2002.12.24

数理物理学特論（2001 年度秋学期）レポートその２

担当：原　隆（多元数理科学研究科）：理１号館 508 号室，Tel: 052-789-5392
(e-mail: hara@math.nagoya-u.ac.jp, http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html)

下の問に解答し，2002 年１月 15 日（火）正午までに，原の部屋（理学部１号館５０８号室）の前の封筒に入れてください（講義時に手渡してくれても，もちろん良いです）．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください．（お断り：体調がかなり悪いので，ショウモナイ出題ミスをやっている可能性もあります．おかしいと思ったら遠慮なく e-mail で問い合わせてください.）

今回は differential inequality を使って，自発磁化（と相転移点）に対する不等式を導いてもらいましょう．Differential inequalities を用いると色々な事ができる，と言うのがここ２，３回の主眼だったので，簡単な場合にその一端を味わってもらおうと言うものです．ただし，このレポートの結果では臨界現象そのものについての結果は何も出ない（従って臨界現象を調べたい，というこの講義の目的からは不満足である）ことには注意.

前置き： 簡単のため「d 次元の nearest-neightbour model，periodic boundary condition」に話を限る．以下の話は nearest neighbour model でなくても成り立つが，本質的なところを押さえるつもり.

このモデルでは有限体積 Λ 上での磁化を（記号を簡単にするため，Λ の添え字は略）

$$m(J,H) \equiv \langle \varphi_x \rangle \equiv \frac{1}{Z_\Lambda} \int \Bigl(\prod_{y\in\Lambda} d\varphi_y \eta(\varphi_y) \Bigr) e^{-\mathcal{H}_\Lambda} \varphi_x \tag{1}$$

として定義する．ここで

$$\eta(\varphi) \equiv \begin{cases} \delta(\varphi^2 - 1) & \text{(Ising model)} \\ \exp\bigl(-\frac{\lambda}{4!}\varphi^4 - \frac{\mu}{2}\varphi^2\bigr) & (\varphi^4\text{-model}) \end{cases} \tag{2}$$

は single site measure で，Z_Λ は規格化因子,

$$-\mathcal{H}_\Lambda = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x,y\in\Lambda \\ |x-y|=1}} \varphi_x \varphi_y + H \sum_{x\in\Lambda} \varphi_x \tag{3}$$

はハミルトニアン（$J > 0$，$H \geq 0$）．ただし，$|x-y| = 1$ は PBC であることを考慮して（トーラスの対面のサイトも nearest neighbour だと）解釈する．なお，見通しを良くするために single site measure η での平均を

$$\langle \cdots \rangle_0 \equiv \frac{\int d\varphi\, \eta(\varphi)\, (\cdots)}{\int d\varphi\, \eta(\varphi)} \tag{4}$$

と定義しておく.

さて前回の講義でもやったが，平均場理論（mean field theory）とは，この理論での近似的磁化 $m_{\rm MF}(J,H)$ を以下の方程式の解（のうち，最大のもの）として与える理論である：

$$m_{\rm MF} = \frac{\int d\varphi_0 \eta(\varphi_0)\, \exp\bigl\{(2dJm_{\rm MF} + H)\varphi_0\bigr\}\, \varphi_0}{\int d\varphi_0 \eta(\varphi_0)\, \exp\bigl\{(2dJm_{\rm MF} + H)\varphi_0\bigr\}} = \frac{\bigl\langle \exp\bigl\{(2dJm_{\rm MF} + H)\varphi\bigr\}\, \varphi \bigr\rangle_0}{\bigl\langle \exp\bigl\{(2dJm_{\rm MF} + H)\varphi\bigr\} \bigr\rangle_0} \tag{5}$$

Λ 上の理論での磁化 $m(J,H)$ と，近似理論での磁化 $m_{\rm MF}(J,H)$ の解の間に成り立つ不等式を調べよう，と言うのが問題である.

問１： まず，平均場理論について少し考えておこう.

1. (5) で定義された平均場の $m_{\rm MF}(J,H)$ は等式

$$\frac{\partial}{\partial J} m_{\rm MF}(J,H) = 2\,d\, m_{\rm MF}(J,H)\, \frac{\partial}{\partial H} m_{\rm MF}(J,H) \tag{6}$$

を満たすことを示せ.

2. $J_{\rm MF}$ を

$$2\,d\,J_{\rm MF}\left\langle \varphi^2\right\rangle_0 = 1 \tag{7}$$

により定義すると,

$$\lim_{H\downarrow 0} m_{\rm MF}(J,H)\begin{cases} = 0 & (J \le J_{\rm MF}) \\ > 0 & (J > J_{\rm MF}) \end{cases} \tag{8}$$

であることを示せ.

問２： 続いて本来考えたいはずの (1) のモデルに戻る．このモデルでは GHS の不等式：

$$0 \ge u_3(x,y,z) \equiv \langle\varphi_x\varphi_y\varphi_z\rangle - \langle\varphi_x\rangle\langle\varphi_y\varphi_z\rangle - \langle\varphi_y\rangle\langle\varphi_z\varphi_x\rangle - \langle\varphi_z\rangle\langle\varphi_x\varphi_y\rangle + 2\langle\varphi_x\rangle\langle\varphi_y\rangle\langle\varphi_z\rangle \tag{9}$$

が成り立つことが知られている（この事実は講義でも使ったが，ともかく天下りに認めよう）.

1. この不等式と並進対称性を使うことにより,

$$\frac{\partial}{\partial J} m(J,H) \le 2\,d\,m(J,H)\,\frac{\partial}{\partial H} m(J,H) \tag{10}$$

   が成り立つことを示せ.

2. さて，不等式 (10) は (6) の等号を不等号に変えたものであるので，$m(J,H)$ と $m_{\rm MF}(J,H)$ の間には何らかの関係があることが予想される．実際,

$$m(J,H) \le m_{\rm MF}(J,H) \qquad (\forall J>0,\ H\ge 0) \tag{11}$$

   が成り立つ．これを証明せよ.（ヒントは最後に.）

3. 今までの $m(J,H)$ は有限体積 Λ でのものであった．そこで無限体積での自発磁化 $m_s(J)$ を

$$m_s(J) \equiv \lim_{H\downarrow 0}\left[\lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^d} m(J,H)\right] \tag{12}$$

   によって定義しよう．また，講義でもやったように J の臨界値を

$$J_c \equiv \inf\{J \,|\, m_s(J) > 0\} \tag{13}$$

   と定義する．(11) から $m_s(J)$ に対する不等式を導き，更に J_c と $J_{\rm MF}$ を比較する不等式を作れ.

問２の 2 に関するヒント： 正直，これはヒント無しではなかなか難しいと思う．いくつか列挙するので，考えてみて欲しい.

- (6) は Burgers 方程式（から２階微分の項を取り去ったもの）$\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = au(t,x)\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ の形をしている（勿論 J を時間変数 t，H を空間変数 x と思う）．さて，(5) を $J=0$ で計算することはできるから，(6) の解を求めると言うことは Burgers 方程式（から２階微分の項を取り去ったもの）を，$J=0$ での初期値 $m(0,H)$ から出発して J を増やしながら解くことに相当する．Burgers 方程式というのは衝撃波を生じる方程式として有名であり，実は $\lim_{H\downarrow 0} m_{\rm MF}(J,H) > 0$ と言うのは，衝撃波の発生に対応することがわかる.
- (10) は (6) の等号を不等号にしたものであって，この２つの解を比較したい．このような場合，解が一定の値をとる曲線（特性曲線）を考え，これが (J,H)-平面でどのようになるか（特に，(10) と (6) の特性曲線の傾きはどっちが大きいか，など）を考えてみるのも良いかも知れない．このとき，$J=0$ での初期条件はどちらでも同じであるので，等号を不等号に変えたことにより，衝撃波の発生が早くなるかどうかが問題となる.
- 以上のような微分方程式の知識がかえってじゃまになるひとは，与えられた (J,H) について $m^*(x;J,H)$ を

$$m^* = m(J(1-x), H + 2dJxm^*), \qquad (0 \le x \le 1) \tag{14}$$

  の解として定義し，これを解析しても良い（ここで $m(J,H)$ は (1) での磁化）．$m^*(0;J,H) = m(J,H)$ かつ $m^*(1;J,H) = m_{\rm MF}(J,H)$ に注意しよう.
- 今は有限体積で考えているから，$m(J,H)$ を J や H で微分することはできる．また，必要ならば Griffiths II 不等式などから出てくる単調性も使っても良い.

なお，この問題にはもとになる論文（群）が存在するが，それをここでバラしてしまうと面白くないので，出典は解答編で明示することにしよう.