

数理物理学特論 レポート問題

(原 隆：名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

大変お待たせしました。漸く、第3回のレポート問題を作成しましたのでお知らせします。

レポート問題(この用紙)の入手方法(以下のいずれか：これで問題のある場合はメールでお知らせ下さい。善処します。)

1. 原の部屋(理1-508)の前のポスト(の中の封筒)から持っていく。

2. 原の web page (<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html> の下「数理物理学特論」のページ)から pdf file を持っていく。

レポートの提出期限, 方法(以下のいずれか; 物理的に提出する場合は出来るだけ A4 の大きさでお願いします)

提出方法: 原の部屋の前のポストに入れるか, またはメールで送る (hara@math.nagoya-u.ac.jp)。E-mail で受け取った人には原からその旨 e-mail で返事します。不安な人は確認して下さい。

提出期限: M2の人は2月5日(火曜)の午後5時, M1の人は2月19日(火曜)の午後5時。

問題

くりこみ変換を実際に手を動かして味わってもらおうと言うのが狙いです。講義の時にも強調したように, くりこみ変換を実際に意味のあるモデルで遂行するのはなかなか大変です。そこで, 実際のモデルのくりこみ変換をある程度忠実に再現しているだろうと思われる, *Hierarchical Model* を用い, このモデルでのくりこみ変換の漸化式の導出とその解析を行うことにしました。

Hierarchical Model と言うのはスピン間の相互作用を特殊な長距離力の形に取ることにより, くりこみ変換が非常に簡単な形になるように工夫した人工的なモデルです。くりこみ変換は, 一変数関数 h から h' への写像として書けます:

$$h'(\varphi) = \mathcal{N} \exp\left(\frac{\beta}{2}\varphi^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} dz h\left(\frac{\varphi}{\sqrt{c}} + z\right) h\left(\frac{\varphi}{\sqrt{c}} - z\right) \quad (1)$$

ここで

$$c \equiv 2^{1-2/d}, \quad \beta \equiv \frac{1}{c} - \frac{1}{2}, \quad d > 2 \text{ は定数} \quad (2)$$

であり, \mathcal{N} は $h'(0) = 1$ となるようにとる規格化定数。この $h(\varphi)$ とは, ハミルトニアンのパテンシャル部分 V と大体 $h(\varphi) \equiv e^{-V(\varphi)}$ の関係にあるものです(詳細は [3, 4] を参照)。ともかく, このような背景には深入りせず, (1) で与えられた変換の性質を調べてみましょう。

以下の小問につき, 出来る範囲で取り組んで解答して下さい。

- まず, $h(\varphi) = e^{-\varphi^2/4}$ が, (1) の 不動点 になっていることを確認してください。
- 次に, この不動点の 安定性 を議論します。まず,

$$h(\varphi) = \exp\left\{-\frac{\varphi^2}{4} - V(\varphi)\right\}, \quad h'(\varphi) = \exp\left\{-\frac{\varphi^2}{4} - V'(\varphi)\right\}, \quad (3)$$

と書き, 不動点からのズレを $V(\varphi)$ で表します。(1) で与えられる変換を V, V' の一次までとって近似することにより, V から V' への線形変換として表してください。これは数学的には「(1)の変換の, この不動点での接写像」を求めたことになっています。

3. 上で求めた V から V' の変換の固有ベクトルを求めて下さい。つまり、 $V'(\varphi) = \alpha V(\varphi)$ となるような α (固有値) と V (固有ベクトル) を求めて下さい。
 ヒント: この場合, 固有値, 固有ベクトル共に無限個あるので, 全部を求めるのは不可能ではないですが少し大変です。そこで, $V(\varphi)$ が φ の 2 次式や 4 次式の場合から始めて, いくつか求めるだけでもまあ, よしとしましょう。
4. さて, 固有値 (の絶対値) が 1 より大きいと言うことは, この不動点から離れて行く固有摂動があることを意味し, 不動点の不安定性につながります。上で求めた固有値や固有ベクトルは当然, d の値に依存しますが, どのような d の時に, 何本, 不安定な固有ベクトルがあるか, 議論してください。

問題おわり

注

- (1) の変換は $d = \infty$ の場合 (つまり $c = 2$ の場合) には, 中心極限定理に相当します。
- Hierarchical model にはいくつかの version があり, また同じモデルでもどの部分を $h(\varphi)$ と書くかで見かけが異なってきます。実際, 上で採用した書き方は [4] での書き方と異なっているのですが, 上の h と [4] での f は, $h(\varphi) = f(\varphi) e^{-\varphi^2/4}$ の関係にあります。
- 上の hierarchical model は余りに簡単で問題の複雑さがうまく伝わらない危惧を持っています。くりこみ群に興味を持たれた方は, 講義で説明した「摂動論による計算」を実際に遂行してみingことをお奨めします。どのくらい大変なことかの感じはつかめるでしょう。
- この問題は東工大での集中講義で使ったものと同じです。他の問題 (講義でやったように摂動論を実際に遂行する) を考えたのですが, かなりの計算力を要する上に計算に隠れて本質を見失うかも知れないので, 採用しませんでした。

お知らせ

今年に入ってから他の校務が山積みで, 「講義ノート」はまだまだ未完成な状態にあります (自筆のノートはかなり完成しているが, まだ打ち込んでいない)。しかし, 未完成でもないよりはマシかもしれない, との立場から, くりこみ群に関する第 2 部を web page に掲載しています (東工大での集中講義のノート: <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hara/lectures/titech01.html>)。未完成で時にはウソも載ってるかも知れない, ことをご理解の上, 自己責任 でご利用下さい。この名大での講義の講義ノートは, 2 月中旬に暫定公開の予定です。

また, 講義中にあまり文献を紹介できなかったので, このレポートの最後, および web page に掲載予定の「未完成講義ノート」に載せておきます。くりこみ群全般には, 以下の [1, 2] がお奨めで, 特にこの講義には [1] の田崎さんの書かれたところが参考になるでしょう。

参考文献

- [1] H. Ezawa, M. Suzuki, H. Tasaki, and Watanabe. くりこみ群の方法. 岩波, 東京, (1994). 現代の物理学 13.
- [2] N.D. Goldenfeld. *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*. Addison-Wesley, (1992).
- [3] Ja G.Sinai. *Theory of Phase Transitions: Rigorous Results*, Pergamon (1982).
- [4] T. Hara. 厳密なくりこみ群入門 In くりこみ理論の地平, 数理科学 1997 年 4 月号.