

数理物理学特論 II レポート問題

(原 隆：名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

上記講義のレポート問題を作成しました。

レポート問題(この用紙)の入手方法(以下のいずれか)

1. 講義最終日(6月15日)直接入手する。
2. 原あてに e-mail で請求する(hara@math.nagoya-u.ac.jp): L^AT_EX file をお送りします。
3. 原の web page (http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html の下) から L^AT_EX file, または pdf file を持って行く。

レポートの提出期限, 方法(以下のいずれか; 物理的に提出する場合は出来るだけ A4 の大きさでお願いいたします)

1. 東工大大学院理工学研究科数学専攻・志賀徳造教授に提出(期限 9月14日)。志賀先生がまとめて原まで送って下さいます。
2. 原宛にレポートの L^AT_EX file (T_EX の方言なら, L^AT_EX に限らず大体なんでも O.K.) を e-mail で送る(hara@math.nagoya-u.ac.jp)。期限は 9月20日の 23:59 まで(E-mail で受け取った人には原からその旨 e-mail で返事します。不安な人は確認して下さい。)

問題

くりこみ変換を実際に手を動かして味わってもらおうと言うのが狙いです。講義の時にも強調したように, くりこみ変換を実際に意味のあるモデルで遂行するのはなかなか大変です。そこで, 実際のモデルのくりこみ変換をある程度忠実に再現しているだろうと思われる, *Hierarchical Model* を用い, このモデルでのくりこみ変換の漸化式の導出とその解析を行うことにしました。

Hierarchical Model と言うのはスピン間の相互作用を特殊な長距離力の形に取ることにより, くりこみ変換が非常に簡単な形になるように工夫した人工的なモデルです。くりこみ変換は, 一変数関数 h から h' への写像として書けます:

$$h'(\varphi) = \mathcal{N} \exp\left(\frac{\beta}{2}\varphi^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} dz h\left(\frac{\varphi}{\sqrt{c}} + z\right) h\left(\frac{\varphi}{\sqrt{c}} - z\right) \quad (1)$$

ここで

$$c \equiv 2^{1-2/d}, \quad \beta \equiv \frac{1}{c} - \frac{1}{2}, \quad d > 2 \text{ は定数} \quad (2)$$

であり, \mathcal{N} は $h'(0) = 1$ となるようにとる規格化定数。この $h(\varphi)$ とは, ハミルトニアンポテンシャル部分 V と大体 $h(\varphi) \equiv e^{-V(\varphi)}$ の関係にあるものです(詳細は [3, 4] を参照)。ともかく, このような背景には深入りせず, (1) で与えられた変換の性質を調べてみましょう。

以下の小問につき, 出来る範囲で取り組んで解答して下さい。

1. まず, $h(\varphi) = e^{-\varphi^2/4}$ が, (1) の 不動点 になっていることを確認してください。
2. 次に, この不動点の 安定性 を議論します。まず,

$$h(\varphi) = \exp\left\{-\frac{\varphi^2}{4} - V(\varphi)\right\}, \quad h'(\varphi) = \exp\left\{-\frac{\varphi^2}{4} - V'(\varphi)\right\}, \quad (3)$$

と書き, 不動点からのズレを $V(\varphi)$ で表します。(1) で与えられる変換を V, V' の一次までとって近似することにより, V から V' への 線形変換 として表して下さい。これは数学的には「(1) の変換の, この不動点での接写像」を求めたことになっています。

3. 上で求めた V から V' の変換の 固有ベクトル を求めて下さい。つまり、 $V'(\varphi) = \alpha V(\varphi)$ となるような α (固有値) と V (固有ベクトル) を求めて下さい。
ヒント：この場合、固有値、固有ベクトル共に無限個あるので、全部を求めるのは不可能ではないですが少し大変です。そこで、 $V(\varphi)$ が φ の 2 次式や 4 次式の場合から始めて、いくつか求めるだけでもまあ、よしとしましょう。
4. さて、固有値 (の絶対値) が 1 より大きいと言うことは、この不動点から離れて行く固有摂動があることを意味し、不動点の不安定性につながります。上で求めた固有値や固有ベクトルは当然、 d の値に依存しますが、どのような d の時に、何本、不安定な固有ベクトルがあるか、議論してください。

問題おわり

注

- (1) の変換は $d = \infty$ の場合 (つまり $c = 2$ の場合) には、中心極限定理に相当します。
- Hierarchical model にはいくつかの version があり、また同じモデルでもどの部分を $h(\varphi)$ と書くかで見かけが異なってきます。実際、上で採用した書き方は [4] での書き方と異なっていますが、上での h と [4] での f は、 $h(\varphi) = f(\varphi) e^{-\varphi^2/4}$ の関係にあります。

お知らせ

今回の「講義ノート」は非常に未完成な状態にあります (自筆のノートはかなり完成しているが、まだ打ち込んでいない)。しかし、未完成でもないよりはマシかもしれない、との立場から、web page に掲載することにしました。未完成で時にはウソも載ってるかも知れない、ことをご理解の上、自己責任でご利用下さい。

また、講義中にあまり文献を紹介できなかったので、このレポートの最後、および web page に掲載予定の「未完成講義ノート」に載せておきます。くりこみ群全般には、以下の [1, 2] がお奨めで、特にこの講義には [1] の田崎さんの書いたところが参考になるでしょう。

参考文献

- [1] H. Ezawa, M. Suzuki, H. Tasaki, and Watanabe. くりこみ群の方法. 岩波, 東京, (1994). 現代の物理学 13.
- [2] N.D. Goldenfeld. *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*. Addison-Wesley, (1992).
- [3] Ja G.Sinai. *Theory of Phase Transitions: Rigorous Results*, Pergamon (1982).
- [4] T. Hara. 厳密なくりこみ群入門 In くりこみ理論の地平, 数理科学 1997 年 4 月号.