2002.2.27

数理物理学特論（2001 年度秋学期）レポートその２，解答編

問１　1. 単に微分して，出てきた項を整理するだけ.

2. 色々な解法がある.

特性曲線を用いる方法： $m_{\mathrm{MF}}(J,H(J))$ の値が一定である曲線 $H=H(J)$ を特性曲線と言う．この特性曲線を求めてみよう．$m_{\mathrm{MF}}(J,H(J))$ の値が一定だと言う訳なので，こいつを J で全微分して

$$\begin{aligned}0&=\frac{d}{dJ}m_{\mathrm{MF}}(J,H(J))=\frac{\partial}{\partial J}m_{\mathrm{MF}}(J,H)+\frac{\partial}{\partial H}m_{\mathrm{MF}}(J,H)\times\frac{dH(J)}{dJ}\\&=2\,d\,m_{\mathrm{MF}}(J,H)\frac{\partial}{\partial H}m_{\mathrm{MF}}(J,H)+\frac{\partial}{\partial H}m_{\mathrm{MF}}(J,H)\times\frac{dH(J)}{dJ}\\&=\left[2dm_{\mathrm{MF}}(J,H)+\frac{dH(J)}{dJ}\right]\times\left.\frac{\partial}{\partial H}m_{\mathrm{MF}}(J,H)\right|_{(J,H)=(J,H(J))}\end{aligned}\tag{1}$$

を得る．ここで勿論，右辺の H はすべて $H(J)$ と思うべし．これから

$$\frac{dH(J)}{dJ}=-2dm_{\mathrm{MF}}(J,H(J))=-2d\,m_{\mathrm{MF}}(0,H(0))\tag{2}$$

を得る．最後の等式は，今は $H(J)$ が特性曲線を表すものなので，この曲線上では m_{MF} の値が一定である（かつ初期値に等しい）ことから出る.

これは特性曲線が実は<u>直線</u>であることを意味している．この特性曲線と J-軸の交点は

$$J_H\equiv\frac{H}{2d\,m(0,H)}\tag{3}$$

である．これはこの J_H より大きな J では，$m(J,0)\neq0$ なる解が存在することを意味する．このような J_H の最小値が J_{MF} を与えるはずである.

ところで， $m(0,H)$ は H の増加関数であり，かつ上に凸である．従って $\dfrac{m(0,H)}{H}=\dfrac{m(0,H)-m(0,0)}{H}$ は H の減少関数で，J_H は H の増加関数である．従って，

$$J_{\mathrm{MF}}=\inf J_H=\lim_{H\downarrow0}\frac{H}{2d\,m(0,H)}=\frac{1}{2d}\left(\left.\frac{\partial m(0,H)}{\partial H}\right|_{H=0}\right)^{-1}=\frac{1}{2d}\Big(\langle\varphi;\varphi\rangle_0\Big)^{-1}=\frac{1}{2d\,\langle\varphi^2\rangle_0}\tag{4}$$

2 の別解

要するに $m\approx0$ （でも $m\neq0$）の解がいつ出るかを見れば良いわけだから，m_{MF} の定義式において $H=0$ としてみると

$$m_{\mathrm{MF}}=\frac{\big\langle\exp\big\{2dJm_{\mathrm{MF}}\,\varphi\big\}\,\varphi\big\rangle_0}{\big\langle\exp\big\{2dJm_{\mathrm{MF}}\,\varphi\big\}\big\rangle_0}\tag{5}$$

となる．Ising model や φ^4-model においては，右辺の量は m_{MF} を無限大にした場合，m_{MF} の一次よりもゆっくり無限大に行く（why?）．であるので，(5) がゼロでない解を持つためには，右辺の $m_{\mathrm{MF}}=0$ での微係数が１より大きいことが必要十分である．微係数を計算すると，この条件は

$$1\leq2dJ\,\langle\varphi^2\rangle_0\tag{6}$$

であることがわかる.

問２　1. 単に微分して，出てきた項を整理するだけ.

2. 色々な解法がある．問１と同様に特性曲線を考えると，今度は不等式なので，

$$\frac{dH(J)}{dJ}\geq-2\,d\,m(J,H(J))=-2\,d\,m(0,H(0))\tag{7}$$

が得られる．つまり，(J,H)-平面で見たときに，特性曲線の傾きは平均場の時よりも緩い．また，問題中でも注意したように，$J=0$ で平均場とそうでないものに差はない．$m(0,H)$ が H の増加関数であることに注意すると，これらから，同じ (J,H) においては（$H\geq 0$）

$$m(J,H)\leq m_{\mathrm{MF}}(J,H) \tag{8}$$

であることが結論できる．

2 の別解（ヒントに示した方法）与えられた (J,H) について $m^*(x;J,H)$ を

$$m^*=m\bigl(J(1-x),H+2dJxm^*\bigr),\qquad (0\leq x\leq 1) \tag{9}$$

の解として定義する．$m^*(0;J,H)=m(J,H)$ かつ $m^*(1;J,H)=m_{\mathrm{MF}}(J,H)$ に注意すると，$m^*(x;J,H)$ が x について単調増加であることを言えれば十分である．(9) を x で微分してみると ［$\tilde{J}=J(1-x),\tilde{H}=H+2dJxm^*$］，

$$\frac{\partial}{\partial x}m^*(x;J,H)=\frac{\partial}{\partial\tilde{J}}m(\tilde{J},\tilde{H})\times(-J)+\frac{\partial}{\partial\tilde{H}}m(\tilde{J},\tilde{H})\times\left[2dJm^*+2dJx\frac{\partial}{\partial x}m^*\right] \tag{10}$$

つまり

$$\frac{\partial m^*}{\partial x}\left[1-2dJx\frac{\partial m(\tilde{J},\tilde{H})}{\partial\tilde{H}}\right]=J\left[2dm(\tilde{J},\tilde{H})\frac{\partial m(\tilde{J},\tilde{H})}{\partial\tilde{H}}-\frac{\partial m(\tilde{J},\tilde{H})}{\partial\tilde{J}}\right] \tag{11}$$

が得られる．上の右辺は GHS 不等式から非負なので，左辺の括弧の中が正だと言えれば，$\dfrac{\partial m^*}{\partial x}\geq 0$ が結論できて，メデタシメデタシとなる．

さてさて，問題は

$$1-2dJx\frac{\partial m(\tilde{J},\tilde{H})}{\partial\tilde{H}} \tag{12}$$

が非負かどうかであるが，これについては x,J を固定した上で (9) を H で偏微分してみる．結果は

$$\frac{\partial m^*}{\partial H}=\frac{\partial m(\tilde{J},\tilde{H})}{\partial\tilde{H}}\times\left[1+2dJx\frac{\partial m^*}{\partial H}\right]\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{\partial m^*}{\partial H}\left[1-2dJx\frac{\partial m(\tilde{J},\tilde{H})}{\partial\tilde{H}}\right]=\frac{\partial m(\tilde{J},\tilde{H})}{\partial\tilde{H}} \tag{13}$$

となる．Griffiths II から右辺は非負．また，左辺の括弧の中は (12) そのものであるので，$\dfrac{\partial m^*}{\partial H}>0$ が言えれば，(12) が非負だと言える．

実際に，$m^*(x;J,H)$ は，x,J を固定したときには H の増加関数である．理由は以下の通り．まず (9) を図形的に解釈すると，m^* は (y,z) 平面上の 2 つのグラフ

$$z=y\qquad\text{と}\qquad z=m\bigl(\tilde{J},H+\alpha y\bigr) \tag{14}$$

の交点で与えられる．ここで $\tilde{J}\equiv J(1-x),\alpha\equiv 2dJx$ であるが，これらは H,m^* に依存しないので，以下では定数と見なして良い．さて，H を増やしたときのこのグラフの交点の動き方がわかればよい．H を増やすと，$z=m\bigl(\tilde{J},H+\alpha y\bigr)$ のグラフは左へ平行移動される．しかし，そのグラフは，GHS 不等式から y（磁場）の関数として上に凸である増加関数である．だから，H を増やしてグラフを左へ平行移動した場合，$z=y$ との交点は右上へ動く．つまり m^* は H の増加関数であることがわかった．

と言うわけで証明終わり．

3. 極限でも不等式は移行するから，

$$m_s(J)\leq\lim_{H\downarrow 0}m_{\mathrm{MF}}(J,H) \tag{15}$$

であり，従って，$J<J_{\mathrm{MF}}$ であれば m_MF も m_s もゼロである．つまり，$J_c>J_{\mathrm{MF}}$ が結論される．

元ネタについて

実はこの問題の元ネタは，田崎晴明さん（現学習院大）と僕の，修士の時の共著論文である：H. Tasaki and T. Hara: Mean field bound and GHS inequality. J. Statist. Phys. **35** (1984), 99–107. 我々の考えたやり方は特性曲線を用いない，ヒントに示した方法であったが，その後，C.M. Newman から，同様の事を彼が既にやっていたこと（ただし，正式な論文にはなっていなかった），また特性曲線を用いるともっと簡単に出来ること，を指摘された．GHS 不等式と平均場の関係に気づいたときは嬉しかったのだが，この程度のことは誰かがやっているからいい気になるな，と言う「若気の至り」に属するお話でした．