

## 数理物理学特論（2001 年度秋学期）レポートその 1

担当：原 隆（多元数理科学研究科）：理 1 号館 508 号室，Tel: 052-789-5392 (e-mail: hara@math.nagoya-u.ac.jp)

下の問 1 に解答し，

2001 年 11 月 13 日（火）正午までに，原の部屋（理学部 1 号館 508 号室）の前の封筒に入れてください（講義時に手渡してくれても，もちろん良いです）．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください．

今回は“free energy”の無限体積極限の存在をやってもらいましょう．

前置き：あまり一般にして複雑なものを考えると收拾がつかなくなるので，「2次元の nearest-neighbour Ising model，Free boundary condition」に話を限る（他の境界条件でも話が同じなことは講義で説明したし， $d$ 次元の場合への拡張はちゃんと考えればできる．Nearest-neighbour と Ising の条件をはずすとちょっと厄介なことは講義でも説明したとおりで，このレポートでは扱わない）

このモデルでは単位体積あたりの free energy を（記号を簡単にするため，FBC は略）

$$f_{\Lambda} \equiv \frac{1}{|\Lambda|} \log \left[ \left( \prod_{x \in \Lambda} \frac{1}{2} \sum_{\varphi = \pm 1} \right) \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ |x-y|=1}} \varphi_x \varphi_y + H \sum_{x \in \Lambda} \varphi_x \right) \right] \quad (1)$$

として定義するのは講義で説明したとおりである．また，講義では  $\Lambda$  を一辺  $L$  の正方形ととったときに（これを  $\Lambda = L^2$  と書いた）

$$f_{\infty} \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} f_{L^2} \quad (2)$$

が存在することを示した．

問題：そこで，このレポートでは一般の  $\Lambda$  の形について， $|\Lambda| \rightarrow \infty$  の場合の  $f_{\Lambda}$  の極限が存在することを示そう．この場合， $\Lambda$  として何でもよいと言うわけではないので

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|\partial \Lambda_i|}{|\Lambda_i|} = 0 \quad (3)$$

を満たすような  $\Lambda_i$  の列 ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) を考える．このような列  $\Lambda_i$  に対しては

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{\Lambda_i} \quad (4)$$

が存在して  $f_{\infty}$  に等しい，ことを示そう．下の図のように  $\Lambda$ （不定形）を一辺  $L$  の正方形の升目で区切り， $\Lambda$  の中に入っている正方形を集めたものを  $\Lambda_{\text{in}}$ （濃い色をつけてある）， $\Lambda$  に引っかかっている正方形を集めたものを  $\Lambda_{\text{out}}$ （濃い色と薄い色の両方）とする．

1.  $f_{\Lambda} - f_{\Lambda_{\text{in}}}$  または  $f_{\Lambda} - f_{\Lambda_{\text{out}}}$  を評価せよ．
2.  $f_{L^2} - f_{\Lambda_{\text{in}}}$  または  $f_{L^2} - f_{\Lambda_{\text{out}}}$  を評価せよ．
3. この 2 つの評価を組み合わせたことにより， $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{\Lambda_i}$  が存在することを証明せよ．

もし，(3) の条件だけでは足りないと思う場合には適宜，条件を付け足して証明せよ．

