらって，必要があれば考え直せば良い．

ここでは E は $\mathbb{C}$ の部分集合とする．(以下，複素平面の図で説明する．)

内点： E の要素 z が E の**内点**とは,「z の周りに十分小さい円盤を書く時，これが E の中に入っていること」

外点： E の**外点**とは $E^c=\mathbb{C}\backslash E$ の内点のこと．

境界点： E の**境界点**とは $\mathbb{C}$ の点のうち，E の内点でも外点でもない点のこと．

E **が開集合：** E の要素が全て内点であること．(俗に言うと，境界が入ってない，感じ）

E **が閉集合：** E の補集合 E^c が開集合なこと．(俗に言うと，境界がすべて取り込まれている，感じ）

集積点： $z\in E$ が E の**集積点**とは，E-内に点列 $\{z_n\}$ がとれて，$\lim_{n\to\infty} z_n=z$ とできること．

連結された開集合： 開集合は，それが共通部分をもたない 2 つの開集合に 分割されない とき，**連結されている**と言う．

領域： 連結された開集合のこと．

４月２２日の連絡：先日確定できなかった office hours について：TA の中井さんが office hours を設けて下さることになりました．
毎週火曜日，16:00–18:00，理学部１号館４５２号室にて行います．

数学基礎 V 第１回レポート問題

問１： 複素数 $1, \quad 2+2i, \quad -\sqrt{3}-i$ をそれぞれ，複素平面上の点として表せ．また，それぞれの偏角を求めよ（答だけでよい）．

問２： α を複素数とする．次の関数 f, g, p はそれぞれ α で微分可能か？微分可能なら微分係数も求めよ．(注意：微分可能かどうかは，α の値によるかも知れないよ.)

$$f(z) = z^n \qquad (n \quad \text{は正の整数}) \tag{1.3}$$

$$g(z) = \frac{1}{1+z} \tag{1.4}$$

$$p(z) = |z|^2 \tag{1.5}$$

締め切りなど：

締め切りは 2002 年 5 月 8 日（水）の 17:00，
提出場所は僕の部屋（理 1-508）の前の封筒かポスト
用紙はできうる限り A4 の紙を用いる（B5 などの小さい紙は紛れてなくなるかも）

とします．

レポートのお約束：

- 友達と相談しても，本を調べても，何をやっても良いから，自分で理解した範囲を書くこと．その際，参考文献や議論した友達の名前も明記すること．(友達と議論したり，本を見たからと言って悪い点をつける，などと言うことは絶対にしない．一番大事なのは自分でわかったところを表現することだから，それまでの過程で何をやっても問題ない.)
- なお，問題の番外編として，今までの講義内容・講義形態についての感想，不満，文句，このように改善すべしとの意見などもできるだけ書いてください．お願いします．

——— 以下，レジュメの続き ———

（先週の補足）

折角複素平面を導入したので，もう少し言っておく．

任意の複素数 $z = x + iy$ を複素平面上の一点と１対１対応させると言うこと（複素平面）を先週，言った．さて，点 (x, y) は平面上の点と見なせるが，これを極座標で表すこともできる．つまり，

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{1.6}$$

とするのである．このとき，

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.7}$$

となる（各自，確かめよう）．この θ を $z = x + iy$ の偏角と言う．

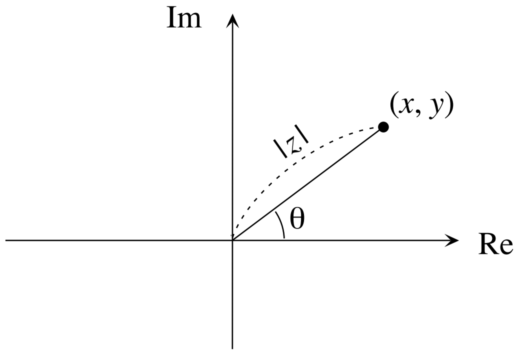


図 1: 複素数 $z = x + iy$ と，絶対値 $|z|$，偏角 θ

2 正則関数

2.1 複素関数とは：複素平面における極限，連続，微分可能性（高橋の 2.1 節始め，志賀の 2.1 節）

複素数の集合から複素数の集合への関数を簡単に複素関数と言う．皆さんが今まで扱ってきた関数は主に実数の集合から実数の集合への関数だったはずで，これを（複素関数と対比して）実関数（または実数函数）と言う．

さて，複素関数について「微分」や「極限」を考えていくのだが，ある点に近づくとは言っても，複素平面では色々な方向があるので話はややこしく（面白く）なる．まず，極限の概念から考えていこう．

定義 2.1 (複素平面での極限) 領域 D で定義された複素関数 f と 点 $\alpha \in D$ がある．この関数の $z \to \alpha$ での極限が A ［記号では $\lim_{z\to\alpha} f(z) = A$］とは，$z$ が α にどの方向から，どのように近付いても極限が A と言うこと．数式で書けば，

$$\forall\epsilon > 0, \quad \exists\delta \quad \text{s.t.} \quad |f(z) - A| < \epsilon \ \text{ for } \ |z - \alpha| < \delta \tag{2.1}$$

と言うことである．

繰り返しになるが，上の定義ではどの方向から，どのように近付いてもと言うのがミソである．これは実数の場合でも要求されていたことである．つまり，実数関数の場合，$x \to a$ と言うのは，実数軸上で x が a の左側から近づく場合と右側から近づく場合の両方を意味していた．実数の集合は一次元（数直線）だから,「どの方向から」と言ったところで 2 方向しかなかったのである．しかし，複素平面は 2 次元だから $z \to \alpha$ と言っても，α の周りに 360 度，どの方向からでも近づけるわけである．そのような多様な方向から近づいても極限の行き先が同じ，の場合に限って極限が存在すると言うのである．数式の上では実数も複素数も同じように見えるが，実態は複素数の方がよほど複雑であることに再度，注意されたい．

極限の概念を明らかにしたので,「連続性」「微分可能性」を論じることができる．

定義 2.2 (複素関数の連続) 領域 D で定義された複素関数 f と 点 $\alpha \in D$ がある.「f が α で連続」とは，$\lim_{z\to\alpha} f(z) = f(\alpha)$ なること．

定義 2.3 (微分可能) 複素関数 f に対して $f'(\alpha) = \lim_{z\to\alpha} \dfrac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$ が存在する時， $f(z)$ は α で微分可能と言う．上の極限は f の α における微分係数（または導関数）と言う．

しつこいが，上の連続性や微分可能性の定義は「極限」（定義 2.1）の概念を用いて定義されているから,「どの

方向から，どのように」近付いても極限の行き先が同じ，という事が要求されている．これが厳しい条件を課し，そのために面白い性質がどんどん出てくることを以下で見ていく．

この辺りでレポート問題をやって，微分可能性などについて理解を深めよう．

2.2 全微分可能性と Cauchy-Riemann の関係式（高橋の 2.1 節，志賀の 2.2 節)

複素数 z はその実部と虚部にわけて $z = x + iy$ と書ける．だから複素関数 $f(z)$ 自身も実部と虚部にわけて

$$z = x + iy, \qquad f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{2.2}$$

と書くことができる．こうすると複素関数と言えども，2 変数 (x, y) の関数が 2 つ (u, v) 合わさったもの だとも考えられる．この節では，複素関数が微分可能であると言うことの意味を，上の視点から更に考える．

2.2.1 全微分可能性

さて，2 変数関数（一般に多変数関数）においては「全微分可能」と言う概念があったことを思い出そう．

定義 2.4 (全微分可能) 2 つの実数変数 (x, y) の関数 $u(x, y)$ を考える．これが点 (a, b) で全微分可能とは，適当な数 A, B が存在し，(a, b) の近傍で

$$u(x, y) - u(a, b) = A(x - a) + B(y - b) + o(\sqrt{|x - a|^2 + |y - b|^2}) \tag{2.3}$$

なること．ここで $o(h)$ とは $h \to 0$ の時に h より速くゼロにいくことを意味する．

なお，上で少し計算してみると

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.4}$$

であることがわかる．

全微分可能な関数では「方向微分」が定義できる：(x, y) を (a, b) に近付ける場合に $x = a + t\cos\theta, y = b + t\sin\theta$ として $t \to 0$ を考えると，

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{u(a + t\cos\theta, b + t\sin\theta) - u(a, b)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{At\cos\theta + Bt\sin\theta + o(t)}{t} \\ &= A\cos\theta + B\sin\theta = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\end{aligned} \tag{2.5}$$

となる．この結果は一般に θ （微分される方向）による．

2.2.2 複素関数の微分可能性は全微分可能性よりも強い！

ところで，全微分可能だけでは複素関数が微分可能と言うのには足りない．複素関数が微分可能と言うことは「どの方向から微分しても」結果が同じと言うことである．$z = x + iy$ と書いて，$f = u + iv$ に対して上のように方向微分を計算してみると

$$\begin{aligned}&\frac{(u + iv)(\alpha + t\cos\theta + it\sin\theta) - (u + iv)(\alpha)}{t\cos\theta + it\sin\theta} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta + i\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + i\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin^2\theta + \Big(\frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)\cos\theta\sin\theta + i\Big\{\frac{\partial v}{\partial x}\cos^2\theta - \frac{\partial u}{\partial y}\sin^2\theta + \Big(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big)\cos\theta\sin\theta\Big\}\end{aligned} \tag{2.6}$$

となる．これが θ の方向によらないためには，実部と虚部別々に θ によらないことが必要で,（各自やってみること）結果的に

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{（Cauchy-Riemann の関係式）} \tag{2.7}$$

が必要十分となる．

上では微分可能な時の必要条件として Cauchy-Riemann の関係式が導かれた．実はこれは（ほとんど）十分でもある（下の定理）：

定理 2.5 (高橋の定理 2.1，志賀の定理 2.5) $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が $z = \alpha$ で微分可能であるための必要十分条件は

(i) u, v が $z = \alpha$ で全微分可能でかつ

(ii) u, v が $z = \alpha$ で Cauchy-Riemann の関係式を満たすこと

である．

2.3 正則関数の性質

正則関数とはある領域 D の各点で微分可能な関数のこと[1]である．ここでは定義からすぐに出るような，正則関数の性質を挙げる．

定理 2.6 (志賀の定理 2.6) $\mathbb{C}$ 内の領域 D で定義された f が正則かつ実数値関数だとする．この時，f は定数関数である．

証明のアイディア： 簡単である．f が実数値関数と言うことは $v \equiv 0$．従って Cauchy-Riemann より u に対しても

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \equiv 0 \qquad \text{すべての } (x, y) \in D \text{ に対して} \tag{2.8}$$

となる．このような関数が恒等的に定数関数であることはほとんど明らかであろう — x で微分しても，y で微分しても共にゼロなんだから．

ここのところを厳密に言うには，以下のようにする．D 内の任意の点を $\alpha = x_0 + iy_0$ とすると，$\epsilon \ll 1$ を決めて $\beta \equiv \alpha + \epsilon \in D$ とできる．α と β での u の値が等しいことを言おう．それには，2 変数の時の平均値の定理より，$0 < t < 1$ が存在して

$$u(x_0 + \epsilon, y_0) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + t\epsilon, y_0)\epsilon \tag{2.9}$$

と書けることに注意する．でも，右辺の微係数はゼロなんだから左辺もゼロで，α と β での u の値は等しい．

同様にして，$\alpha - \epsilon, \alpha \pm i\delta$ の点における値も等しいことがわかる（δ は ϵ みたいに小さい数）．このようにして，α からどんどんと点をつなぎながら u の値が等しいと言えるので，最終的に D 内で u が定数と言えるのである． □

定理 2.7 (高橋の問３ (p.37)，志賀の定理 2.7) $\mathbb{C}$ 内の領域 D で定義された f が正則，かつその微分 f' が恒等的にゼロであるとする．この時， f は定数関数である．

問 2.3.1： 実数関数の場合，上の定理の反例は？（つまり実数関数 $f(x)$ の微分 f' が恒等的にゼロなら，f は定数関数か？） また，上の定理を証明してみよう．

[1] ここでは導関数の連続性は仮定しないが，後で連続であることがわかる．のみならず，正則関数は何回でも微分可能であることもわかる．

５月１３日の重要な連絡：中間テストなどの日程を決めたので，お知らせします．

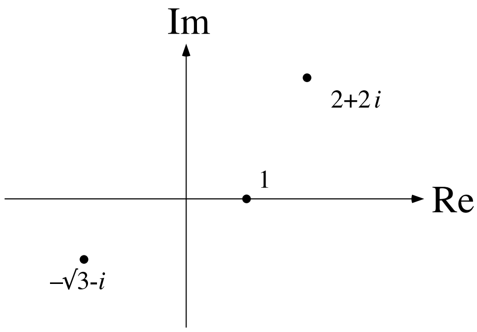
- ６月１０日（月）は休講にします．
- ６月１７日（月）に中間テストを行います．時間と場所はいつも通りの時間と教室で．

中間テストの範囲は大体，６月３日までに進んだところまで，の予定．

2.4　第一回レポートの解答と講評

問１について：皆さん，割合と良くできていました．下の図のようになっているので，定義通り計算するだけです．答えは

- 1 の絶対値は 1，偏角はゼロ．
- $2+2i$ の絶対値は $2\sqrt{2}$，偏角は $\frac{\pi}{4}$.
- $-\sqrt{3}-i$ の絶対値は 2，偏角は $\frac{7\pi}{6}$.



問２について：これも定義がわかっているか，やってみる問題です．一番確実なのは，ともかく定義通り，ニュートン商を計算してみること．

$f(z)=z^n$ なら，

$$\lim_{z\to\alpha}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}=\lim_{z\to\alpha}\frac{z^n-\alpha^n}{z-\alpha} \tag{2.10}$$

が存在するかどうか，やってみる．眺めていても仕方ないので，右辺の分数を具体的に計算してみると，これは

$$\lim_{z\to\alpha}\left(z^{n-1}+z^{n-2}\alpha+z^{n-3}\alpha^2+\ldots+\alpha^{n-1}\right)=n\,\alpha^{n-1} \tag{2.11}$$

となり，ちゃんと存在する．よって，$f'(\alpha)=n\alpha^{n-1}$ である．

よく考えてみると，実数函数の場合は，z^n の導関数は良く知っていて，もちろん nz^{n-1} であった．上の結果はこれと一致している．

同様にして $g(\alpha)$ の微分は，

$$\lim_{z\to\alpha}\frac{g(z)-g(\alpha)}{z-\alpha}=\lim_{z\to\alpha}\frac{\dfrac{1}{1+z}-\dfrac{1}{1+\alpha}}{z-\alpha}=\lim_{z\to\alpha}\frac{\alpha-z}{(1+z)(1+\alpha)}\times\frac{1}{z-\alpha}=\lim_{z\to\alpha}\frac{-1}{(1+z)(1+\alpha)}=-\frac{1}{(1+\alpha)^2} \tag{2.12}$$

と計算でき，$\underline{\alpha\neq-1\text{ では}}$ 存在することがわかる．この場合も答は実関数のものと同じになっている．

最後に $p(z)$ であるが，結論から言うと，$\alpha=0$ の時のみ微分できて，微分はゼロ，それ以外の α では微分できない．これを見るには，まず，$\alpha=0$ の場合の微分は

$$\lim_{z\to\alpha}\frac{p(z)-p(\alpha)}{z-\alpha}=\lim_{z\to0}\frac{|z|^2}{z}=\lim_{z\to0}\frac{z\,\overline{z}}{z}=\lim_{z\to0}\overline{z}=0 \tag{2.13}$$

となって，確かに存在する．一方，$\alpha\neq0$ についてはニュートン商を睨んでも良いが，Cauchy-Riemann の関係式を確かめてもよい．前回の記号で

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=2x,\qquad\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}0=0 \tag{2.14}$$

であるから，この２つが一致するには $x=0$ が必要．同様に計算して

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y,\qquad-\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{2.15}$$

から２つが一致するには $y=0$ も必要．と言うわけで，結局 $\alpha \neq 0$ の場合は Cauchy-Riemann の関係式が満たされないので，微分不可能とわかる．

註 2.8 微分可能かどうかを調べるのに，Cauchy-Riemann の関係式をチェックした人がたくさんいた．これはあくまで必要条件であることに注意しよう（十分にするには，全微分可能性もチェックすべし）．

註 2.9 $p(z)$ については，Cauchy-Riemann と言わず,「実軸方向に微分した場合と，虚軸方向に微分した場合の結果が一致しないことを見る」方針でも良い（同じ事だが）．ただし，両者が一致することは微分可能性の必要条件であるから， f,g についてはこれらが一致したからと言って，微分可能だと言い切れるわけではない.（ので，全ての方向からの微分をやるか，またはニュートン商を地道に計算するか，になる.）

3 Cauchy の積分定理

まず積分定理の形を述べ，後にゆっくりと説明して行く．この節では「線積分」と言う，新しい題材が登場するので，心して学習して欲しい.

定理 3.1 (Cauchy の積分定理：高橋の定理 3.5，志賀の定理 3.1) $\mathbb{C}$ 内の領域 D で定義された正則関数 f がある．D 内の単純閉曲線[2] γ があり，γ のみならずその内部も D に属するとする．この時,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \tag{3.1}$$

が成り立つ．ここで上に出ている積分は以下で学習する「線積分」と言うものである.

Cauchy の積分定理は複素関数論の神髄とも言うべき定理であり，その一般的な主張はそれなりに複雑である.（実際，高橋の本では「ホモロジー」の概念を用いて，かなり一般的な主張を行っている.）しかし，この講義のレベルでは，あまり厳密に一般の場合をやってもしょうがないと思う．それよりも基本的な簡単な場合に限定してでも元になるアイディアを理解する方が余程大切である．そうしておけば，将来にもっと複雑なことをやる必要が出てきたときにも対応できる．そのために上の定理 3.1 も少し簡略化した形で書いたし，以下の講義もそのような方針で進む.

3.1 複素平面上での線積分（高橋，志賀ともに 3.1 節）

線積分の定義と基本的な性質を述べる．これは新しい概念だから少し練習しないとしっくりこないだろう．心して取りかかって欲しい.

3.1.1 線積分の定義

まず，曲線などの定義をしよう．何かヤヤコシイ書き方をしているが，要するに皆さんが普通に思っている「曲線」を数学的に定義するとこうなる，と言うだけである.

定義 3.2 (曲線)

- 複素平面での曲線 γ とは適当な閉区間 $[a,b]$ から複素平面への連続写像 γ （のグラフ）のこと.（これを始点・終点を含めて表すために $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ と書くことが多い.）
- 閉曲線 $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ とは曲線のうち，始点と終点が同じもののこと（$\gamma(a)=\gamma(b)$）.

[2] 曲線とは $[0,1]$ から複素平面への連続写像（のグラフ）のこと．閉曲線とは曲線のうち，始点と終点が同じもののことを言う．単純な閉曲線とは，自分自身と交わらない閉曲線のことである

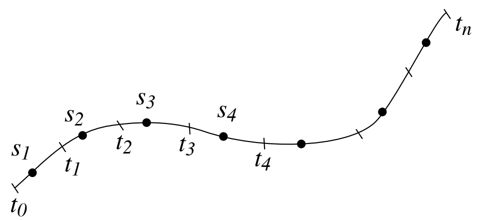


図 2: 一般の場合の線積分の定義

- 単純な閉曲線とは，自分自身と交わらない閉曲線のこと
- なお，$\gamma(t)$ が t について微分可能の時，曲線 γ は**滑らか**であると言う．

さて，複素平面上の曲線 γ と連続関数 $f(z)$ に対して，<u>f の γ に沿っての線積分</u> $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ を以下のように定義する．曲線が滑らかな時，そうとは限らない一般の時，に分けて考える．なお，以下の定義は少し一般的にやりすぎているようにも思う．講義では簡単な場合に限定するかも．以下がヤヤコシイと思う人は，最低限 Step 1 の「滑らかな曲線」の場合を理解して欲しい．

Step 1. 滑らかな曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ に関する線積分は単純に

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f\bigl(z(t)\bigr)\, z'(t)\, dt \tag{3.2}$$

として定義する．ここで $z'(t)$ は $z(t)$ の t に関する微分であり，$z(t) = x(t) + iy(t)$ と実部と虚部に分けて書くと $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ のこと．具体的に $f(z) = u + iv$ としてみると，

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b \Bigl[\bigl\{u(z)x'(t) - v(z)y'(t)\bigr\} + i\bigl\{u(z)y'(t) + v(z)x'(t)\bigr\}\Bigr]dt \tag{3.3}$$

となる（上の $u(z)$ などは勿論，$u(z(t))$ の意味であるが，式を複雑にしないために略した）．

Step 2. γ が有限個の滑らかな曲線の集まりであるとき（γ は**区分的に滑らか**と言う）は，それぞれの滑らかな曲線の集まりに対して上の定義を用い，和をとる．

Step 3. 最後に，一般の曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ について線積分を定義しよう．リーマン積分（より正確には Stieltjes 積分）の定義と同じである．まず， $[a,b]$ を任意に n 個の区間に分けたものを $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ とする（以下，図 2 参照）．更に各 $[t_{j-1}, t_j]$ 内に $s_j \in [t_{j-1}, t_j]$ を任意にとる．そして

$$S_n\bigl(\{t_j\}, \{s_j\}\bigr) \equiv \sum_{j=1}^{n} f\bigl(\gamma(s_j)\bigr)\, \bigl\{\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\bigr\} \tag{3.4}$$

を考える．最後に $\max_j |t_j - t_{j-1}|$ がゼロになるように曲線の分割を細かくして行ったときの $S_n(\{t_j\}, \{s_j\})$ の極限を考える．その極限が分割や $\{s_j\}$ の取り方によらないとき，その値を「γ に沿っての $f(z)$ の線積分」と定義するのである．

問 3.1： 線積分 $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ を以下の $f(z)$ と γ の組に対して求めよ.（これはそのうちにレポート問題？）.

- $f(z) = z^2$，曲線 γ は，原点 0 と点 $1+i$ を結ぶ直線.
- $f(z) = z^2$，曲線 γ は，原点 0 と点 $1+i$ を以下のように結ぶ折れ線：まず 0 と 1 を線分で結び，次に 1 と $1+i$ を線分で結ぶ.
- $f(z) = z^2$，曲線 γ は，原点 0 と点 $1+i$ を結ぶ放物線，$\gamma(t) = t + it^2$，ここで（$0 \le t \le 1$).

問 3.2： 上の問題は定義の case 1 か case 2 として処理できるが，無理矢理,「一般の時の定義」を適用して解いてみよう.

以上で一応，一般の曲線についての線積分を定義したが，Step 3 の定義が意味を持つか（極限が存在するか）は決して自明ではない．実際，Step 3 の定義が意味を持たないような変態な曲線はいくらでも作れる．そこで，上の定義が意味を持つのはどんなときかを考えよう．これにはもう少しの準備が必要である．

まず，**曲線の長さ**，**長さの定義できる曲線**を定義する．

Definition 3.3 (曲線の長さなど)

- 複素平面での曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ に対し，その長さを
$$\sup \sum_{j=1}^{n} \bigl|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\bigr| \tag{3.5}$$
で定義する（図 *2* 参照）．ここで $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ は $[a,b]$ を任意に n 個の区間に分けたもので，sup はこのようなすべての分け方とすべての $n > 0$ についてとる．

- 上の「長さ」が有限の時，γ は求長可能（*rectifiable*）と言う．

結論は：

定理 3.4 求長可能な曲線 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ と連続な $f(z)$ については，step 3 の様にすると線積分が定義できる．かつ，Step 1,2 が適用できる場合は，Step 1,2 の結果と Step 3 の結果は一致する．

この定理の証明はかなり大変なので，講義では（多分）省略.

まあ，ともかく，これで漸く Cauchy の積分定理が何を主張しているのかは理解できるようになった.

3.1.2 線積分の基本的性質

線形性： $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ と連続関数 f, g に対して
$$\int_\gamma \bigl\{\alpha f(z) + \beta g(z)\bigr\} dz = \alpha \int_\gamma f(z)\,dz + \beta \int_\gamma g(z)\,dz \tag{3.6}$$

曲線の和： 曲線 γ_1, γ_2 をつないで出来る曲線を $\gamma_1 + \gamma_2$ と書くと，
$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \tag{3.7}$$

不等式： 曲線 γ 上で $|f(z)| \le M$，かつ曲線 γ の長さが L ならば，
$$\Bigl| \int_\gamma f(z)\,dz \Bigr| \le ML \tag{3.8}$$

曲線のパラメーター付けに関する不変性： （講義後に追加）与えられた曲線を $\gamma(t)$ と表す方法はいろいろあるが，線積分の定義はこれらのパラメーター付けによらない．これは，積分の変数変換として理解できる．

3.2 ホモトピーと単連結性（高橋，志賀ともに 3.3 節）

（この節の内容はちょっと高度なので，全然やらないかも.）単連結性とホモトピーについて，必要最小限だけ述べる．直感で大体いけるぞ.

５月２０日の連絡：前回にも予告したとおり，６月１０日は休講にし，６月１７日に中間試験を行います．なお，採点基準はおおむね以下のように考えています（細部の変更はあるかも）．

- 試験の点（期末と中間から算出）を $G_{試験}$，レポートの点を $G_{レポ}$ とする（いずれも 100 点満点で）．
- レポート点 $G_{レポ}$ は学期中に出題したレポートの合計点であるが，提出点を 60% 以上にする（つまり，ある程度解く努力をしていれば 60% はもらえると言うこと）．
- $G_{試験}$ は以下で算出する（$G_{中間}, G_{期末}$ はそれぞれ，中間と期末の点数を表す）：

$$G_{平均} = (0.40) \times G_{中間} + (0.60) \times G_{期末}, \qquad G_{試験} = \max\bigl\{G_{平均},\, G_{期末}\bigr\}$$

- 最終成績 $G_{最終}$ は以下で算出する：

$$G_a = (0.8) \times G_{試験} + (0.2) \times G_{レポ}, \qquad G_{最終} = \max\bigl\{\, G_a, G_{試験}\bigr\}.$$

数学基礎 V 第２回レポート問題

問３： 前回のプリント p.11 の問 3.1 の積分を行え．また，根性のある人は，前回のプリント p.11 の問 3.2 もやってみよ．

締め切りなど：

締め切りは 2002 年 5 月 24 日（金）の 17:00，
提出場所は僕の部屋（理 1-508）の前の封筒かポスト
用紙はできうる限り A4 の紙を用いる（B5 などの小さい紙は紛れてなくなるかも）

とします．

レポートのお約束：

- 友達と相談しても，本を調べても，何をやっても良いから，自分で理解した範囲を書くこと．その際，参考文献や議論した友達の名前も明記すること．（友達と議論したり，本を見たからと言って悪い点をつける，などと言うことは絶対にしない．一番大事なのは自分でわかったところを表現すること．）
- なお，問題の番外編として，今までの講義内容・講義形態についての感想，不満，文句，このように改善すべしとの意見などもできるだけ書いてください．お願いします．

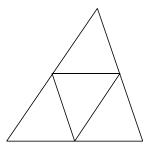
以下，レジュメの続き

3.3 Cauchy の積分定理の証明（高橋の 3.2&3.4 節，志賀の 3.4 節）

では以上の準備の下に，Cauchy の積分定理を証明しよう．この定理はそれ自身，非常に重要であるし，また証明も面白いと思うので，例外的に概要を説明することにする．

証明は何段階かに分けて行う．

Step 1. γ が三角形の場合に証明すれば十分であることにまず注意しておく．なぜなら，(i) 線積分の性質から，任意の γ についての積分は γ を近似する折れ線についての積分で証明すればよい．(ii) 更に，折れ線で囲まれた多角形は三角形に分割できる．だから分割した三角形についての積分がゼロなら十分である．従って，以下では γ が三角形の場合にのみ証明する．



Step 2. これから区間縮小法を用いて，$\int_\Delta f(z)dz = 0$ を示す（Goursat, Pringsheim）．まず，三角形 Δ をそれぞれの辺の中心で区切って合同な三角形 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ に４分割する．それぞれの三角形での線積分の向きを同じにとると，

$$\int_\Delta f(z)dz = \int_{\Delta_1} f(z)dz + \int_{\Delta_2} f(z)dz + \int_{\Delta_3} f(z)dz + \int_{\Delta_4} f(z)dz \tag{3.9}$$

である．これから

$$M \equiv \left|\int_\Delta f(z)dz\right| \le \left|\int_{\Delta_1} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta_2} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta_3} f(z)dz\right| + \left|\int_{\Delta_4} f(z)dz\right| \tag{3.10}$$

となるので，右辺の４つの絶対値の最大値を与える三角形を改めて Δ_1 と書くと，

$$M \le 4\left|\int_{\Delta_1} f(z)dz\right| \tag{3.11}$$

を得る．今度は Δ_1 を更に４分割し，分割したものの中で最大の寄与を与えるものを Δ_2 とすると

$$\left|\int_{\Delta_1} f(z)dz\right| \le 4\left|\int_{\Delta_2} f(z)dz\right|, \qquad \text{つまり} \quad M \le 4^2\left|\int_{\Delta_2} f(z)dz\right| \tag{3.12}$$

を得る．これを n 回くり返すと

$$M \le 4^n\left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right| \tag{3.13}$$

となる．

Step 3. さて，今，n を大きくして行く極限を考える．分割されてできた三角形 Δ_n の大きさは 2^{-n} のように小さくなって行くので，最終的には Δ の内部（または境界）の一点に収束して行く．その行先を α と書くことにしよう．

Step 4. この α は D の内点であり，f は D で正則である．微分可能性の仮定から

$$f'(\alpha) = \lim_{z\to\alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \tag{3.14}$$

が存在する；よって，α の近傍では

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + o(z-\alpha) \tag{3.15}$$

が成立している．

Step 5. ４分割の n を十分に大きくとって，Δ_n の周囲と内部では (3.15) が成り立つようにしてやろう．すると，

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_n} f(z)dz &= \int_{\Delta_n} \bigl\{f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + o(z-\alpha)\bigr\}dz \\ &= \int_{\Delta_n} f(\alpha)dz + \int_{\Delta_n} f'(\alpha)(z-\alpha)dz + \int_{\Delta_n} o(z-\alpha)dz \end{aligned} \tag{3.16}$$

となる．ところが右辺の初めの２項の線積分はゼロ（確かめよ）．更に，最後の線積分は三角形の一辺の長さが 2^{-n} のオーダーなので

$$\left|\int_{\Delta_n} o(z-\alpha)dz\right| \le O(2^{-n}) \times o(2^{-n}) = o(4^{-n}) \tag{3.17}$$

が成り立つ．つまり (3.16) から

$$\left|\int_{\Delta_n} f(z)dz\right| = o(4^{-n}). \tag{3.18}$$

これと (3.13) から

$$M \le 4^n \times o(4^{-n}) \tag{3.19}$$

となり，$n \to \infty$ でこの量はゼロに行く．つまり $M = 0$. □

５月２７日の連絡：これまでの宣言通り，６月１０日は休講にし，６月１７日に中間テストをやります．中間テストでは以下の要領で持ち込みを認めます．

- 持ち込めるものは A4 の大きさの紙の片側に自筆で書いたもの一枚のみ．裏側まで書いたり，コピーしたりしたものは無効である．
- 持ち込んだ紙には名前と学生番号を書いて，答案用紙と共に提出すること．（持ち込み無しで試験を受けようと言う人も，白紙に名前と学生番号を書いて提出してください．）

4 Cauchy の積分公式

前節の Cauchy の積分定理は複素解析の基礎である．この節では積分定理から導かれる色々な面白い性質（特に Cauchy の積分公式と言われるもの）を学ぶ．

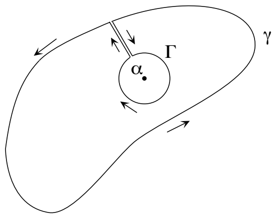
4.1 Cauchy の積分公式（高橋の 3.4 節，志賀の 4.1 節前半）

以下の「公式」は非常に応用範囲が広い（追々説明）．まず定理を述べると：

定理 4.1 (Cauchy の積分公式；高橋の定理 3.3 と定理 3.5(2)，志賀の定理 4.1)
単純閉曲線 γ の内部と周をふくむような領域で正則な $f(z)$ と γ の内部の点 α に対し（γ は α の周りを反時計回りに回っているものとする），

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\alpha}dz \tag{4.1}$$

証明：
非積分関数 $g(z) \equiv \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{f(z)}{z-\alpha}$ は C の中では $z=\alpha$ 以外では正則である．従って $z=\alpha$ を中心に小さな円を書いて（これを Γ とした），図のように γ と Γ を細い道でつなぐ．



全体の閉曲線の内側では g が正則であるから，この閉曲線に沿っての（矢印の向きの）線積分はゼロ．ところが細い道の部分の線積分は互いに向きが逆なので相殺し，結局

$$\int_\gamma g(z)dz = \int_\Gamma g(z)dz \tag{4.2}$$

を得る．（ここで Γ の向きは反時計周りにとってある．）あとは右辺を計算して，これが $f(\alpha)$ に等しくなることを示せば良い．

そのためには，Γ の半径を無限小にとるつもりになる．すると，$g(z)$ の定義中，分子の $f(z)$ は（f の連続性より）$f(\alpha)$ と思ってよい．よって，

$$\int_\Gamma g(z)dz = \frac{f(\alpha)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \frac{f(\alpha)}{2\pi i}\times 2\pi i = f(\alpha) \tag{4.3}$$

□

定理 4.2 (一回微分可能なら無限回微分可能 — Goursat；志賀の系 4.3，4.5) ある領域 D で正則な関数は D で無限回微分可能である．当然，正則関数の導関数も正則である．更に表式

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}dz \tag{4.4}$$

が成り立つ．ここで γ は D 内にあって α を反時計回りに囲む単純閉曲線.

証明：

Cauchy の積分公式 (4.1) において積分は絶対収束していること，および α は積分にはパラメーターの形で入っていることに注意する．従って「積分下の微分」が正当化され，実際に α で n-回微分すると定理の表式になる． □

これはやはり物凄い結果である．実関数では f が微分可能でも f' はそうとは限らなかった（連続ですらない可能性もある）．しかし，微分可能な複素関数では非常に見通しが良いのである．

定理 4.3 (Morera；高橋の p.60，志賀の系 4.4) 複素関数 f が (i) 領域 D で連続で，(ii) 周およびその内部が D に含まれるような任意の長方形 □ に対して

$$\int_{\partial\square} f(z)dz = 0 \tag{4.5}$$

を満たすならば，f は D で正則である.

ついでに，積分公式からすぐにでることを：

命題 4.4 (Cauchy の評価) 整関数 $f(z)$ の $|z-\alpha| = r$ 上での最大値を $M(r)$ と書くと，

$$|f^{(n)}(\alpha)| \le \frac{n!}{r^n}M(r) \tag{4.6}$$

証明：

積分公式 (4.4) をそのまま評価せよ. □

定理 4.5 (Liouville；高橋の p.61，志賀の系 4.8) 複素平面全体で有界な整関数は定数である.

証明：

Goursat の公式の一階微分の場合を書くと，

$$f^{(1)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=r}\frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}dz \tag{4.7}$$

である．複素平面全体で有界なので，その最大値を M とすると，上の積分は簡単に評価できて，

$$|f^{(1)}(\alpha)| \le \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^2}2\pi r = \frac{M}{r} \tag{4.8}$$

となるが，r は任意だから特に $r\to\infty$ とすると $f^{(1)}(\alpha) = 0$ を得る．微分がゼロだから，$f(z)$ は定数 □

定理 4.6 (代数学の基本定理；志賀の定理 4.9) n-次多項式 $P(z)$ は重複度も含めて丁度 n 個の根をもつ.

定理 4.7 (最大値の原理；高橋の定理 4.1，志賀の定理 4.10) 領域 D で正則な関数 f に対し $M \equiv \sup_{z\in D}|f(z)|$ とおく．もし，$|f(\alpha)| = M$ なる $\alpha \in D$ が存在するならば，f は定数である．(別の言い方：定数でなければ，$|f(z)|$ の最大値は縁のところでとる.)

5 冪級数

いままで，故意に冪級数について避けてきた．一つの理由は実変数の冪級数は数学基礎 I, III でやっているはずであること，もう一つの理由は複素関数論の流れを切りたくなかったこと，である．

Cauchy の積分公式なども出て，一段落したので，冪級数の問題に取り組もう．実際，冪級数の方法を使わなければ我々の扱える関数は非常に限られてしまう．

5.1 関数の収束概念の復習

冪級数の問題に入る前に，関数の収束の概念についてまとめておこう．この節の内容は少し取っつきにくいかも知れない．その場合は細部に拘らず，次の小節に進むことをお奨めする．講義でもここは簡単に触れるに留める予定なので，少々わからなくても気にしなくて良い.（ただし，これ以降の話の論理をきちんと詰めるにはこの小節の内容は大事なのであるが...）なお，大変に申し訳ないのであるが，高橋の教科書ではこの節の内容にあたることはあまり書いていない（それ以前の「微分積分学」でカバーしているつもりのようだ）.

定義 5.1 (各点収束と一様収束，高橋の p.13 付近，志賀の定義 2.2) 関数列 $\{f_n(z)\}$ と z の集合（区間）D がある．
(i) 今，区間 D の各点 z で $f_n \to f$ とは，単に $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ なること．
(ii) 一方，区間 D で一様に $f_n \to f$ とは，$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_D = 0$ なること．ここで $\|f\|_D \equiv \sup_{z\in D} |f(z)|$ と定義した．

註： 補足：各点収束は

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z) - f(z)| = 0 \tag{5.1}$$

であるが，一様収束は

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| = 0 \tag{5.2}$$

である．この極限の中に sup が入っているのがミソ.

註： ϵ-δ で書けば，各点収束は

$$\forall\epsilon > 0,\ \ \forall z \in D,\ \ \exists N \quad \text{s.t.} \quad n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \tag{5.3}$$

であるが，一様収束は

$$\forall\epsilon > 0,\ \ \exists N,\ \ \forall z \in D, \qquad \text{s.t.} \quad n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \tag{5.4}$$

註： 上では関数列について定義したが，級数 $\sum_n f_n(z)$ についてもその部分和 $F_N \equiv \sum_{n=0}^{N} f_n(z)$ を考えることで各点収束，一様収束を定義する．

定理 5.2 (志賀の定理 2.9) 関数列 $\{f_n\}$ が D 上で一様収束するための必要十分条件は

$$\forall\epsilon > 0,\ \ \exists N, \qquad \text{s.t.} \quad n, m \geq N \Rightarrow \|f_n(z) - f_m(z)\|_D < \epsilon \tag{5.5}$$

なること

証明：
まず，必要条件から．一様収束しているとすると，上の注から

$$\forall\epsilon' > 0,\ \ \exists N,\ \ \forall z \in D, \qquad \text{s.t.} \quad n \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon' \tag{5.6}$$

が成り立つからこれを $m \geq N$ についても書いて $|f_n - f_m| = |f_n - f + f - f_m| \leq |f_n - f| + |f - f_m|$ を使うと，直ちに，

$$\forall \epsilon' > 0,\ \exists N,\ \forall z \in D, \qquad \text{s.t.} \quad n, m \geq N \Rightarrow |f_n(z) - f_m(z)| < 2\epsilon' \tag{5.7}$$

を得るので，$\epsilon = 2\epsilon'$ として定理の主張は成り立つ.（最後に $\|\cdot\|_D$ の定義を思い出すと，上の式は直ちに $\|f_n - f_m\|_D < 2\epsilon'$ を意味することに気づく.）

次に十分条件．定理の条件が成り立っているとすると，各点 z において $\{f_n(z)\}$ は Cauchy 列である．従って，各点ごとにその行き先

$$f(z) \equiv \lim_{n\to\infty} f_n(z) \tag{5.8}$$

が存在する．問題はこの収束が一様かどうかであるが，それには (5.5) を書いた上で片方の m だけを無限大にしてみる．それぞれの z では $f_m(z) \to f(z)$ であるので，この式は結局

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N, \qquad \text{s.t.} \quad n \geq N \Rightarrow \|f_n(z) - f(z)\|_D < \epsilon \tag{5.9}$$

と読める．つまり $\lim_{n\to\infty} \|f_n(z) - f(z)\|_D = 0$ と言うわけで，一様収束性が示せた． □

一年の時に（実数関数について）やったはずの定理：

定理 5.3 (志賀の定理 2.10) 関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束し，かつ f_n が連続の時，行き先の f も連続である．

証明：

実数関数の時に限って，グラフで説明するのが一番． □

定理 5.4 (志賀の定理 2.11) 関数列 $\{f_n\}$，$\{g_n\}$ が $|f_n(z)| \leq g_n(z)$ を満たし，かつ $\sum_n g_n(z)$ が D 上で一様収束しているとする．このとき，級数 $\sum_n f_n(z)$ も D 上で一様かつ絶対収束している．

証明：

ϵ-δ でやる．一様収束について言いたいのは，定理 5.2 を使うつもりで，部分和 $S_N(z) \equiv \sum_{n=0}^{N} f_n(z)$ を定義した場合に，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N,\ \forall z \in D, \qquad \text{s.t.} \quad n, m \geq N \Rightarrow |S_n(z) - S_m(z)| < \epsilon \tag{5.10}$$

なること．最後の不等式は $\left|\sum_{j=m+1}^{n} f_j(z)\right| < \epsilon$ ということであるが，g_n の一様収束性から類似の不等式 $\left|\sum_{j=m+1}^{n} g_j(z)\right| < \epsilon$ の成立は保証されている．$|f_j| < g_j$ より直ちに欲しい不等式が出る．

絶対収束についても同様で，今度は部分和 $T_N(z) \equiv \sum_{n=0}^{N} |f_n(z)|$ を考えれば良い． □

以上の準備の下に，正則関数の一様収束極限について，以下の定理を述べることが出来る（定理 5.3 と比較せよ）.

定理 5.5 (志賀の定理 4.15) 領域 D で正則な関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束している時，行き先の f も正則である．更に，任意の $k \geq 1$ に対して f_n の k-階微分 $f_n^{(k)}$ は f の k-階微分 $f^{(k)}$ に一様収束する．

上の定理はもっと一般に「広義一様収束」と言う概念を用いて述べるべきであるが，ややこしくなるので狭い形で述べた．あらっぽく言えば,「一様収束」の下では正則性が遺伝するし，各導関数も行き先の導関数に収束する，と言うことである．

5.2 複素数の冪級数について

実数の冪級数について復習し，同様の性質が複素数の級数についても成り立つことを見よう．冪級数についての知識を積分公式と組み合わせることで視野が非常に広くなる．ただ，やることは実数の時とほとんど同じなので，数学基礎 I をきちんと理解していればあまり必要ではない．

定義 5.6 (冪級数，高橋の p.13，志賀の P.38) 複素数の係数 $\{a_n\}$ をもつ級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ を z の整級数（または冪級数）と言う．

定理 5.7 (高橋の補題 3（p.13），志賀の定理 2.13) 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ が一点 β で収束しているとする．この級数は実は α を中心，半径が $|\beta-\alpha|$ の円の内部（周は含まない）でも絶対かつ一様に収束する．

証明：
まず，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\beta-\alpha)^n$ が収束するのだから級数の各項がゼロに行くことに注意する．つまり，

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|\,|\beta-\alpha|^n = 0 \tag{5.11}$$

である．これから $|a_n|$ は十分大きな M でもって，

$$|a_n| \le \frac{M}{|\beta-\alpha|^n} \tag{5.12}$$

で押さえられることがわかる．よって $f_n(z) \equiv a_n(z-\alpha)^n$，$g_n \equiv M\left(\dfrac{|z-\alpha|}{|\beta-\alpha|}\right)^n$ としてやると，$|f_n(z)| \le g_n(z)$ がなりたつ．

級数 $\displaystyle\sum_n g_n(z)$ は $|z-\alpha| < |\beta-\alpha|$ で絶対収束するから定理 5.4 から $\displaystyle\sum_n f_n(z)$ の絶対・一様収束が示される． □

定義 5.8 (冪級数の収束半径) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ に対し,「α 中心の円でその内部でこの級数が収束するようなやつ」の半径の最大値を，この級数の収束半径という．

勿論，収束半径がゼロである冪級数もある（例を作ってみよう）．こんな級数は（そのままでは）役に立たないので[3]，この講義で以下に出てくるのは収束半径が正である級数である．

定理 5.9 (高橋の p.14–15，志賀の定理 2.14, 2.15) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ の収束半径 R に対し，以下の公式が成り立つ（ただし，極限が存在する場合）．
(i) ratio test

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{5.13}$$

(ii) root test

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right)^{-1} \tag{5.14}$$

[3]収束半径がゼロだから全く無意味かと言うと，そうではない．漸近展開，Borel の総和法など，このような一見無意味な級数が意味を持つ場合も多いが，これらはこの講義の程度を越えている

この定理は非常に基本的なものであるが，教科書では省略気味なので，証明の「気持ち」と「概略」を載せることにした．

（証明の気持ち）

(i) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ を r とおく．これは非常に大ざっぱに言うと，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx \frac{1}{r} \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n| \approx Cr^{-n} \qquad (C\text{ は適当な定数}) \tag{5.15}$$

と言うこと．これから

$$\left|\, a_n(z-\alpha)^n \,\right| \approx C\left|\frac{z-\alpha}{r}\right|^n \tag{5.16}$$

となるが，これは公比が $|z-\alpha|/r$ の等比級数の各項になっている．従って，この等比級数は $|z-\alpha|<r$ ならば収束するし，$|z-\alpha|>r$ ならば発散する．

(ii) 極限 $\displaystyle\Bigl(\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\Bigr)^{-1}$ を r とおく．やはり大ざっぱには

$$|a_n|^{1/n} \approx \frac{1}{r} \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n| \approx Cr^{-n} \qquad (C\text{ は適当な定数}) \tag{5.17}$$

となるので，後は (i) の「気持ち」と同じ議論になる．

（証明の概略）以上の議論を厳密にするのは $\epsilon-\delta$ 法の良い練習問題である．証明の途中がわかりにくい場合には上の「気持ち」を思い出してもらいたい．

(i) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ を r とおく．定義から，任意の $\epsilon>0$ に対して N が存在して，$n\ge N$ ならば

$$\left|\,\Bigl|\frac{a_n}{a_{n+1}}\Bigr| - r\,\right| < \epsilon \qquad \left(\iff \qquad r-\epsilon < \Bigl|\frac{a_n}{a_{n+1}}\Bigr| < r+\epsilon \right) \tag{5.18}$$

が成り立つ．以下ではこれを元にして，$|z-\alpha|<r$ なら級数は絶対収束し，$|z-\alpha|>r$ なら級数が発散することを言う．

まず，$|z-\alpha|>r$ の場合は，級数の各項が発散してしまう．実際，(5.18) から，$n\ge N$ に対して

$$\left|\frac{a_n}{a_N}\right| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| > \Bigl(\frac{1}{r+\epsilon}\Bigr)^{n-N+1} \tag{5.19}$$

が成り立つことがわかるので，級数の n 項目について（もちろん，$n>N$ だけ考える）

$$\left|a_n(z-\alpha)^n\right| > a_N\Bigl(\frac{1}{r+\epsilon}\Bigr)^{n-N+1}|z-\alpha|^n = a_N\,|z-\alpha|^N \times \Bigl(\frac{|z-\alpha|}{r+\epsilon}\Bigr)^{n-N+1} \tag{5.20}$$

が成り立つ．$|z-\alpha|>r$ の場合は ϵ を十分小さくとることで（もちろん，ϵ に併せて N,n も大きくとる）

$$\left|\frac{|z-\alpha|}{r+\epsilon}\right| > 1 \tag{5.21}$$

を実現できるので，(5.20) は $n\to\infty$ で発散することがわかる．つまり，収束半径は r 以下である．

次に $|z-\alpha|<r$ の場合であるが，この場合は (5.19) のマネをして

$$\left|\frac{a_n}{a_N}\right| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| < \Bigl(\frac{1}{r-\epsilon}\Bigr)^{n-N+1} \tag{5.22}$$

を導いて用いる．これから直ちに

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n(z-\alpha)^n\right| \le \sum_{n=0}^{N}\left|a_n(z-\alpha)^n\right| + |a_N|\sum_{n=N+1}^{\infty}\left|\frac{|z-\alpha|}{r-\epsilon}\right|^n \tag{5.23}$$

となる．ここで $|z-\alpha|<r$ であるので，$\epsilon=(r-|z-\alpha|)/2$ ととり，これに応じて N も大きくとって固定する．すると，右辺最後の等比級数の公比が 1 より小さくなり，右辺第一項の級数は（N を固定しているので）有限和

であるから，どちらも有限．つまり (5.23) の左辺が絶対収束していることがわかったので，収束半径は r 以上である．

以上から，収束半径は丁度 r であることがわかった．

(ii) この場合も証明はほとんど (i) と同じである．極限 $\Bigl(\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\Bigr)^{-1}$ を r とおくと，(5.18), (5.19), (5.22) の代わりに以下が成り立つ：任意の $\epsilon > 0$ に対して N が存在して，$n \geq N$ ならば

$$|a_n|^{1/n} < \frac{1}{r} + \epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n| < \Bigl(\frac{1}{r} + \epsilon\Bigr)^n. \tag{5.24}$$

後は (i) の証明と同じように進めば，$|z-\alpha| < r$ なら収束することは言える．逆方向は，任意の $\epsilon > 0$ と任意の N に対して $n > N$ が存在して

$$|a_n|^{1/n} > \frac{1}{r} - \epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n| > \Bigl(\frac{1}{r} - \epsilon\Bigr)^n. \tag{5.25}$$

であることを使って，このような n に対しては $a_n(z-\alpha)^n$ が発散していくことを言えばよい． □

註 5.10 上の証明は，$|z-\alpha| = r$ の場合に収束するか・発散するか，について何も言ってくれない．実際，$|z-\alpha| = r$ の場合には「何でもあり」なので，個々の級数毎に，また個々の z 毎に対応するしかない[4]．

5.3 積分公式と冪級数

前振り：テイラー展開を思い出そう：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{5.26}$$

であった．また，既に $f(z)$ が正則なら無限回微分可能（定理 4.2），と言うことも知っている．従って，正則関数は冪級数に展開できるのではないか，と予想される．この予想は実際に正しい．この節ではこの予想の証明，およびこの予想からでてくる結果をみていく．

まず，冪級数なら正則（つまり，冪級数で定義された関数は複素関数の意味で微分可能）である，ことを見ておこう．

定理 5.11 (冪級数は正則関数である；高橋の p.37-38，志賀の定理 2.16) 級数 $f(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ の収束半径を R とすると，この級数は $|z-\alpha| < R$ では正則である．更に，その導関数は

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (z-\alpha)^{n-1} \tag{5.27}$$

で与えられる．

証明：

まず，$\alpha = 0$ の場合のみ証明すればよいことに注意する．と言うのは，座標系を平行移動することで，α を原点に持ってこれるから．そこで以下では $\alpha = 0$ として進める．

野暮ったいけども微分を計算する．どの点での微分かを明らかにするため，$|\beta| < R$ なる β を固定し，ここでの微分を考える．また，$r \equiv \{R - |\beta|\}/2$ と決めておく．こうすると，$|\beta - z| < r$ であることは $|z| < R$ も保証してくれるので，都合がよい．

[4]勿論，特殊な場合についての細かい議論は無いわけではないが...

$\lim_{z\to\beta}\dfrac{f(z)-f(\beta)}{z-\beta}$ を計算しよう．ここで z は $|\beta-z|<r$ を満たすものだけを考える． z,β で級数が絶対収束しているから

$$f(z)-f(\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(z^n-\beta^n\}=(z-\beta)\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(z^{n-1}+z^{n-2}\beta+\ldots+\beta^{n-1}) \tag{5.28}$$

と書けるので，注目のニュートン商は

$$\frac{f(z)-f(\beta)}{z-\beta}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(z^{n-1}+z^{n-2}\beta+\ldots+\beta^{n-1}) \tag{5.29}$$

となる．ところが，この右辺の級数自身は，$|z|<R$ で絶対収束しており（第 n 項の大きさが $|a_n|\times nR^{n-1}$ よりも小さいから），よって $|z|<R$ では z の連続関数である．そこで特に $z\to\beta$ の極限では上のニュートン商は

$$\lim_{z\to\beta}\frac{f(z)-f(\beta)}{z-\beta}=\lim_{z\to\beta}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,(z^{n-1}+z^{n-2}\beta+\ldots+\beta^{n-1})=\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_n\,\beta^{n-1} \tag{5.30}$$

となって，定理が証明された． □

では，次に上の定理の逆，つまり「正則なら冪展開ができる」ことを見よう．

定理 5.12 (冪展開の可能性；高橋の p.59 系，志賀の定理 4.2)
$\mathbb{C}$ 内の領域 D で定義された f が正則とする．このとき f は，D 内の任意の点 α のまわりで，冪級数展開

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z-\alpha)^n,\qquad f_n=\int_{|\zeta-\alpha|=r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\frac{d\zeta}{2\pi i} \tag{5.31}$$

を持つ．この級数の収束半径は少なくとも α と ∂D との距離 $\mathrm{dist}(\alpha,\partial D)$ 以上で，上の r は $\mathrm{dist}(\alpha,\partial D)$ より小さい任意の正の数.

証明：
題意の z は $|z-\alpha|<\mathrm{dist}(\alpha,\partial D)$ を満たしているので，このような z について考える．今，α を中心とし，半径が $|z-\alpha|$ と $\mathrm{dist}(\alpha,\partial D)$ の間であるような円を γ と呼ぶことにする．この円の中に z があるので，Cauchy の積分公式は

$$f(z)=\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{2\pi i} \tag{5.32}$$

と書ける．これを強引に級数の形に持って行こう．

まず，積分中では ζ は円周上，z は円の内部にあるので，

$$\left|\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right|<1 \tag{5.33}$$

である．従って，以下のように変型しても右辺の級数は絶対収束する．

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-\alpha)-(z-\alpha)}=\frac{1}{\zeta-\alpha}\times\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}}=\frac{1}{\zeta-\alpha}+\frac{z-\alpha}{(\zeta-\alpha)^2}+\frac{(z-\alpha)^2}{(\zeta-\alpha)^3}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} \tag{5.34}$$

従って，これを (5.32) に代入して項別積分できる．結果は

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\frac{d\zeta}{2\pi i} \tag{5.35}$$

則ち，結論をえた.（このままでは f_n を与える線積分が γ についてのものになっているが，非積分関数の特異点が $z=\alpha$ だけであることから積分路を自由に変更できる． □

これまでをあらっぽくまとめると以下のようになる：「複素関数がある領域で微分可能である事（正則性)」と「複素関数が冪級数に展開できること（解析性)」とは同等である．

数学基礎 V 第３回レポート問題

問 4： 以下の冪級数の収束半径を求めよ．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2(z-1)^n$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n(z-3)^n$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n^2}(z-2)^n$

(iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}}(z-1)^n$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n(z-3)^{2n}$

問 5： （少し難しいかも知れないので，ボーナス問題）

実数 α を一つ決めて，冪級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha z^n$ を考えると，この冪級数の収束半径は（α の値にかかわらず） 1 である．つまり，$|z|<1$ なら絶対収束し，$|z|>1$ なら発散している．そこで，$|z|=1$ での収束・発散が，α の値と z の値にどのように依存するか，考えてみよ．

締め切りなど：

締め切りは 2002 年 7 月 12 日（金）の 17:00，
提出場所は僕の部屋（理 1-508）の前の封筒かポスト
用紙はできうる限り A4 の紙を用いる（B5 などの小さい紙は紛れてなくなるかも）

とします．

レポートのお約束：

- 友達と相談しても，本を調べても，何をやっても良いから，自分で理解した範囲を書くこと．その際，参考文献や議論した友達の名前も明記すること．（友達と議論したり，本を見たからと言って悪い点をつける，などと言うことは絶対にしない．一番大事なのは自分でわかったところを表現すること．）
- なお，問題の番外編として，今までの講義内容・講義形態についての感想，不満，文句，このように改善すべしとの意見などもできるだけ書いてください．お願いします．

以下，レジュメの続き

5.4 冪級数による初等関数の定義

これまで，この講義で出てきた複素関数は多項式か有理関数に限られていた．それは，これ以外の関数を定義する手段が無かったからである．しかし，冪級数を定義して自由に使えるようになった今は，扱える関数の範囲をグンと拡げることが出来る．特に，実関数の時に重要であった $\sin, \cos, \exp, \log$ などを定義することができる．この小節では，これらの重要な関数をまとめて定義しておく．

> 方針：多項式や有理関数の形に書けない関数は，すべてその冪級数展開によって定義する．特に，実数関数として定義されていたものを複素関数に拡張するには，同じ展開係数を使った冪級数展開を用いる．

上の方針についての補足説明.

- 前小節で見たように,「冪級数展開可能」と「微分可能（正則性）」は大体，等価であるから，正則関数を定義するのに冪級数を使うのは非常に自然である．
- さて，実数関数としてなじみの深い関数を正則な複素関数として定義する際，複素数に拡張した関数が，実数の時のものと自然につながるようにしたい．となれば，実数の時の級数展開を複素数まで拡張して用いるのが一番，自然である．
- 実は，実数と複素数で同じ級数を用いることの理論的根拠は，すぐ後にでてくる「一致の定理」である．

以下では，いくつかの例を挙げる．

指数関数： 実数関数としての指数関数 e^x の定義の仕方は色々あるが，ともかく，e^x は

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{5.36}$$

という冪級数展開を持っていた．従って，複素数 z に対する指数関数は

$$e^z = \exp(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{5.37}$$

という冪級数で定義する（この級数の収束半径は無限大）．

三角関数： 指数関数に倣って，三角関数も実数関数の時の冪級数から定義する．まず，

$$\sin(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{5.38}$$

とする（この級数の収束半径は無限大）．次に，$\tan, \sec, \cot, \mathrm{cosec}$ は，$\sin, \cos$ との関係式

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \qquad \sec z = \frac{1}{\sin z}, \qquad \mathrm{cosec} z = \frac{1}{\cos z} \tag{5.39}$$

から定義する.（$\tan, \cot$ などを冪級数で定義しても良いが，収束半径が限られる）．

対数関数： これはちと面倒なので，ここでは，$|z| < 1$ のみに対して，

$$\log(1+z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \tag{5.40}$$

と定義するのに留めておく．この級数の収束半径は丁度 1 なので，$|z| \geq 1$ に対しての定義はもう少し考えないといけない．これは「解析接続」を用いて行う（後で）．

以上の定義から直ちに,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{5.41}$$

や

$$e^{iz} = \cos z \,+\, i \,\sin z \qquad \text{（Euler の関係式）} \tag{5.42}$$

が成り立つことがわかる（各自，冪級数を両辺に代入して確かめよ）．

5.5 冪級数を使って証明できるいくつかの定理

定理 5.13 (一致の定理；高橋の系 2（p.43），志賀の定理 4.6 の前半) 領域 D で正則な 2 つの関数 f, g がある．今，D 内の一点に収束する点列 $\{z_n\}$ に対して $f(z_n) = g(z_n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ であるとすると，D 内で $f \equiv g$ である．

証明：

Step 1. $g \equiv 0$ の場合が証明されればよい．なぜなら，一般の場合は $h(z) = f(z) - g(z)$ を考えることにより $h \equiv 0$ が言えれば言えるから．よって「すべての n について $f(z_n) = 0$ ならば $f \equiv 0$」を言うことにする．

Step 2. z_n の極限点を α とすると，α は D の内点だから Taylor 展開できて

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z-\alpha)^n. \tag{5.43}$$

以下，$f_n \equiv 0$ であることを示す．

Step 3. f は正則ゆえもちろん連続，よって

$$f_0 = f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0 \tag{5.44}$$

よって $g(z) \equiv f(z)/(z-\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(z-\alpha)^n$ も正則．よって上と同様にそのゼロ次の係数はゼロ：$f_1 = 0$．以下，これの繰り返しによりすべての n で $f_n \equiv 0$ とわかった．

Step 4. 以上から (5.43) の級数の収束範囲では $f \equiv 0$ がわかる．これを D 全体に拡げるには，今の級数でカバーした部分の端の方の点を改めて α だと思ってみる．すると α に収束する任意の点列 $\{z_n\}$ に対して $f(z_n) \equiv 0$ である．よって上の議論をくり返すことができる．以下，このようにして D 全体まで拡げることができる． □

系 5.14 (高橋の定理 2.7（p.43），志賀の定理 4.6 の後半) 領域 D で正則，かつ恒等的にはゼロでない関数 f の零点は D-内に集積点を持たない．

証明：

集積点を持つと言うことは，$g \equiv 0$ として定理 5.13 の条件を満たしてしまうことになる．これは「恒等的にはゼロではない」に矛盾する． □

定理 5.15 (志賀の定理 4.7) 整関数（$\mathbb{C}$ 全体で正則な関数）f に対して整数 $k \ge 0$ と $M > 0$ が存在し，十分大きな任意の r に対して（つまり r_0 が存在して $\forall r > r_0$ ということ）

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \le M r^k \tag{5.45}$$

となるならば，f は高々 k-次の多項式である．

証明：

整関数であるから収束半径 ∞ の級数展開ができる：

$$f(z) = \sum_n f_n z^n \tag{5.46}$$

ところが (5.31) の f_n の表式から

$$|f_n| \le \int_{|\zeta|=r} \frac{M r^k}{|z|^{n+1}} \frac{d|\zeta|}{2\pi} = M\, r^{k-n} \tag{5.47}$$

である．$r \to \infty$ とすると $n > k$ なら $f_n = 0$ であるとわかる． □

6 Laurent 展開と留数

いままでは主に，正則な関数を扱ってきた．しかし，我々が扱いたい関数は正則とは限らない．最も簡単な例としても，$\dfrac{1}{1+z}$ のような分数関数などがすぐに思いつく．そこで，これからはこのような関数も扱えるように，「有理型」の関数を考えていく．なお，思いがけない副産物として,「留数による積分計算」ができるようになる．

6.1 Laurent 展開（高橋の 4.5 節，志賀の 5.1 節）

今まではある領域（特に適当な円盤内）で正則な関数を考えてきた．しかし，これからは対象を拡げて，ある円環内で正則な関数を考える．ここで言う円環とは，適当な $\alpha \in \mathbb{C}$ と $0 \le r < R \le \infty$ に対して，

$$A(\alpha, r, R) \equiv \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, r < |z-\alpha| < R\} \tag{6.1}$$

と書けているような領域のこと．

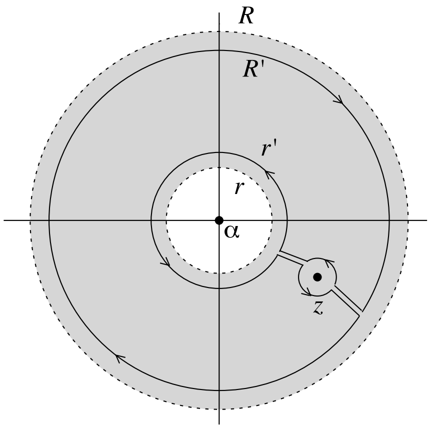
この節の主題は，この $A(\alpha, r, R)$ では正則な（でも，それ以外では正則でないかも知れない）関数 $f(z)$ である．例としては,

$$\frac{1}{1+z}, \qquad \frac{z^3}{2+3z+z^2}, \qquad \frac{e^z}{(z-2)^4} \tag{6.2}$$

など，いくらでもある.（特別な場合として，$|z-\alpha| < R$ で正則な関数も考えるが，これらは目新しいことはないので，この節では主役を務めない）.

さて，このような関数に対する $\sum_n a_n(z-\alpha)^n$ の形の級数展開を考えたい．すぐにわかることは，今まで考えていたような冪級数展開は不可能だと言うこと（なぜなら，もし可能なら，関数は $|z-\alpha| < R$ で正則になってしまうが，今は $|z-\alpha| < r$ くらいでは正則でない点もあるのを考えている）．そこで，以下のように発見法的に考えてみる．

今まで何度もやってきたトリックであるが，$r < r' < R' < R$ なる r', R' を固定して，積分路 C を図のようにとる．また，$r' < |z-\alpha| < R'$ なる z を固定し，$\epsilon \ll 1$ を十分に小さくとる．



すると，Cauchy の積分定理から（円上の積分は全て反時計回り）[5],

$$0 = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{|\zeta - z| = \epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{|\zeta-\alpha| = r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{|\zeta-\alpha| = R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{6.3}$$

が成り立つ (積分の往復部分は，今までと同じようにキャンセル).「Cauchy の積分公式」を思い出すと，$|\zeta - z| = \epsilon$ の積分は $2\pi i f(z)$ に等しいことがわかるので,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z| = R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z| = r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{6.4}$$

が得られる．

[5] 巧妙に，この積分路の周囲と内部では $f(\zeta)/(\zeta - z)$ は正則なようにしてあることに注意

さて，ここまで来ると，定理 5.12 の証明をなぞることができる．すなわち，$|\zeta-\alpha| = R'$ については $\left|\dfrac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\right| < 1$ なので，定理 5.12 の証明と全く同じに

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta-\alpha} \times \frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}} = \frac{1}{\zeta-\alpha} \times \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\Bigr)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} \tag{6.5}$$

とする．一方，$|\zeta-\alpha| = r'$ については $\left|\dfrac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}\right| < 1$ なので，

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{z-\alpha} \times \frac{1}{1-\frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}} = \frac{-1}{\zeta-\alpha} \times \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\frac{\zeta-\alpha}{z-\alpha}\Bigr)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta-\alpha)^n}{(z-\alpha)^{n+1}} \tag{6.6}$$

とできる．これらを (6.4) へ代入して積分と級数の交換を行うと（級数が絶対収束しているので交換可能）

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|\zeta-z|=R'} f(\zeta)\frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}dz + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|\zeta-z|=r'} f(\zeta)\frac{(\zeta-\alpha)^n}{(z-\alpha)^{n+1}}dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-\alpha)^{-n} \end{aligned} \tag{6.7}$$

と書けることがわかった．ここで，

$$\begin{aligned} a_n &\equiv \int_{|\zeta-z|=R'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\frac{dz}{2\pi i} \qquad (n \ge 0) \\ a_{-n} &\equiv \int_{|\zeta-z|=r'} f(\zeta)(\zeta-\alpha)^{n-1}\frac{dz}{2\pi i} \qquad (n \ge 1) \end{aligned} \tag{6.8}$$

以上をまとめると，以下の定理の前半になる．

定理 6.1 (Laurent 展開) 複素関数 $f(z)$ が環状領域 $A(\alpha, r, R)$ で正則だとすると，$A(\alpha, r, R)$ 内の任意の点 z において，$f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-\alpha)^{-n} \tag{6.9}$$

の形の Laurent 展開を持つ．ここで係数 a は一意に定まり，(6.8) で与えられる．

一意性の証明：上では (6.8) の a_n などを使えば級数の形に書けることを示したが，他の係数の取り方までは否定していない．ので，それを示しておこう．それには，(6.9) の形の級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-\alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-\alpha)^{-n} \tag{6.10}$$

があったとして，係数 b_n, b_{-n} を決定してやればよい．しかし，上の両辺に $(z-\alpha)^{-n-1}$ をかけて両辺を $|z-\alpha| = R'$ で積分すると（級数が絶対収束しているから項別積分ができる），

$$2\pi i b_n = \int_{|z-\alpha|=R'} f(z)\,(z-\alpha)^{-n-1}\,dz \tag{6.11}$$

が得られ，これは (6.8) の a_n と一致する．同様に，$(z-\alpha)^{n-1}$ をかけて両辺を $|z-\alpha| = r'$ で積分すると $b_{-n} = a_{-n}$ が結論される． □

6.2 孤立特異点（高橋の 4.5 節，志賀の 5.2 節）

さて，正則でない関数にはいろいろな種類がある．その一端を見てみよう．まず，関数 $f(z)$ が与えられ，点 $z = \alpha$ で $f(z)$ で微分不可能の時，α を $f(z)$ の特異点と言う．特に，α の近傍において，$f(z)$ が α 以外では正則だが，α では微分可能でない場合，α を f の孤立特異点と言う．

さて，α が $f(z)$ の孤立特異点の場合，定理 6.1 によって，$f(z)$ は α の近傍では（ただし $z \neq \alpha$）

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-\alpha)^{-n} \tag{6.12}$$

と展開される．このとき，右辺の第 2 項 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-\alpha)^{-n}$ をこの Laurent 展開の主要部（principal part）と言う[6]．また，係数 a_{-1} を $f(z)$ の $z = \alpha$ における留数（residue）と言い，$\mathrm{Res}(f;\alpha)$ と書く．

孤立特異点 α はその周りでの Laurent 展開（主要部）によって，以下のように分類される．

- 除去可能な特異点（removable singularity）：主要部がゼロの場合．これは全然面白くない（以下の定理 6.2 も参照）．
- 極（pole）：主要部がゼロではないが，有限和になっている（つまり，十分大きな n では $a_{-n} \equiv 0$）場合．特に，主要部が
$$\sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-\alpha)^n}, \qquad a_{-k} \neq 0 \tag{6.13}$$
の時，$z = \alpha$ は f の k-位の極である，と言う．
- 真性特異点（essential singularity）：主要部が（ゼロでない）無限項の和の場合．いくらでも発散の強い $(z-\alpha)^{-n}$ が現れる，と言う意味で，深刻な特異点である．

以下，それぞれの場合を特徴づける定理を述べる．まず，除去可能特異点から．これは要するに，もともと $z = \alpha$ でも正則だった関数を持ってきて，無理矢理 $f(\alpha)$ の値を不連続になるように付け替えたようなものである．実際，以下が成り立つ．

定理 6.2 (除去可能特異点について：Riemann；志賀の定理 5.1) $z = \alpha$ が f の孤立特異点で，かつ f が $z = \alpha$ の近傍で有界であるなら，α は f の removable singularity である．

次に真性特異点であるが，これは以下の定理の通り，かなり変態である．

定理 6.3 (真性特異点について：Weierstrass；志賀の定理 5.2) $z = \alpha$ が f の真性特異点の場合，任意の複素数 β に対して α に収束する列 $\{z_n\}$ を適当にとることにより，$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \beta$ ならしめることができる．

最後に極について．これはある意味で簡単で，極では絶対に $f(z)$ が発散する：

系 6.4 (Pole の条件；志賀の系 5.3) f の孤立特異点 α が f の pole である必要十分条件は $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \infty$ なること．

[6] なぜ「主要」かと言うと，f の特異性を表しているから

７月１５日の連絡：期末試験については，以下の要領で行います.

- 日時・場所は通常の期末試験期間中に，教務課の掲示通りに行う.（ここで下手に間違った情報を書いてしまうとマズイので，書かない.）
- 出題範囲はやったところ全部，だが，大体はレポート問題などに似たものになる予定.（特に，中間試験で冒険をしてしまったので，期末ではあまり冒険できない.）
- 中間試験と同じく，以下の要領で持ち込みを認める.
  - 持ち込めるものは A4 の大きさの紙の片側に自筆で書いたもの一枚のみ．裏側まで書いたり，コピーしたりしたものは無効である.
  - 持ち込んだ紙には名前と学生番号を書いて，答案用紙と共に提出すること.（持ち込み無しで試験を受けようと言う人も，白紙に名前と学生番号を書いて提出してください.）

先週のレポートの略解

まず問４は，基本的には計算するのみ．大体は，Ratio test, root test どちらも使える：

(i)

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1, \qquad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} n^{2/n} = 1$$

(ii)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} (3^n)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 3 = 3$$

(iii)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n^2}}{4^{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} 4^{-2n-1} = 0, \qquad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} (4^{n^2})^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 4^n = \infty$$

(iv)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)!}}{\sqrt{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} = \infty, \qquad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} (n!)^{-1/(2n)} == 0$$

Root test にでてくる極限はちょっと求めにくいかも知れないので，その場合には，例えば log をとって，

$$\lim_{n\to\infty} \log\Bigl(|a_n|^{1/n}\Bigr) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log n! = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log k = \infty$$

などと計算すると良い.

注意！　これらの公式を使うときは，でてきた極限が R なのか，$1/R$ なのか，よくよく注意すること！

(v) はちょっとだけ難しい．文字通りやろうとすると，$a_{2n-1} = 0, a_{2n} = 2^n$ なのである．まず，root test なら lim sup をちゃんと計算すると

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \quad = \limsup_{n\to\infty} (2^n)^{1/(2n)} \quad = \limsup_{n\to\infty} 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

と求まる（$R = 1/sqrt2$）．これがイヤな人は，まず $(z-3)^2 = y$ とでもおいて，y の級数として考えるとよい．これは (ii) の仲間だから，収束半径は 1/2 で，$|y| = 1/2$ が収束・発散の境目となる．これを元の $z-3$ の言葉に直すと，

$$|y| = \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |(z-3)^2| = \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |z-3| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから，$1/sqrt2$ が境目，とわかる．つまり収束半径は $1/sqrt2$.

問題は問５である.（(たくさんの人が苦労していたが，その中で２，３人が，正しい答えに到達していた.）実は「発見法」的な解答を用意していたのだが，今朝になって間違いに気が付いた．それで仕方ないので,（ちょっと天下りな）かっこいいやり方を述べる（詳しくは講義で）.

まず，すぐにわかること．級数が収束するには少なくともその各項が収束することが必要である．今考えている級数では（$|z|=1$ で）第 n 項が

$$\big|\, n^\alpha z^n \,\big| = n^\alpha\, |z|^n = n^\alpha$$

である．これがゼロに行くことが必要だから，収束のためには少なくとも $\alpha < 0$ が必要とわかる（$\alpha \geq 0$ ではどうやっても収束しない）．また，$z =!$ の場合は $\alpha < -1$ が必要十分なこともすぐにわかる．

さて，$|z|=1, z \neq 1$ の場合が残るが，これには，Abel の公式

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \text{とすると} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

を（$a_k = z^k, b_k = k^\alpha$ として）使うのが一番簡単.（時間切れ．後は講義で！）

6.3　留数計算（高橋の 4.6 節，志賀の 5.4 節）

まず,

定義 6.5 (有理型関数) 領域 D で定義された複素関数 f が，その極を除いては正則である（つまり，f の特異点は全部，極である）場合，f は有理型（meromorphic）関数である，と言う．

定理 6.6 (Residue Theorem；志賀の定理 5.6) 領域 D で有理型である関数 f があり，その内部まで D 内に含まれる反時計回りの単純閉曲線 γ を考える．γ 上に f の極がないとすると，

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f; z_j) \tag{6.14}$$

ここで z_j についての和は γ 内の全ての極にわたってとる．

次に留数の計算法：基本的には定義に従ってやればよい．有理型関数 f の極 $z=\alpha$ での留数を求めよう．定義から，留数とは f の Laurent 展開

$$f(z) = \sum_n a_n (z-\alpha)^n \tag{6.15}$$

の係数 a_{-1} のことであった．

- 一位の極の場合：一位の極の場合は Laurent 展開が $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ であるから，$(z-\alpha)f(z)$ を考えて $z=\alpha$ とおくと丁度 a_{-1} が得られる．つまり，

$$a_{-1} = \lim_{z\to\alpha} (z-\alpha) f(z) \tag{6.16}$$

- ２位以上の極の場合：この場合は少し厄介である．と言うのも，$f(z)$ は $(z-\alpha)^{-1}$ より強く発散しているので一位の極のようにはいかない．そこで，次のトリックを用いる（天下りだが）．N-位の極として $(z-\alpha)^N f(z)$ を考えると

$$(z-\alpha)^N f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (z-\alpha)^{n+N} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{-N+j} (z-\alpha)^j \tag{6.17}$$

となる．これを $(N-1)$-回微分すると，a_{-1} のところが丁度定数になって，$z \to \alpha$ とする事ができる．その際，余分な $(N-1)!$ がかかるので結局

$$a_{-1} = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z\to\alpha} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} \Big((z-\alpha)^N f(z) \Big) \tag{6.18}$$

その後，具体的な計算例.

７月２２日の連絡：先週にも宣言したとおり，期末テストは以下の要領で行う．

- 日時・場所は通常の期末試験期間中に，教務課の掲示通りに行う．特に場所については通常の講義室と異なる可能性が非常に高いので，注意．
- 出題範囲はやったところ全部，だが，大体はレポート問題などに似たものになる予定．（特に，中間試験で冒険をしてしまったので，期末ではあまり冒険できない．）
- 中間試験と同じく，以下の要領で持ち込みを認める．
  - 持ち込めるものは A4 の大きさの紙の片側に自筆で書いたもの一枚のみ．裏側まで書いたり，コピーしたりしたものは無効である．
  - 持ち込んだ紙には名前と学生番号を書いて，答案用紙と共に提出すること．（持ち込み無しで試験を受けようと言う人も，白紙に名前と学生番号を書いて提出してください．）

なお，この講義ノートの最後に,「級数，留数，積分計算」などについての練習問題を載せるので，自習するなどして試験に備えて欲しい．今日の最終日を欠席した人は，この最後についている練習問題集で，大体どんなことをやったのか考えてください．

7　解析接続

講義時に宣言したとおり，この節の内容（解析接続）は，試験の範囲外であるから，興味のある人のみ読んでくれればよい．

7.1　解析接続とは

２つの領域 D_1, D_2 が共通領域 $D_1 \cap D_2$ を持っており，D_1, D_2 のそれぞれで定義された正則関数 f_1, f_2 があるとしよう．もし $D_1 \cap D_2$ で $f_1 \equiv f_2$ となっているとき，f_2 は f_1 の $D_2 \backslash D_1$ への解析接続であると言う．

この背後にある考えは以下の通り：「一致の定理」の主張は,「領域 D で定義された正則関数を決めるには，D 全体での f を知る必要はない．D の極一部分で知れば十分である」と言う物だった．今のように $D_1 \cap D_2$ で正則関数が定義できていれば，一致の定理によってこれを正則な関数に拡げていくことができる．特に，今のように D_1, D_2 で共に正則な関数があることが保証されているなら，その正則な関数は一意に定まる．つまり，この一意に定まる関数を D_1 から決まった D_2 での関数成分と考えるわけである．

以上の考えを更に拡張して,「ある領域 D とその上の正則関数が与えられたとき，上の意味で解析接続をできる限り繰り返して，できるだけ広い領域で正則な関数を作る」操作を考えよう．

7.2　どうしても解析接続できない（自然境界）の例

とはいえ，どうしても解析接続できない場合もある．つまり，ある閉曲線上に特異点が集中していて，そこから先に進めない場合だ（このような閉曲線を「自然境界」という）．いくつかの例を挙げておこう．

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{k^n} \qquad z \text{ の } (k^n) \text{ 乗，ただし } k \geq 2 \tag{7.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} \tag{7.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} \tag{7.3}$$

7.3 解析接続の例

具体的には冪級数からやることが多いので，具体例からやってみよう．

7.3.1 級数が複素平面で収束する場合

例 1：領域 $D \equiv \{z : |z| < 1/2\}$ で定義された関数

$$f_1(z) = z^2 + z + 1 \qquad (|z| < \frac{1}{2}) \tag{7.4}$$

の解析接続を考える．実はこれは多項式であるので,（多項式ではいつでも）複素平面全体への拡張を目の子で見つけることができる．つまり,

$$f_2(z) = z^2 + z + 1 \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{7.5}$$

が答えである．というのは，この「答え」は複素平面全体で正則であり，「一致の定理」によって，これ以外の可能性が否定されるからである[7].

例 2：領域 $D \equiv \{z : |z| < 1/2\}$ で定義された関数

$$g_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (|z| < \frac{1}{2}) \tag{7.6}$$

の解析接続は，やはり簡単で,

$$g_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{7.7}$$

である．この理由も，上の級数が全ての z で収束して正則関数を定義するため，一致の定理からこれ以外にはないことが言えるためである．この例 1 や例 2 のように，複素平面全体に一気に拡張できる関数はその定義式や冪展開からすぐにわかることが多い.

7.3.2 級数の和がとれて，特異点以外では正則になる場合

例 3：では，もう少し難しい物を考えていこう．領域 $D \equiv \{z : |z| < 1/2\}$ で定義された関数

$$h_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (|z| < \frac{1}{2}) \tag{7.8}$$

はどうだろうか？ここでは「ズルイ」方法を示す[8]：上の級数は $|z| < 1$ では収束しており，和をとると,

$$h_2(z) = \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < \frac{1}{2}) \tag{7.9}$$

となる．ところがこの右辺は $z \neq 1$ で正則な関数になっている．だから，一致の定理より，$|z| \neq 1$ への解析接続は $h_2(z) = \dfrac{1}{1-z}$ である．

7.3.3 級数の収束領域が限られている場合：対数関数の例

対数関数はなかなか面白い例なのだが，それなりに大変なので，小節を改めて扱うことにする．

---

[7]「一致の定理」の効用の一つは，正にこれである：見つけてきたものが唯一の解であることを保証する
[8]このような「ズルイ」方法が使えない場合は次の小節で扱う

7.4 対数関数とリーマン面

この最後の小節では上の対数関数を例にとって,「リーマン面」について述べる.

7.4.1 まずは対数関数の解析接続の計算例

まず，解析接続の例として，対数関数について計算してみる.

> 対数関数を扱うには，指数関数の逆関数とするのが一般的であるし，簡単でもある．しかし，ここでは「解析接続により関数を定義・拡張していく」との立場から，敢えてこのヤヤコシイ（でもアイディアとしては単純な）道を選ぶことにした．あまりこのような泥臭い方法を解説している本がないようなので，これも役に立つのではないかと考えたためである.
>
> なお，以下のお話は $\log z$ の微分（$= 1/z$）を主役に据えると簡単になるのであるが，これも少し「ズルイ」ので敢えて行わなかった — とは言っても，こっそり使っているんだけどね.

例 4：今までの例は結局，$f(z)$ の正則な形がすぐにわかるものばかりであった，そうではない，典型的な例をやってみよう．ここで初めて，関数を級数展開で定義することの利点が明らかになる.

実数 $x > 0$ に対する対数関数の定義は我々は知っているし，その $x = 1$ の周りでの冪級数展開

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \tag{7.10}$$

も知っている．この（実軸上で定義された）関数の（複素平面への）解析接続を見てみよう.

Step 1. この冪級数は $|z-1| < 1$ では絶対収束しているので，この範囲では冪級数で解析関数を定義できる．つまり，

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n} \qquad (|z-1| < 1). \tag{7.11}$$

Step 2. さて，$|z-1| > 1$ では上の級数は（各項が無限大になって）収束し得ない．そこで，適当な点を中心にした別の冪級数に乗り換えてやることを考える．$z = 7/4$ を中心にしてやってみよう．つまり，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - 7/4)^n \tag{7.12}$$

の形の関数が，$|z| < 1$ との共通領域では (7.11) と一致するように係数 a_n を決めたい．これは普通のテイラー展開であるから，

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} f(z) \Big|_{z=7/4} \tag{7.13}$$

となるはずである．ここで $z = 7/4$ の近傍では $f(z)$ の級数展開が (7.11) で与えられることを用いて計算すると，

$$a_0 = f(7/4) = \log(7/4) \tag{7.14}$$

$$a_1 = \frac{d}{dz} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{(z-1)^j}{j} \Big|_{z=7/4} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} (z-1)^{j-1} \Big|_{z=7/4} = \frac{1}{1+z-1} \Big|_{z=7/4} = \frac{1}{z} \Big|_{z=7/4} = \frac{4}{7} \tag{7.15}$$

この後は上の微分の表式 $1/z$ を用いると便利である：

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} f(z) \Big|_{z=7/4} = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{z} \Big|_{z=7/4} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{4}{7}\right)^n \tag{7.16}$$

$$\log z = \log(7/4) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{4}{7}\right)^n (z - 7/4)^n \tag{7.17}$$

と言う表式が得られた．この級数の収束半径は 7/4，つまりこの級数は $|z-7/4|<7/4$ の範囲で収束する．

Step 3. 更にこの級数を $z=3$ の周りで展開してみよう．上と同じように議論すると，

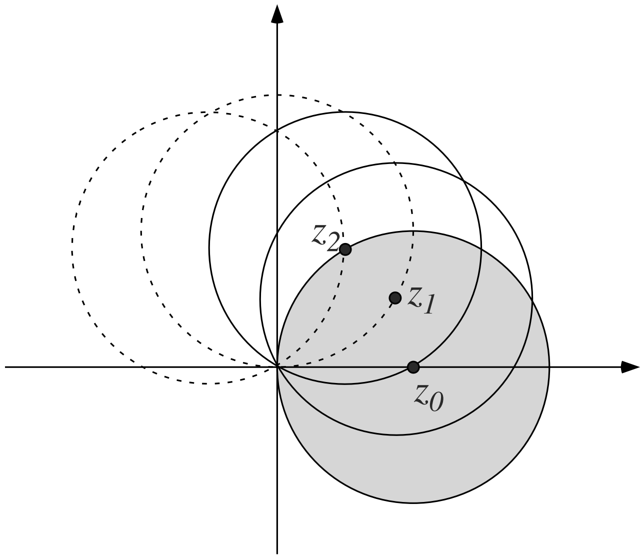
$$\log z = \log(3) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n (z-3)^n \tag{7.18}$$

を得る．更にこれを繰り返して，任意の $a>0$ の周りでの展開

$$\log z = \log(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{a}\right)^n (z-a)^n \qquad \Big[\equiv h_0(z)\Big] \tag{7.19}$$

をも得ることができる（後々のために，上の級数を $h_0(z)$ と書いた）．この最後の級数の収束半径は a であり，$|z-a|<a$ で絶対収束している（この収束域は下図の影を付けた円）．後々のために，$z_0=a$ と定義した．

これまで出てきた級数は，$\log x$ の解析接続を，それぞれの収束域で定義するものである．



Step 4. 上の表式から，いよいよ $\mathrm{Re} z<0$ の方へ行って見よう．出発点としては，$z=a$ の周りの展開を考えてみる（$a>0$ は固定）．まず，$z_1 \equiv \frac{1+i}{\sqrt{2}}a = e^{i\pi/6}a$ を考えると，$|z_1-a| = |e^{i\pi/6}-1|a < a$ なので，この点は (7.19) の収束域の中にある．そこで，この級数 $h_0(z)$ を $z=z_1$ を中心にして展開してみる．つまり

$$h_1(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} (z-z_1)^n \tag{7.20}$$

の形の級数で，共通の収束域の中では $h_0(z)$ に一致するものを探す．これはまたもやテイラー展開であるから，その係数は

$$a_n^{(1)} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} h_0(z)\Big|_{z=z_1} \tag{7.21}$$

で与えられるはずである．具体的に計算すると，

$$a_0^{(1)} = h_0(z_1) = \log(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{a}\right)^n (z_1-a)^n = \log(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(e^{i\pi/6}-1\right)^n \tag{7.22}$$

$$a_1^{(1)} = \frac{d}{dz} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{(z-a)^j}{j\,a^j}\Big|_{z=z_1} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{(z-a)^{j-1}}{a^j}\Big|_{z=z_1} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{z}{a}-1}\Big|_{z=z_1} = \frac{1}{z}\Big|_{z=z_1} = \frac{1}{z_1} \tag{7.23}$$

あれま，(7.15) と同じように，$h_0(z)$ の z での一階微分は $1/z$ であるとわかった．よって，この後はこの微分の表式 $1/z$ を用いて，(7.16) とおなじように，

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} f(z)\Big|_{z=z_1} = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \frac{1}{z}\Big|_{z=z_1} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{z_1}\right)^n, \tag{7.24}$$

$$h_1(z) = a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{z_1}\right)^n (z - z_1)^n \tag{7.25}$$

と言う表式が得られた．この級数の収束半径は $|z_1| = a$，つまりこの級数は $|z - z_1| < |z_1| = a$ の範囲で収束する（収束域は上の図の z_1 を中心にした円の内部．なお，$a_0^{(1)}$ は (7.22) の級数で与えられた数であるが，これは正に（いま解析接続しているところの）$\log z_1$ の値に他ならない．よって，$|z - z_1| < a$ に対して，表式[9]

$$\log z = h_1(z) = \text{“}\log z_1\text{”} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{z_1}\right)^n (z - z_1)^n \tag{7.26}$$

が得られた（“$\log z_1$” の表式は (7.22) の $a_0^{(1)}$ で与えられている）．

Step 5.

この精神で更に進む．今度は $z_2 = e^{i\pi/3}a$ を考えると，これは $h_1(z)$ の収束域に入っている．ので，z_2 を中心にした展開が[10]

$$\log z = h_2(z) = \text{“}\log z_2\text{”} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{z_2}\right)^n (z - z_2)^n \tag{7.27}$$

と得られる（収束域は $|z - z_2| < a$，先の図の z_2 中心の円の内部）．ここで

$$\text{“}\log z_2\text{”} = h_1(z_2) = \log z_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(e^{i\pi/6} - 1\right)^n \tag{7.28}$$

である．この後も同様に（先の図ではいくつかを点線でかいてある），

$$z_j \equiv e^{i\pi j/6} \qquad (j = 3, 4, 5, \dots) \tag{7.29}$$

の周りでの展開を順次作っていくと，$|z - z_j| < a$ での収束級数が[11]，

$$h_j(z) = \text{“}\log z_j\text{”} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{z_j}\right)^n (z - z_j)^n \tag{7.30}$$

$$\text{“}\log z_j\text{”} = h_{j-1}(z_j) = \text{“}\log z_{j-1}\text{”} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{z_j}{z_j} - 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(e^{i\pi/6} - 1\right)^n \tag{7.31}$$

の用に順次，作られていく．(この解釈は次の小節で)．たとえば $j = 6$ の展開は $-a$ を中心にした展開であるから，これで負の実軸の辺りでの対数関数が定義できたことになる．

7.4.2 “$\log a$” の値について

さて，これで一応，対数関数の解析接続が定義できて[12]，メデタシメデタシなのだが，よく見ると変なことに気づく．今，先ほどの解析接続を $j = 1, 2, 3, \dots, 12$ まで実行したとしよう．$z_{12} = a$ だから，これは出発点にした (7.19) と同じハズである．同じになっているだろうか？

一般の z の値を比べるのは後にして，$z = a$ での値を比べてみよう．出発点の $h_0(z)$ の方は普通の実数の対数で $\log a$ である．問題は $h_{12}(z)$ に出てくる “$\log z_{12}$” の方だが，これはその作り方から (7.31) の漸化式で定義されていたのものである．この漸化式を $j = 1, 2, \dots, 12$ に対して用いると，解析接続後の “$\log a$” が

$$\text{“}\log a\text{”} = h_{12}(a) = \log a + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (e^{i\pi/6} - 1)^n \tag{7.32}$$

---

[9] 次の小節で説明する理由から，単に $\log z_1$ と書く代わりに “$\log z_1$” と書いている

[10] 脚注 9 と同じ理由から，“$\log z_2$” と書いた

[11] 脚注 9 と同じ理由から，“$\log z_j$” と書いた

[12] より正確には，いまのところは原点の周りの有限の範囲でしか解析接続を作っていない．しかし，同様のことを行えば，原点を除く任意の領域に接続できることは明らかであろう

で与えられることがわかる．

どうも変だ．(7.32) の級数はゼロになりそうにない．この値は何なんだろう？

これを知るには，(7.32) の最後の級数の性質をもう少し知る必要がある．よく見ると，この級数は (7.11) の級数で $z = e^{i\pi/6}$ とおいたものになっていて，(7.11) の級数そのものは対数関数を定義していたのだった．さて，実数関数の時，対数関数は指数関数の逆関数だったから，$z = e^{i\pi/6}$ に対しても，やはり指数関数の逆関数だろうか？もしそうなら，(7.32) の最後の級数が $\frac{\pi}{6}$ と言えるのではないか？

この予想は実際に正しい．詳しくは以下の命題が成り立つ．

命題 7.1 (7.19) の級数 $h_0(z)$ は，以下に示す範囲で指数関数の逆関数になっている．すなわち，

$$\exp\bigl(h_0(z)\bigr) = z \qquad (|z-a| < a) \tag{7.33}$$

および

$$h_0(e^z) = z \qquad (|z| < \log(2a)\ ) \tag{7.34}$$

がなりたつ．

証明：

(7.33) の証明： $|z-a| < a$ では $h_0(z)$ を定義する級数は絶対収束しており，exp は全複素数に対して絶対収束しているから，$\exp\bigl(h_0(z)\bigr)$ を級数に展開して議論すればよい．正直，これは大変なのだが，$\exp\bigl(h_0(z)\bigr)$ を級数展開すると，恒等的に z に等しいことがわかる．これを手っ取り早く見るには（ちょっとズルイ気はするが），$a > 0$ に対しては exp と log が逆関数の関係にあること，つまり $\exp\bigl(h_0(a)\bigr) = a$ であること，を用いると良い．任意の正の実数 a について上の恒等式が成り立っているのだから，それを級数展開したものについてもそうだ，というわけ．

(7.34) の証明： こちらもやはり級数展開で証明するが，展開した級数の収束する範囲を見定めるのに注意が必要である．やはり正の実数 a については $h_0(e^a) = a$ なので， $h_0(e^z)$ を級数展開したものは z に等しいはずである．問題は，どのような z の範囲でこの級数展開が許されるかということだ．

実はこの辺りの議論を行うには，多重級数の順序交換を行う必要がある． 2 重級数の順序交換が出来る十分条件は多重級数が絶対収束していることである．さて，e^z を定義している級数は絶対値を考えると $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$ で押さえられる． $h_0(z)$ 自身は $|z-a| < a$ で絶対収束していたので，$h_0(e^z)$ に出てくる級数は $|e^{|z|} - a| < a$ なら絶対収束が保証される．この条件は $|z| \le \log(2a)$ と同値． □

と言うことで本題に戻る．上の命題から，(7.32) 右辺の級数の値は確かに $\frac{\pi}{6}$ であることがわかった．つまり，

$$\text{“}\log a\text{”} = \log a + 2\pi \tag{7.35}$$

となっている．解析接続して一周し，$z = a$ に戻ったつもりだったのに，$\log a$ の値が 2π ずれてしまった！

7.4.3 $\log z$ の多価性とリーマン面

解析接続して戻ったときに価がずれるのは $z = a$ だけではない． $h_{12}(z)$ と $h_0(z)$ の表式を比べると，この差は（収束域内の）他の z でも同様におこっていることがわかる．つまり，

$$h_{12}(z) = h_0(z) + 2\pi \qquad (|z-a| < a) \tag{7.36}$$

が成り立っているのである．

もう一回，やったことを整理しておこう．我々はまず，$z = a$ 中心の級数展開 h_0 (7.19) から出発した．そして，反時計回りに原点の周りを回って解析接続をしてきた．すると，丁度一周して戻ってきた $h_{12}(z)$ と $h_0(z)$ の間には 2π だけの差が出てしまった (7.36)，と言うわけ．

実はこのようなことはもっと一般に起こる．計算は省略するが，$h_{12}(z)$ から出発してもう一回反時計回りに回って解析接続すると，今度は $h_{24}(z)$ になるが，$h_{24}(z) = h_{12}(z) + 2\pi = h_0(z) + 4\pi$ が成り立つ．更に反時計回りに回り続けると，価が 2π づつ増えていく．一方 $h_{12}(z)$ から出発して時計回りに（今までと逆向き）に解析接続すると，今度は h_0 に戻るし，更に時計回りに回り続けると，-2π ずつ，価が下がっていく．

と言うわけで，$\log z$ を定義していくと，2π づつ価がずれたものが一般出てきて，必然的に多価関数になってしまった．つまり，$z = r\,e^{i\theta}$ （$r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$）と言うものの対数は

$$\log(z) = \log r + \theta + 2\pi n \qquad (n \text{ は任意の整数}) \tag{7.37}$$

となっている．これは「対数関数は指数関数の逆関数」と言うことからも理解できる．と言うのは，$z = r\,e^{i\theta}$ ($r > 0, \theta \in [0, 2\pi)$) が与えられた時，この z を $z = re^{(2n\pi+\theta)i}$ と表すことも出来るわけで，となれば $\log z = 2n\pi+\theta$ となるのもうなずける．

しかし，数学では多価関数と言うものは考えにくい．そこで，関数をあくまで一価にするために，土台になっている複素平面の方が何層にもなっていると考える．これを「リーマン面」と言う．実はこの辺り，図で説明しようかと思ったのだが，画才と時間がないので諦めた．ここらから先，興味のある人はいろいろな教科書や参考書を見てください．

> 不本意ながら時間切れで，対数関数については完全な解説が出来なかった．興味を持った人には，これまでの記述を受けた上で教科書などを読んでみることを強く奨める．

7.4.4　$z^{1/2} = \sqrt{z}$ の多価性とリーマン面

最後に例をもう一つ．$z^{1/2}$ を log と同じように解析接続すると，やはり多価性が現れる．ただし，今度は多価性は２価どまりで，つまり原点の周りに２周すると，元の価に戻ることがわかる．興味のある人は計算してみることをお奨めする．(ついでに：n を正の整数とするとき，$z^{1/n}$ ならば n 価になる.)

ちょっと尻切れトンボだが，これでオシマイ．時間の関係もあって，あまりきちんと書けなかったが，自習の足しになれば幸いである．あと，自習云々を離れても，

> $\log z$ や $z^{1/n}$ を扱う時には多価性に注意する必要がある，ことは将来，覚えて置いても損はないだろう．

A　レポートになれなかった問題達

宣言通り，期末テストに向けての勉強用に，いくつか問題を掲げる．ただし，以下に載せたのは「級数，留数」以降の問題のみである．これ以外に中間テストまでのレポート問題（「この関数は微分可能か？」「次の線積分の値を求めよ」など）はきちんと復習しておくこと．

なお，期末テストは９０分の試験だから，訊ける問題は限られている．以下の問題（５問）の内，本当に訊けるのは２～３問だろう（中間試験などの範囲からも出すからね）．この意味で,「折角勉強したのに出題されなかった」と言うものがいくつか出るのはやむを得ない．ただ，以下に掲げる問題の多くは，将来，役に立つと思われるので，もう講義で解説できないことをも念頭において，多めに出題した．

問１： 第３回レポート問題の問４の級数が絶対収束するような z の範囲を複素平面上に表せ.（要するに，収束半径を求めるだけでなく，その結果が何を意味するか，ということ）

問２： 以下の z の関数を（それぞれ以下に与える）α を中心にして z の冪級数に展開せよ．つまり，$f(z)=\sum_{n=\cdots}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ の形に表せ（ここで n の下限は，Laurent 展開の場合は負の数になる）．また，それぞれの級数の収束半径を求めよ．

1. $f(z)=z^3$ を $\alpha=0$ を中心にして．
2. $f(z)=z^3$ を $\alpha=2$ を中心にして．
3. $f(z)=\dfrac{z+4}{z^2+1}$ を $\alpha=0$ を中心にして．
4. $f(z)=\dfrac{z+4}{z^2+1}$ を $\alpha=i$ を中心にして．

問３： 以下の関数に極はあるか，あるなら何位の極か？また，極があるものについては，その極での留数も求めよ．

$$\text{(i)}\quad f(z)=z^4+3z^2 \qquad \text{(ii)}\quad f(z)=\frac{z^3}{z^2+1} \qquad \text{(iii)}\quad f(z)=\frac{z^2}{(z^2+3)^2}$$

問４： （基本的な留数計算の問題）中間試験の問４を,「留数計算」を用いてやり直してみよ．同じノリで，以下の線積分の値も求めてみよう．以下では γ_r を原点を中心とする半径 r の円（反時計回り）とする．

$$\text{(i)}\quad \int_{\gamma_1}\frac{e^z}{z^2+2}dz \qquad \text{(ii)}\quad \int_{\gamma_3}\frac{e^z}{z^2+2}dz \qquad \text{(iii)}\quad \int_{\gamma_3}\frac{z^2}{z^2+3z+2}dz \qquad \text{(iv)}\quad \int_{\gamma_4}\frac{e^z}{(z^2-4)^2}dz$$

問５： （積分路を付け足したり，変形したりする積分の例）以下の積分の値を求めよ．以下の積分は全て，x が $-\infty$ から ∞ に変わる時の積分である．また，a は正の定数とする．

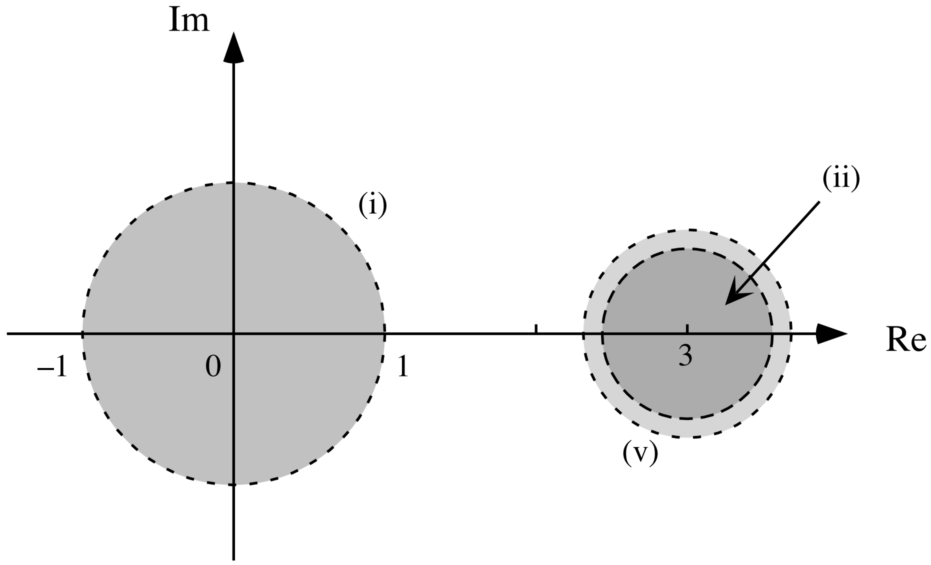
$$\text{(i)}\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2iax}dx \qquad \text{(ii)}\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iax}}{x^2+3}dx \qquad \text{(iii)}\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{(x^2+3)^2}dx$$

上の問題の略解は８月の初め頃までに作成して，僕の web page で公開すると共に，僕の部屋の前にも印刷したものを置いておく予定．自習に利用して欲しい．略解が出来たかどうかは，まずは僕の web page（http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hara/lectures/CA02.html）で確認してもらうのが一番だと思う．

B　レポートになれなかった問題達の略解

以下に略解を掲げる．かなりの時間と注意を払って作ったが，間違いが紛れ込んでいる可能性は否定できない．「この解はおかしいんとちゃうか」と言う人は遠慮なく問い合わせて欲しい．(ただし，間違っていると言ってもショウモナイ計算ミスくらいで，問題を解く方針まで間違っているとは思いませんが…)

問 1： 要するに，収束域を複素平面で表せばよい．収束半径は第 3 回レポートの後で解説したから，答の図のみを載せる．ただし，(iv) は収束半径が無限大なので複素平面全体，また，(iii) は収束半径がゼロなので，$z = 2$ のみである．これ以外のものを下図に示す．図では影を付けた円内が収束域になっている．



問 2： どんな方法ででも，この形に表せばよい．まあ，見ただけで出来るものばかりなので，ともかくやってみる．

1. z^2 はこのままで求める形になっている．これは複素平面全体で定義できているから，収束半径は無限大.

2. $z^2 = (z-2+2)^2 = (z-2)^2 + 4(z-2) + 4$ となる．これも複素平面全体で定義できているから，収束半径は無限大.

3. $z = 0$ ではこの関数は正則だから，Laurent 展開にはならない．単に

$$\frac{1}{z^2+1} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \cdots \tag{B.1}$$

に $(z+4)$ をかけて，

$$\frac{z+4}{z^2+1} = 4 + z - 4z^2 - z^3 + 4z^4 + z^5 - 4z^6 - z^7 + \ldots \tag{B.2}$$

となる．一般形をきちんと書くと，

$$\frac{z+4}{z^2+1} = (4+z)\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\bigl\{4z^{2n} + z^{2n+1}\bigr\} \tag{B.3}$$

収束半径は root test などをもちいると，丁度 1 であることがわかる．(要するにアヤシイのは (B.1) の級数だけども，これは公比が $-z^2$ の等比級数だから $|-z^2| < 1$，つまり $|z| < 1$ で収束するわけ.)（余談）なお，収束半径が 1 になっているのは，$z = \pm i$ に特異点があって，ここを超えて級数が収束することが出来ないからである．

4. $z = i$ が特異点になっているから，Laurent 展開が必要になる．わかりやすくするために $z - i = y$ とおいて，y で書き直す.

$$\frac{z+4}{z^2+1} = \frac{z+4}{(z+i)(z-i)} = \frac{y+i+4}{y(y+2i)} = \Bigl(1 + \frac{4+i}{y}\Bigr) \times \frac{1}{y+2i} \tag{B.4}$$

ここで最後の部分を (B.1) の様に展開すると

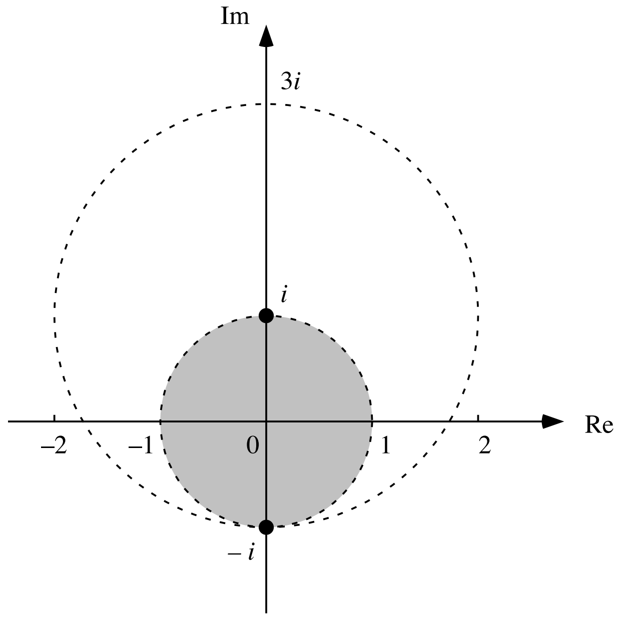
$$\frac{1}{y+2i} = \frac{1}{2i} \times \Bigl(1 + \frac{y}{2i}\Bigr)^{-1} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Bigl(\frac{y}{2i}\Bigr)^n = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\frac{iy}{2}\Bigr)^n \tag{B.5}$$

となるので，結局

$$\begin{aligned} \frac{z+4}{z^2+1} &= \bigl(1 + \frac{4+i}{y}\bigr) \times \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(\frac{iy}{2}\Bigr)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl[\frac{1}{2i} \Bigl(\frac{i}{2}\Bigr)^n y^n + \frac{4+i}{2i} \Bigl(\frac{i}{2}\Bigr)^n y^{n-1} \Bigr] \\ &= \frac{4+i}{2i} \frac{1}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty} \Bigl(1 - \frac{i}{4}\Bigr) \Bigl(\frac{i}{2}\Bigr)^n (z-i)^n \end{aligned} \tag{B.6}$$

が得られた.（ちょっと大変でしたね.）収束半径は正の冪の部分で決まって，2 である.

（余談）収束半径が 2 であるのも，極の分布から理解できる．この場合，$z = \pm i$ が極なので，$z = i$ を中心にした展開は絶対に $z = -i$ を超えられない．しかし $z = -i$ にぶつかるまでは正則なのだから，この級数でかけるはずである．つまり，半径は 2 である．この辺りの状況については以下の図を参照．図では，小さな円が 3 の級数の収束円を，また大きな円が 4 の Laurent 級数の収束円を表している．



これで大体良いのですが，一応，念のために，定理 6.1 を使って 4 をやってみよう．まず，$z = i$ が一位の極であることは確認しておこう.（だから，級数の展開係数としては $a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$ しか出ない．展開係数 a_{-1} は留数であるから

$$a_{-1} = \lim_{z\to i} (z-i) f(z) = \lim_{z\to i} \frac{z+4}{z+i} = \frac{4+i}{2i} \tag{B.7}$$

となって，上に一致している．$n \geq 0$ に対しては (6.8) から

$$a_n = \int_{|z-i|=1/2} \frac{f(z)}{(z-i)^{n+1}} \frac{dz}{2\pi i} = \int_{|z-i|=1/2} \frac{z+4}{z^2+1} \frac{1}{(z-i)^{n+1}} \frac{dz}{2\pi i} = \int_{|z-i|=1/2} \frac{z+4}{z+i} (z-i)^{-(n+2)} \frac{dz}{2\pi i} \tag{B.8}$$

この最後の積分をやるのはなかなか大変なのだが，以下に一例を示す（これくらいヤヤコシイのは絶対試験には出さないから安心してくれ）．まず，$z - i = \frac{1}{2} e^{i\theta}$ と変数変換すると，

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{|z-i|=1/2} \frac{z+4}{z+i} (z-i)^{-(n+2)} \frac{dz}{2\pi i} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2} e^{i\theta} + i + 4}{\frac{1}{2} e^{i\theta} + 2i} 2^{n+2}\, e^{-i(n+2)\theta}\, \frac{i}{2}\, e^{i\theta} \frac{d\theta}{2\pi i} \\ &= \frac{2^{n+2}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta} + 8 + 2i}{e^{i\theta} + 4i} \right) e^{-i(n+1)\theta} d\theta \end{aligned} \tag{B.9}$$

となる．これではまだよくわからんので $e^{-\theta} = y$ とおいてみると，今度は

$$= \frac{2^{n+2}}{4\pi} \times \int \frac{\frac{1}{y} + 8 + 2i}{\frac{1}{y} + 4i} y^n \, i \, dy = \frac{2^{n+2} \, i}{4\pi} \int \frac{1 + (8+2i)y}{1 + 4iy} y^n \, dy \tag{B.10}$$

となる．ここで注意すべきは y の積分は半径 1 の円に沿って行うが，その向きは時計回りであること．これは $y = e^{-\theta}$ の定義に従って，θ が増えると共に y がどのように動くかを考えると納得できよう．さて，非積分関数は $|y| \le 1$ で唯一 $y = \frac{i}{4}$ に一位の極をもつから，留数定理が使える：

$$= \frac{2^{n+2} \, i}{4\pi} \times (-2\pi i) \times (y = \tfrac{i}{4} \text{ での留数}) = 2^{n+1} \times \frac{1+4i}{8i} \Bigl(\frac{i}{4}\Bigr)^n = \Bigl(1 - \frac{i}{4}\Bigr) \Bigl(\frac{i}{2}\Bigr)^n \tag{B.11}$$

となって，勿論，答は (B.6) に一致した．(いやあ，なかなか大変だったな.)

（余談）上では e^{θ} を経由して（発見法的に）2 段階で変数変換したが，z から y へ一気に変換することも勿論可能である．なお，円周上の積分が出てきた場合，このように苦し紛れに変換していくと出来ることは多々ある．

問 3：

(i) これは多項式だから，複素平面全体で正則．極なんて無いよ！

(ii) 分母，分子別々には多項式だから正則なので，ヤバイ所があるとすれば分母がゼロになるところだ．これは $z = \pm i$ だね．実際，ここでは関数の価が無限大だから特異点になっている．

さて，何位の極かと言うことだが，Laurent 展開が出来たとして考えてみると，α が k-位の極なら

$$\lim_{z \to \alpha} f(z)(z-\alpha)^k \text{ は有界,} \qquad \text{でも } \lim_{z \to \alpha} f(z)(z-\alpha)^{k-1} \text{ は発散} \tag{B.12}$$

しているはずである（Laurent 展開の式に $(z-\alpha)^k$ などをかけて納得せよ）．この判定法を使ってみよう．

今の場合，すぐに

$$\lim_{z \to i} \frac{z^3}{z^2+1} \text{ は発散,} \qquad \lim_{z \to i} (z-i) \frac{z^3}{z^2+1} = \lim_{z \to i} \frac{z^3}{z+i} = \frac{i^3}{2i} = -\frac{1}{2} \tag{B.13}$$

がわかるので，$z = i$ は一位の極．また，上の極限は留数の計算公式そのものだから，$z = i$ での留数は $-\frac{1}{2}$，と結論できる．

$z = -i$ も同様にして，

$$\lim_{z \to -i} \frac{z^3}{z^2+1} \text{ は発散,} \qquad \lim_{z \to -i} (z+i) \frac{z^3}{z^2+1} = \lim_{z \to -i} \frac{z^3}{z-i} = \frac{(-i)^3}{-2i} = -\frac{1}{2} \tag{B.14}$$

がわかるので，$z = -i$ は一位の極で，留数は $-\frac{1}{2}$，と結論できる．

(iii) 同様に進む．ヤバイのは分母がゼロになる $z = \pm\sqrt{3}\,i$ である．何位の極かをみるために上の判定法を使うと，

$$\lim_{z \to \sqrt{3}\,i} (z - \sqrt{3}\,i) \frac{z^2}{(z^2+3)^2} \text{ は発散,} \qquad \lim_{z \to \sqrt{3}\,i} (z - \sqrt{3}\,i)^2 \frac{z^2}{(z^2+3)^2} = \lim_{z \to \sqrt{3}\,i} \frac{z^2}{(z+\sqrt{3}\,i)^2} = \frac{-3}{2\sqrt{3}\,i} \tag{B.15}$$

となるので，$z = \sqrt{3}\,i$ は 2 位の極だとわかる．ここでの留数はやはり公式から，

$$\lim_{z \to \sqrt{3}\,i} \frac{d}{dz} \left[(z - \sqrt{3}\,i)^2 \frac{z^2}{(z^2+3)^2} \right] = \lim_{z \to \sqrt{3}\,i} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z+\sqrt{3}\,i)^2} \right] = \text{（計算は略）} = -\frac{\sqrt{3}}{12} i \tag{B.16}$$

とわかる．

同様に $z = -\sqrt{3}\,i$ は 2 位の極で，そこでの留数は $\frac{\sqrt{3}}{12} i$ だとわかる．

問 4： 中間試験の問題は既に答を与えてあるから，「留数」を使ってやり直すことで，同じ答になることを，各自チェックして欲しい．新たに与えた問題のみ，略解を与える．(非積分関数を $f(z)$ と書く.)

(i) 非積分関数は積分路 γ_1 の中では正則である（なぜなら，分母，分子はいつでも正則で，かつ，分母もゼロにならない）．よって，留数など持ち出さなくても，Cauchy の積分定理から，積分の値はゼロ．

(ii) 今度は γ_3 の中に２つの特異点 $z = \pm\sqrt{2}\,i$ があるので，それぞれの点での留数の和（の $2\pi i$ 倍）になるはず．そこで，ともかく留数を計算しよう．問３と同じように考えるとどちらも１位の極であることがわかるので

$$\mathrm{Res}(f; z = \sqrt{2}\,i) = \lim_{z\to\sqrt{2}\,i} (z - \sqrt{2}\,i) f(z) = \lim_{z\to\sqrt{2}\,i} \frac{e^z}{z + \sqrt{2}\,i} = \frac{e^{\sqrt{2}\,i}}{2\sqrt{2}\,i} \tag{B.17}$$

同様に，

$$\mathrm{Res}(f; z = -\sqrt{2}\,i) = \lim_{z\to-\sqrt{2}\,i} (z + \sqrt{2}\,i) f(z) = \lim_{z\to-\sqrt{2}\,i} \frac{e^z}{z - \sqrt{2}\,i} = \frac{e^{-\sqrt{2}\,i}}{-2\sqrt{2}\,i} \tag{B.18}$$

が得られる．よって，

$$(\text{積分値}) = 2\pi\,i \times \left[\frac{e^{\sqrt{2}\,i}}{2\sqrt{2}\,i} + \frac{e^{-\sqrt{2}\,i}}{-2\sqrt{2}\,i}\right] = i\pi\sqrt{2}\,\sin\bigl(\sqrt{2}\bigr) \tag{B.19}$$

(iii) これも (ii) とほとんど同じ．今度は $z = -1, -2$ が一位の極で，留数はそれぞれ

$$\mathrm{Res}(f; z = -1) = 1, \qquad \mathrm{Res}(f; z = -2) = -4$$

である．この２つの極は全て積分路の中にあるから，

$$(\text{積分値}) = 2\pi\,i \times \bigl[1 + (-4)\bigr] = -6\pi\,i \tag{B.20}$$

(iv) これもほとんど同じだが，$z = \pm 2$ が２位の極であることだけが上と違う．やはり計算すると，

$$\mathrm{Res}(f; z = 2) = \frac{e^2}{32}, \qquad \mathrm{Res}(f; z = -2) = \frac{3\,e^{-2}}{32}$$

となるので，

$$(\text{積分値}) = 2\pi\,i \times \bigl[\frac{e^2}{32} + \frac{3\,e^{-2}}{32}\bigr] = \frac{\pi i}{16}\bigl(e^2 + 3e^{-2}\bigr) \tag{B.21}$$

注意：上の問題では全部の極が積分路の中にあり，従って，全ての極での留数を足し会わせることで答が得られた．しかし，一般には全ての特異点が積分路の中にあるとは限らない．そのような場合には，積分路の中に入っている極の留数だけを集めるのである（そのような例は中間テストの問４）．この点は講義でも注意したと思うが，もう一回，注意しておく．

もう一つの注意：この問題はみんな積分路が反時計回りにとってあるが，積分の値はもちろん，積分路の向きに依存する．積分路が時計回りならマイナス符号がつくことに再度注意しておこう．

問５：

問５の問題は，いずれも積分路を付け加えたり変形したりする必要があります．講義でも少し説明しましたが，時間切れの観もあったので，少し丁寧に説明します．

(i) まず指数の肩を平方完成して

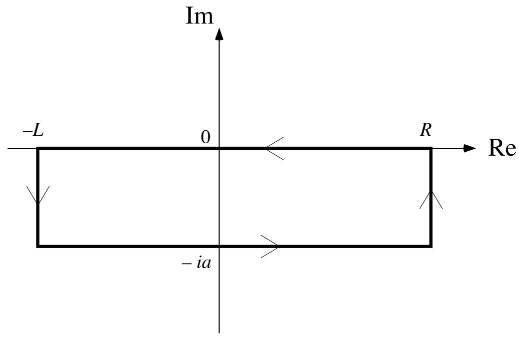
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2iax} dx = e^{-a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-ia)^2} dx \tag{B.22}$$

となるので，この後ろの積分に注目する．これは広義積分の定義から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-ia)^2} dx = \lim_{\substack{R\to\infty \\ L\to\infty}} \int_{-L}^{R} e^{-(x-ia)^2} dx = \lim_{\substack{R\to\infty \\ L\to\infty}} \int_{-L-ia}^{R-ia} e^{-z^2} dz \tag{B.23}$$

と解釈すべきである．最後の積分は $x-ia=z$ と変数変換した結果で，$-L-ia$ と $R-ia$ をつなぐ線分での線積分を表している．

我々はこれを実軸上の線積分になおしたい．そのために，下図のような長方形の積分路を考える．非積分関数 e^{-z^2} はこの積分路の周囲と内部で（実のところ全複素平面で）正則だから，この積分路に関する積分の値はゼロである．以下，この積分路での積分を長方形の４つの辺での積分に分解していく．



まず，長方形の下の辺での積分は上で出てきた $\displaystyle\int_{-L-ia}^{R-ia} e^{-z^2}dz$ に他ならない．上の辺での積分は

$$\int_R^{-L} e^{-z^2}dz = -\int_{-L}^{R} e^{-x^2}dx \tag{B.24}$$

である．右の辺での積分は（$z=R+it$，t は $-a$ から 0 と変わる）

$$\int_{-a}^{0} e^{-(R+it)^2}\, i\, dt \tag{B.25}$$

同様に左の辺では（$z=-L+it$，t は 0 から $-a$ と変わる）

$$\int_{0}^{-a} e^{-(-L+it)^2}\, i\, dt \tag{B.26}$$

となる．この４つの和がゼロなのだから，

$$\int_{-L-ia}^{R-ia} e^{-z^2}dz = \int_R^{-L} e^{-z^2}dz = \int_{-L}^{R} e^{-x^2}dx - \int_{-a}^{0}\Bigl(e^{-(R+it)^2} - e^{-(-L+it)^2}\Bigr)\, i\, dt \tag{B.27}$$

が得られた．第一項は $\lim_{\substack{R\to\infty\\ L\to\infty}}$ の下では普通のガウス積分になる．問題は第２項であるが，以下では上の極限の下で第２項がゼロになることを示す．

第２項には２つあるが，どっちも似たようなものなので，$\displaystyle\int_{-a}^{0} e^{-(R+it)^2}\, i\, dt$ だけやる．指数関数の肩を展開すると

$$\int_{-a}^{0} e^{-(R+it)^2}\, i\, dt = i\int_{-a}^{0} e^{-R^2+t^2-2iRt}dt = i\int_{-a}^{0} e^{-R^2+t^2}\, e^{-2iRt}dt \tag{B.28}$$

であるが，Rt が実数の時には $|e^{-2iRt}|=1$ であるので，

$$\Bigl|\int_{-a}^{0} e^{-(R+it)^2}\, i\, dt\Bigr| \le \int_{-a}^{0}\bigl|\, e^{-R^2+t^2}\, e^{-2iRt}\,\bigr|dt = \int_{-a}^{0}\ e^{-R^2+t^2}\, dt \tag{B.29}$$

となる．上では $a<b$ の時に，

$$\Bigl|\int_a^b f(x)dx\Bigr| \le \int_a^b |f(x)|dx \tag{B.30}$$

であることを用いた．さて，(B.29) は，考えている t の範囲では $e^{-R^2+t^2} \le e^{-R^2+a^2}$ であることを用いると，

$$\Bigl|\int_{-a}^{0} e^{-(R+it)^2}\, i\, dt\Bigr| \le \int_{-a}^{0} e^{-R^2+a^2}\, dt = a\, e^{-R^2+a^2} \tag{B.31}$$

と押さえられる．これは確かに $R \to \infty$ でゼロに行く．よって (B.23) と (B.27) から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-ia)^2} dx = \lim_{\substack{R\to\infty \\ L\to\infty}} \int_{-L-ia}^{R-ia} e^{-z^2} dz = \lim_{\substack{R\to\infty \\ L\to\infty}} \int_{-L}^{R} e^{-x^2} dx - \lim_{\substack{R\to\infty \\ L\to\infty}} \int_{-a}^{0} \Bigl(e^{-(R+it)^2} - e^{-(-L+it)^2}\Bigr)\, i\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx - 0 = \sqrt{\pi} \tag{B.32}$$

が得られた．よって，(B.22) から

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2iax} dx = e^{-a^2}\sqrt{\pi} \tag{B.33}$$

が最終結果として得られた．

(ii) まず，広義積分の定義から

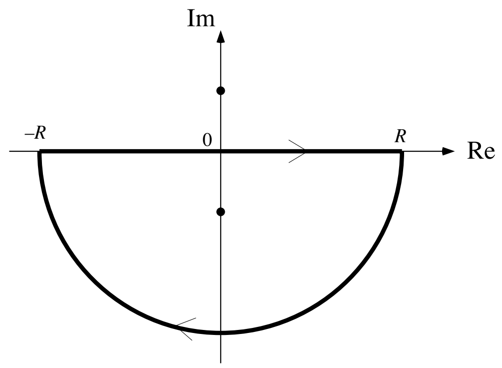
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2+3} dx = \lim_{\substack{R\to\infty \\ L\to\infty}} \int_{-L}^{R} \frac{e^{-iax}}{x^2+3} dx \tag{B.34}$$

である．本来ならば R, L は独立に無限大に送るべきものであるが，上の積分は絶対収束しているので，結果的に $L = R$ として無限大にしたものと同じである．そこで以下では

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2+3} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-iax}}{x^2+3} dx \tag{B.35}$$

の右辺の積分を求めよう．

そのために，下図のような積分路 γ についての $\dfrac{e^{-iaz}}{z^2+3}$ の積分を考える．



積分路が実軸の下側を廻っている理由はあとでわかる．この積分路の周囲と内部では，非積分関数は一つだけ，$z = -\sqrt{3}i$ に特異点（一位の極）を持っているので，この積分の値は

$$\int_{\gamma} \frac{e^{-iaz}}{z^2+3} dz = -2\pi i \times (z = -\sqrt{3}i \text{ での留数}) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}\,a} \tag{B.36}$$

となるはずである（留数の前にマイナスがついたのは，積分路が時計回りになっているから）．

一方，(i) でやったようにこの積分を半円と実軸上の積分に分解すると，実軸上の積分はモロに (B.35) の右辺に出ているものである．一方，半円での積分は （$z = Re^{i\theta}$，θ は 2π から π まで変わる）

$$\int_{2\pi}^{\pi} \frac{\exp(-iaR\,e^{i\theta})}{R^2\,e^{2i\theta}+3} iRe^{i\theta} d\theta \tag{B.37}$$

となるので，これらを併せて

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{-iax}}{x^2+3} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}\,a} - \int_{2\pi}^{\pi} \frac{\exp(-iaR\,e^{i\theta})}{R^2\,e^{2i\theta}+3} iRe^{i\theta} d\theta \tag{B.38}$$

が得られた．

さて，以下では (i) と同じように，(B.38) の右辺第２項が $R \to \infty$ でゼロに行くことを示そう．やはり絶対値をとると

$$\Bigl|\int_{2\pi}^{\pi} \frac{\exp(-iaR\,e^{i\theta})}{R^2\,e^{2i\theta}+3} iRe^{i\theta}\,d\theta\Bigr| \le \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\,\exp(-iaR\,e^{i\theta})\,|}{|\,R^2\,e^{2i\theta}+3\,|} R\,d\theta \tag{B.39}$$

となる．ここで分母の絶対値については（$|a+b| \ge |a|-|b|$）

$$\bigl|\,R^2\,e^{2i\theta}+3\,\bigr| \ge \bigl|\,R^2\,e^{2i\theta}\,\bigr| - 3 = R^2 - 3, \tag{B.40}$$

また分子については

$$\exp(-iaR\,e^{i\theta}) = \exp\bigl(-iaR\,\cos\theta + aR\,\sin\theta\bigr) = e^{aR\,\sin\theta}\,e^{-iaR\,\cos\theta} \tag{B.41}$$

であることから，

$$\bigl|\exp(-iaR\,e^{i\theta})\bigr| = e^{aR\,\sin\theta} \tag{B.42}$$

とわかる．従って，(B.39) は

$$\Bigl|\int_{2\pi}^{\pi} \frac{\exp(-iaR\,e^{i\theta})}{R^2\,e^{2i\theta}+3} iRe^{i\theta}\,d\theta\Bigr| \le R\int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{aR\,\sin\theta}}{R^2-3} d\theta \tag{B.43}$$

となる．ところが，積分する θ の範囲では $\sin\theta \le 0$ であるので，$e^{aR\,\sin\theta} \le 1$ である．従って，

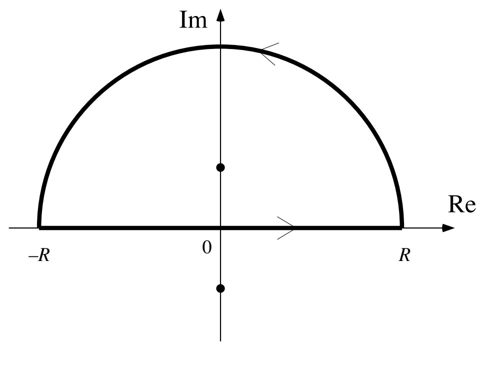
$$\le R \times \frac{\pi}{R^2-3} = \frac{\pi\,R}{R^2-3} \qquad (\to 0 \quad \text{as} \quad R \to \infty) \tag{B.44}$$

であることがわかる[13]．

よって，最終的に

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iax}}{x^2+3} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-iax}}{x^2+3} dx = -2\pi i \times (z = -\sqrt{3}i \text{ での留数}) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}\,a} \tag{B.45}$$

と言う答になる．



(iii) 基本的には (ii) と同じである．違いは今度は積分路を上の図のように，実軸の上を廻るものをとること．(ii) と同じように議論すると，やはり半円の部分の寄与はゼロになることがわかって[14]，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{(x^2+3)^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{iax}}{(x^2+3)^2} dx = 2\pi i \times (z = +\sqrt{3}i \text{ での留数}) = \frac{\pi}{6}\Bigl(a + \frac{1}{\sqrt{3}}\Bigr) e^{-\sqrt{3}\,a} \tag{B.46}$$

となる．最後の所では $z = \sqrt{3}i$ が２位の極であることに注意して，留数を計算した．

[13] これが積分路を実軸の下側にとった理由である．もし実軸の上側を廻していたら，$\sin\theta > 0$ であるので，$e^{aR\,\sin\theta}$ は R の指数関数くらいの大きさを持つ．となると，いくら分母に $R^2 - 3$ などがあってもこの指数関数を殺すことはできず，半円からの寄与はゼロにならない

[14] (ii) と同じく，これは半円部分からの寄与がゼロになるようにとった．今回は実軸の下を廻すと半円からの寄与がゼロにならない

この (ii) や (iii) では積分路をどうとるか（特に実軸の上を廻すか下を廻すか）が非常に大事である — これによって，どの極の留数を拾うかが決まる．どちらを廻すか自身は，廻した積分路の寄与がゼロになるように決めることが多い．訳もわからずに憶え込むのではなく，このようにとればうまく行く理由を理解して欲しい．
ただし，(ii) や (iii) はかなり厄介だから期末テストで訊くかどうかは定かではない．訊いたとしても一問だけで，ボーナス気味であろう．(ii) や (iii) を気にする前に，まずは基本の問４のような問題を確実に解けるようになって欲しい．